

# Sur le contrôle d'un système quantique modèle

Pierre ROUCHON

Ecole des Mines de Paris, Centre Automatique et Systèmes  
60, Bd Saint-Michel, 75272 Paris cedex 06, France

pierre.rouchon@ensmp.fr

*Résumé—*

Le système modèle est constitué d'une source électromagnétique cohérente, le contrôle  $u(t)$ , d'un photodétecteur, le capteur  $y(t)$ , et d'une particule chargée qui interagit par les photons émis par la source cohérente  $u$  et qui en renvoie une partie vers le photodétecteur  $y$ . Nous supposons la source et le photodétecteur loin de la particule. Nous étudions le transfert entre  $u$  et  $y$  en fonction de la nature de la description, classique ou quantique. Cette description s'appuie sur une version simplifiée des équations de Maxwell-Lorentz décrivant une particule chargée en interaction avec un champ électromagnétique. Dans le cas classique, la dynamique interne se ramène à celle d'un oscillateur non-linéaire avec frottement. Dans le cas quantique, cette dynamique interne est décrite par une équation de Heisenberg-Langevin où apparaissent explicitement les fluctuations du vide comme terme de Langevin. Sous les hypothèses de petites oscillations et pour un contrôle résonnant, on montre que le transfert (en amplitude) entre l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  reste inchangé entre les descriptions classique et quantique : il s'agit d'un premier ordre avec retard. Seuls des effets non-linéaires peuvent donc conduire à des différences notables.

*Mots-clés—*

Equations de Maxwell-Lorentz, oscillateur harmonique, équation des ondes, contrôle quantique, mesure, fluctuations du vide, systèmes à retard, équation de Heisenberg-Langevin.

## I. INTRODUCTION

Des travaux récents (voir par exemple [1], [2], ainsi que les notes du cours de Serge Haroche [3]) montrent qu'il est maintenant possible d'utiliser des boucles de rétro-action (feedback) pour mieux maîtriser les dynamiques quantiques de certains systèmes microscopiques. En particulier, un des problèmes clé pour la mise au point des calculateurs quantiques est de concevoir des dispositifs qui permettent de contre-carrer les effets irréversibles dits de décohérence. Ces effets dissipatifs sont dus aux couplages avec un environnement possédant un très grand nombre de degrés de liberté avec des temps caractéristiques nettement plus courts que ceux du système (fluctuations du vide).

Le but de cette communication est de considérer un système modèle avec un contrôle scalaire  $u$  (une source laser de lumière dans un état quasi-classique) et une sortie scalaire  $y$  (un photodétecteur large bande), tous les deux loin du système. Cela signifie que, si  $\omega_0$  est une pulsation caractéristique du système et  $L$  une distance caractéristique entre le système et le laser avec le photodétecteur, alors  $\omega_0 L \gg c$ ,  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. La dynamique de ce système modèle est obtenue à partir d'une version très simplifiée des équations de Maxwell-Lorentz d'une particule chargée en interaction avec le champ électromagnétique. Nous étudions le transfert entre  $u$  et  $y$  selon

la nature du modèle interne, classique ou quantique.

Sur ce système modèle, nous montrons que, du point de vue entrée/sortie et sous l'hypothèse standard des petites oscillations, il n'y a pas de différence entre des dynamiques internes classique et quantique : le transfert (en amplitude) peut être décrit par un système du premier ordre avec un gain et un retard pur. Ainsi, des algorithmes classiques (comme le prédicteur de Smith combiné avec un régulateur PI) pourraient être utiles pour contrôler certains systèmes quantiques simples.

Dans la section II, nous donnons les hypothèses simplificatrices qui, à partir du Lagrangien 3D de Maxwell-Lorentz conduisent au Lagrangien 1D du système modèle. La section III est consacrée à la dynamique classique : on montre avec des calculs proches de ceux utilisés dans [4], que, après élimination des variables de champs, le modèle classique (7) est celui d'un oscillateur non linéaire contrôlé avec un frottement visqueux. Dans le cas de petites oscillations, sous l'approximation séculaire et avec un contrôle résonnant, la relation en amplitudes entrée/sortie est alors celle d'un premier ordre avec retard. La section IV aborde la quantification selon la procédure standard à partir du Hamiltonien. On en déduit alors de manière exacte et sans utiliser l'hypothèse de "mémoire courte", les équations de Heisenberg-Langevin (10) (voir, e.g., [5, page 340]). Ensuite on traite en détail le cas des petites oscillations (potentiel harmonique) où le transfert entrée/sortie reste celui d'un premier ordre avec retard.

Tout au long du papier, nous ferons souvent référence à la version anglaise du traité écrit par Claude Cohen-Tannoudji et ses collaborateurs [6], [7]. Pour une excellente introduction à l'optique quantique, on pourra aussi consulter le cours d'Alain Aspect et ses collaborateurs [8]. L'auteur remercie Michel Fliess pour de nombreuses discussions sur les notions de bruits et de mesure.

## II. UN MODÈLE SIMPLIFIÉ ISSU DES ÉQUATIONS DE MAXWELL-LORENTZ

Les équations de Maxwell-Lorentz décrivent la dynamique d'une particule ponctuelle de masse  $m$  et de charge  $q$  en interaction avec le champ électromagnétique. Pour des vitesses petites par rapport à celle de la lumière, le Lagrangien standard en dimension 3 d'espace est le suivant (voir, e.g., [9, page 100]) :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_e^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \vec{E}^2(\mathbf{r}) - c^2 \vec{B}^2(\mathbf{r}) \right] d^3\mathbf{r} + [q \dot{\mathbf{r}}_e \cdot \vec{A}(\mathbf{r}_e) - qU(\mathbf{r}_e)]$$

où  $\mathbf{r}_e$  est la position spatiale de la particule,  $\epsilon_0$  la perméabilité du vide,  $c$  la vitesse de la lumière,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  les champs électrique et magnétique,  $\vec{A}$  et  $U$  les potentiels vecteur et scalaire avec

$$\vec{E} = -\nabla U - \dot{\vec{A}}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Nous supposons  $\vec{A}$  et  $U$  de la forme suivante :  $\vec{A} = (A(z, t), 0, 0)^T$  et  $U = U(x)$  dans un repère orthonormé  $(0, x, y, z)$ . Ainsi

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ A'(z, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} -U'(x) - \dot{A}(z, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous supposons aussi que la particule est contrainte de se déplacer sur l'axe  $Ox$  et on note  $x$  son abscisse. A une constante près, le Lagrangien admet l'expression simplifiée suivante :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \dot{A}^2(z, t) - c^2(A')^2(z, t) \right] dz + q\dot{x}A(0, t) - qU(x) \quad (1)$$

où  $\dot{\phantom{x}}$  et  $'$  correspondent aux dérivées partielles en temps et en espace respectivement. Le potentiel  $qU(x)$  est supposé minimum en  $x = 0$  et grand lorsque  $x$  est loin de 0. Ainsi la particule admet des états localisés autour de 0 comme un électron autour d'un noyau. Les hypothèses sur le potentiel vecteur  $\vec{A}$  correspondent à une onde électromagnétique plane polarisée linéairement se propageant selon la direction  $z$ .

Nous supposons que, loin de d'origine en  $z = -L < 0$ , nous avons à notre disposition une source d'onde électromagnétique quasi-classique qui envoie le long de la direction  $Oz$  et dans le sens des  $z$  croissants une lumière polarisée linéairement. Cette source quasi-classique correspond ici à un contrôle scalaire  $u(t) \in \mathbb{R}$  associé à la composante du champ électrique selon la direction  $Ox$  et se propageant vers des  $z$  positifs. Nous avons aussi placé en  $z = -L$  un photo-détecteur qui capte les ondes arrivant de 0. On notera  $y(t)$  la valeur du courant de photo-détection : dans le cas classique,  $y$  n'est autre que l'intensité instantanée du champ électromagnétique venant de 0 et se propageant vers les  $z$  négatifs. La figure ci-dessous résume le système considéré avec son contrôle  $u$  (l'actionneur) et sa sortie  $y$  (le capteur). Nous nous intéressons aux relations entre l'entrée  $u$  et la sortie  $y$ . Comme il est usuel en théorie des systèmes, nous négligeons les dynamiques de l'actionneur et du capteur supposées rapides par rapport à celle de la particule supposée lente.

### III. LA DYNAMIQUE CLASSIQUE

Comme nous allons procéder par la suite à la quantification, il faut écrire les équations sous forme hamiltonienne. Un calcul direct montre que l'hamiltonien est

$$H = \frac{[p(t) - qA(0, t)]^2}{2m} + qU(x(t)) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\Pi^2(z, t)}{2\epsilon_0} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} (A'(z, t))^2 \right] dz \quad (2)$$

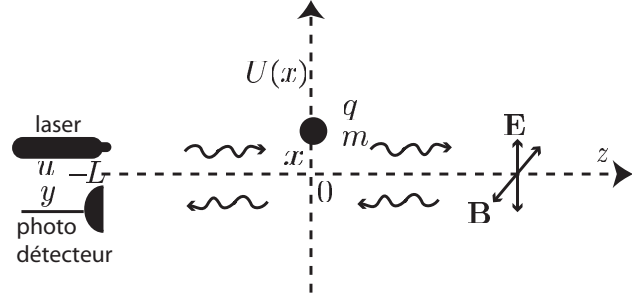


Fig. 1. Une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  se déplaçant selon  $Ox$ , dans le potentiel statique  $U(x)$  et soumise à une onde plane électromagnétique polarisée linéairement ; loin de l'origine, en  $z = -L$ , on dispose d'une source classique  $u(t)$ , le contrôle, et d'un photo-détecteur,  $y(t)$ , la mesure.

où  $p(t)$  est la variable conjuguée de  $x(t)$  et, pour chaque  $z$ ,  $\Pi(z, t)$  est la variable conjuguée de  $A(z, t)$ . Un autre calcul donne les équations de la dynamique sous la forme de Hamilton (voir, e.g., [9, page 132]) :

$$\begin{cases} m \frac{d}{dt} x(t) = p(t) - qA(0, t) \\ \frac{d}{dt} p(t) = -qU'(x(t)) \\ \epsilon_0 \frac{\partial A}{\partial t}(z, t) = \Pi(z, t) \\ \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \epsilon_0 c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}(z, t) + \frac{q}{m} [p(t) - qA(0, t)] \delta(z) \end{cases} \quad (3)$$

où  $\delta(z)$  est la distribution de Dirac. Ainsi  $A$  et  $\Pi$  sont continus en  $z = 0$  avec une discontinuité au niveau de leur dérivées premières en  $z$ .

Il est possible de simplifier notablement ces équations en combinant les formules de d'Alembert pour  $z < 0$  et pour  $z > 0$  avec des conditions de raccord en  $z = 0$  (continuité de  $A$  et  $\Pi$  en 0 et condition de saut de  $A'$  et  $\Pi'$  en  $z = 0$ ). On pose

$$A(z, t) = \begin{cases} \phi_-(t - z/c) + \psi_-(t + z/c), & z < 0 \\ \phi_+(t - z/c) + \psi_+(t + z/c), & z > 0 \end{cases}$$

où les  $\phi_{\pm}$  et les  $\psi_{\pm}$  sont des fonctions régulières de  $z$  et  $t$  associées aux ondes se propageant selon les  $z$  positifs et négatifs, respectivement. La continuité en  $z = 0$  donne

$$A(0, t) = \phi_-(t) + \psi_-(t) = \phi_+(t) + \psi_+(t).$$

La condition de saut sur la dérivée première en  $z$  s'écrit

$$\dot{\phi}_+(t) - \dot{\psi}_+(t) - \dot{\phi}_-(t) + \dot{\psi}_-(t) = \frac{q[p(t) - qA(0, t)]}{\epsilon_0 m c}. \quad (4)$$

Les conditions aux limites sur les ondes arrivant en 0 et venant de  $z = \pm\infty$  sont :

$$u(t) = -\dot{\phi}_-(t + T_L), \quad \psi_+(t, z) = 0.$$

En effet,  $u$  est le champ électrique transverse se propageant vers  $z = 0$  à partir de  $z = -L$  et  $T_L = L/c$  est le délais de propagation de  $z = -L$  à  $z = 0$ . Aucune onde n'arrive de  $z = +\infty$  et donc  $\psi_+ = 0$ . Avec la notation  $A_0(t) = A(0, t)$ , on déduit des conditions de raccord en  $z = 0$ , les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_0(t) &= \frac{q}{2\epsilon_0 m c} [p(t) - qA_0(t)] - u(t - T_L) \\ \psi_-(t) &= A_0(t) - u(t - T_L) \\ \phi_+(t) &= A_0(t) \end{aligned}$$

Ainsi la dynamique classique du système se résume aux trois équations différentielles à retard :

$$\begin{cases} m \frac{d}{dt} x(t) = p(t) - qA_0(t) \\ \frac{d}{dt} p(t) = -qU'(x(t)) \\ \frac{d}{dt} A_0(t) = \frac{q}{2\epsilon_0 mc} [p(t) - qA_0(t)] - u(t - T_L) \end{cases} \quad (5)$$

avec comme sortie

$$y(t) = (\dot{\psi}_+)^2(t - T_L) = \left[ \frac{q}{2\epsilon_0 mc} (p - qA_0) \right]^2 (t - T_L). \quad (6)$$

Lorsque  $u = 0$ , on a comme intégrale première

$$I = A_0(t) - \frac{q}{2\epsilon_0 c} x(t)$$

et la dynamique en boucle ouverte est celle d'un système mécanique avec amortissement visqueux :

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -qU'(x) - \frac{q^2}{2\epsilon_0 c} \frac{d}{dt} x(t). \quad (7)$$

Supposons maintenant  $u$  non nul. Alors la dynamique sur  $x$  devient

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 c} \frac{d}{dt} x(t) - qU'(x) + qu(t - T_L)$$

avec comme mesure

$$y(t) = \left[ \frac{q}{2\epsilon_0 c} \frac{d}{dt} x \right]^2 (t - T_L).$$

Noter que l'état  $A_0$  est inobservable à partir de  $y$  quelque soit le contrôle  $u$ . Cela vient du fait que les potentiels sont définis à une constante près et qu'ils ne sont pas des grandeurs physiques directement observables. Noter aussi que cette partie inobservable est asymptotiquement stable et donc elle peut être ignorée sans difficulté.

A partir de maintenant, on suppose  $x$  proche de 0,  $U'(0) = 0$  et  $U''(0) > 0$ . On note  $\omega_0^2 = qU''(0)/m$  et  $\frac{q^2}{2\epsilon_0 mc} = \Lambda$ . Sous les hypothèses de petites oscillations autour du minimum de potentiel  $x = 0$  :

$$\ddot{x}(t) = -\Lambda \dot{x}(t) - \omega_0^2 x + \frac{q}{m} u(t - T_L)$$

Nous supposons le couplage avec le champ faible, soit  $\Lambda\omega_0 \ll 1$ , et la source  $u$  avec le capteur  $y$  loin de la particule, soit  $T_L\omega_0 \gg 1$ . Seul un contrôle en amplitude des oscillations de  $x$  n'est possible de façon robuste. Ainsi l'objectif est de maintenir les oscillations à un certain niveau en utilisant la mesure  $y$ . Pour cela on utilise un contrôle résonnant

$$u(t) = \imath [v(t)e^{-i\omega_0 t} - v^*(t)e^{i\omega_0 t}]$$

avec  $v \in \mathbb{C}$  une amplitude complexe lentement variable  $|\dot{v}| \ll \omega_0 |v|$ . Le changement d'état  $\mathbb{R}^2 \ni (x, \dot{x}) \mapsto \alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\omega_0} [\alpha e^{-i\omega_0 t} + \alpha^* e^{i\omega_0 t}] \\ \dot{x} &= \imath [\alpha e^{-i\omega_0 t} - \alpha^* e^{i\omega_0 t}] \end{aligned}$$

donne l'équation complexe suivante

$$2 \frac{d}{dt} \alpha = -\Lambda \alpha + \frac{qe^{i\omega_0 T_L}}{m} v + \left[ \Lambda \alpha^* - \frac{qe^{-i\omega_0 T_L}}{m} v^* \right] e^{2i\omega_0 t}.$$

Ainsi l'approximation séculaire (approximation du champ tournant) donne le modèle moyen suivant

$$2 \frac{d}{dt} \alpha(t) = -\Lambda \alpha(t) + \frac{qe^{i\omega_0 T_L}}{m} v(t - T_L)$$

Regardons maintenant la mesure  $y(t) = \left[ \frac{q}{2\epsilon_0 c} \dot{x} \right]^2 (t - T_L)$  et considérons  $\bar{y}(t) \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \int_{t-\frac{2\pi}{\omega_0}}^t y(\tau) d\tau$ , sa valeur moyenne sur une période d'oscillation  $2\pi/\omega_0$ . Comme  $T_L\omega_0 \gg 1$  et  $\Lambda\omega_0 \ll 1$ , on a  $\bar{y}(t) = \frac{q^2}{2\epsilon_0^2 c^2} |\alpha|^2 (t - T_L)$ . Avec

$$\beta(t) = e^{i\omega_0 T_L} \alpha(t - T_L)$$

nous avons le modèle entrée/sortie du premier ordre avec retard suivant

$$2 \frac{d}{dt} \beta(t) = -\Lambda \beta(t) + \frac{q}{m} v(t - 2T_L), \quad \bar{y}(t) = \frac{q^2}{2\epsilon_0^2 c^2} |\beta|^2(t) \quad (8)$$

pour lequel il est possible d'utiliser un régulateur proportionnel intégral pour maintenir  $\bar{y}$  à une certaine consigne, et ce d'autant plus facilement que  $T_L\Lambda$  est petit (retard  $T_L$  pas trop grand par rapport à la constante de temps de relaxation  $1/\Lambda$ ). Sous les hypothèses de petites oscillations, nous allons voir maintenant que la prise en compte des effets quantiques tant au niveau de la particule qu'au niveau du champ ne modifie pas ce schéma.

#### IV. DYNAMIQUE QUANTIQUE

On utilise la procédure usuelle de quantification à partir du Hamiltonien (2) (voir, e.g., [9, page 118]) :  $x, p, A$  et  $\Pi$  deviennent les opérateurs  $X, P, \mathbf{A}(z)$  et  $\mathbf{\Pi}(z)$  qui vérifient les relations de commutation

$$[X, P] = i\hbar, \quad [\mathbf{A}(z_1), \mathbf{\Pi}(z_2)] = i\hbar \delta(z_1 - z_2).$$

Les autres relations de commutation entre ces opérateurs (pris au même instant  $t$ ) sont toutes nulles. Les équations (3) restent valables avec les opérateurs et le point de vue de Heisenberg (voir, e.g., [9, page 176]) :

$$\begin{cases} m \frac{d}{dt} X(t) = P(t) - q\mathbf{A}(0, t) \\ \frac{d}{dt} P(t) = -qU'(X(t)) \\ \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(z, t) = \mathbf{\Pi}(z, t) \\ \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} = \epsilon_0 c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}(z, t) + \frac{q}{m} (P(t) - q\mathbf{A}(0, t)) \delta(z) \end{cases}$$

Les calculs avec les formules de d'Alembert restent aussi valables avec

$$\mathbf{A}(z, t) = \begin{cases} \phi_-(t - z/c) + \psi_-(t + z/c), & z < 0 \\ \phi_+(t - z/c) + \psi_+(t + z/c), & z > 0 \end{cases}$$

et  $\phi_{\pm}, \psi_{\pm}$  des opérateurs. En revanche, les conditions aux limites changent car nous ne pouvons plus dire  $\psi_+ = 0$  : le fait de supposer qu'aucune onde n'arrive de  $z = +\infty$  signifie de  $\psi_+$  correspond aux fluctuations du vide qui se propagent vers les  $z < 0$ . Si on note  $\xi(z, t)$  le champ

d'opérateurs qui correspondent aux fluctuations du vide, on a

$$\xi(z, t) = \phi_0(t - z/c) + \psi_0(t + z/c).$$

Alors en  $z = -L$ ,  $\dot{\phi}_-(t + T_L) = -u(t) + \dot{\phi}_0(t + T_L)$ . On suppose donc que se rajoute aux fluctuations venant de  $-\infty$  le contrôle classique  $u$  qui est ici un opérateur scalaire ( $u$  fois l'opérateur identité). Notre actionneur est donc une source électro-magnétique quasi-classique (voir, e.g., [9, page 141]). Pour  $\psi_+$ , nous avons  $\psi_+(t + z/c) = \psi_0(t + z/c)$ . Les conditions de raccord en  $z = 0$  restent similaires au cas classique :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0(t) &= \phi_-(t) + \psi_-(t) = \phi_+(t) + \psi_+(t) \\ [\dot{\phi}_+(t) - \dot{\psi}_+(t) - \dot{\phi}_-(t) + \dot{\psi}_-(t)] &= \frac{q}{\epsilon_0 mc} (P(t) - q\mathbf{A}_0(t)). \end{aligned}$$

Avec  $\dot{\phi}_-(t) = \dot{\phi}_0(t) - u(t - T_L)$  et  $\psi_+(t) = \psi_0(t)$ , la quantification de (5) devient avec  $\xi_0(t) = \xi(0, t)$ ,

$$\begin{cases} m \frac{d}{dt} X(t) = P(t) - q\mathbf{A}_0(t) \\ \frac{d}{dt} P(t) = -qU'(X(t)) \\ \frac{d}{dt} \mathbf{A}_0(t) = \frac{q}{2\epsilon_0 mc} [P(t) - q\mathbf{A}_0(t)] - u(t - T_L) + \dot{\xi}_0(t) \end{cases} \quad (9)$$

L'une des différences essentielles avec (5) est le rajout de  $\dot{\xi}_0(t)$ , les fluctuations dans le vide. Le signal de photo-détection est associé à l'opérateur champs électrique venant de 0 en  $z = -L$  :

$$\dot{\psi}_-(t - T_L) = \dot{\mathbf{A}}_0(t - T_L) - \dot{\phi}_-(t - T_L).$$

Ainsi le photo-courant  $y(t)$  du détecteur se calcul grâce à l'opérateur

$$\frac{q}{2\epsilon_0 c} \dot{X}(t - T_L) + \dot{\psi}_0(t - T_L).$$

Un peu plus loin nous verrons comment on obtient le photo-courant  $y(t)$  à partir de cet opérateur.

Comme pour le modèle classique, on peut ne garder que l'opérateur  $X$ , éliminer les variables champs et avoir l'équation du second ordre suivante :

$$m\ddot{X}(t) = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 c} \dot{X}(t) - qU'(X(t)) + qu(t - T_L) - q\dot{\xi}_0(t) \quad (10)$$

où  $\dot{\xi}_0 = \dot{\phi}_0 + \dot{\psi}_0$  correspond aux fluctuations du champ électrique dans le vide et où la mesure est associée à l'opérateur  $\frac{q}{2\epsilon_0 c} \dot{X} + \dot{\psi}_0$  en  $t - T_L$ . Cette équation est l'équation de Heisenberg-Langevin de notre système. Noter que nous l'avons obtenue sans aucune approximation du type temps caractéristiques petits et/ou mémoire courte pour la dynamique du champ électro-magnétique.

Faisons les mêmes hypothèses de petites oscillations sur le potentiel  $U$  :

$$\ddot{X}(t) = -\omega_0^2 X - \Lambda \dot{X}(t) + \frac{q}{m} [u(t - T_L) - \dot{\phi}_0(t) - \dot{\psi}_0(t)].$$

C'est l'équation d'un filtre du second ordre où les opérateurs  $\phi_0$  et  $\psi_0$  peuvent être interprétés comme une source stationnaire de bruits quantiques, source de bruits qui admet cependant une structure très particulière. En effet,  $\dot{\phi}_0$  et  $\dot{\psi}_0$  s'écrivent (voir [9]) ainsi (on a tenu compte

du fait que nous sommes en dimension 1 d'espace)

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_0(t) &= \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0}} (a_\omega e^{-i\omega t} - a_\omega^\dagger e^{i\omega t}) d\omega \\ \dot{\psi}_0(t) &= \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0}} (b_\omega e^{-i\omega t} - b_\omega^\dagger e^{i\omega t}) d\omega \end{aligned}$$

où  $a_\omega$  et  $b_\omega$  sont les opérateurs d'annihilation de photons d'énergie  $\hbar\omega$  allant vers les  $z$  croissants et décroissants, respectivement. Les seules commutations non triviales sont

$$[a_{\omega_1}, a_{\omega_2}] = [b_{\omega_1}, b_{\omega_2}] = \delta(\omega_1 - \omega_2).$$

Un calcul direct montre que, avec ces commutations, nous avons bien les relations

$$[\xi(t, z_1), \epsilon_0 \dot{\xi}(1, z_2)] = i\hbar\delta(z_1 - z_2)$$

où  $\xi(t, z) = \phi_0(t - z/c) + \psi_0(t + z/c)$ .

Ainsi  $X = \bar{X} + X_0$  où l'opérateur scalaire  $\bar{X}$  est solution de l'équation différentielle du second ordre scalaire

$$\ddot{\bar{X}}(t) = -\omega_0^2 \bar{X} - \Lambda \dot{\bar{X}}(t) + \frac{q}{m} u(t - T_L)$$

et où l'opérateur  $X_0$  est une solution de

$$\ddot{X}_0(t) = -\omega_0^2 X_0 - \Lambda \dot{X}_0(t) - \frac{q}{m} [\dot{\phi}_0(t) + \dot{\psi}_0(t)].$$

On peut prendre pour  $X_0$  la solution suivante

$$X_0(t) = i \int_0^{+\infty} (Q_\omega e^{-i\omega t} - Q_\omega^\dagger e^{i\omega t}) d\omega$$

avec

$$Q_\omega = \frac{q}{m} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi\epsilon_0}} \frac{a_\omega + b_\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Lambda\omega}.$$

Il est usuel pour interpréter les mesures de photo-détection de poser  $X_0 = X_0^+ + X_0^-$  selon une décomposition en fréquences positives et négatives de  $X_0$  (voir, e.g., [9, page 184]) :

$$X_0^+(t) = i \int_0^{+\infty} Q_\omega e^{-i\omega t} d\omega$$

et  $X_0^- = [X_0^+]^\dagger$ . Avec un contrôle résonnant autour de  $\omega_0$  et l'approximation séculaire, on peut faire la même décomposition pour la partie scalaire  $\bar{X}$ . Il suffit de reprendre les notations et les approximations utilisées pour la dynamique classique. On pose donc  $\bar{X} = \bar{X}^+ + \bar{X}^-$  avec

$$\bar{X}^+(t) = \frac{\alpha(t)e^{-i\omega_0 t}}{\omega_0}, \quad \dot{\bar{X}}^+(t) = -i\alpha(t)e^{-i\omega_0 t}$$

avec  $\bar{X}^- = [\bar{X}^+]^\dagger$ ,  $\dot{\bar{X}}^- = [\dot{\bar{X}}^+]^\dagger$  et

$$2\frac{d}{dt}\alpha(t) = -\Lambda\alpha(t) + \frac{qe^{i\omega_0 T_L}}{m} v(t - T_L).$$

La valeur moyenne sur un petit intervalle de temps de l'ordre de  $2\pi/\omega_0$  du courant de photo-détection est alors

donnée à une constante multiplicative près par la valeur moyenne de l'opérateur<sup>1</sup> :

$$\left(\frac{q}{2\epsilon_0 c} \dot{X}^- + \dot{\psi}_0^-\right) \left(\frac{q}{2\epsilon_0 c} \dot{X}^+ + \dot{\psi}_0^+\right).$$

L'état initial du rayonnement est celui du vide noté symboliquement  $|0\rangle$ . On a donc à calculer

$$\langle 0 | \left(\frac{q}{2\epsilon_0 c} \dot{X}^- + \dot{\psi}_0^-\right) \left(\frac{q}{2\epsilon_0 c} \dot{X}^+ + \dot{\psi}_0^+\right) | 0 \rangle.$$

Comme  $a_\omega |0\rangle = b_\omega |0\rangle = 0$  on a  $Q_\omega |0\rangle = 0$ . Ainsi les contributions des opérateurs  $\dot{X}_0^+$ ,  $\dot{X}_0^-$ ,  $\dot{\psi}_0^-$  et  $\dot{\psi}_0^+$  disparaissent pour ne laisser que les opérateurs scalaires  $\dot{X}^+$  et  $\dot{X}^-$ . On obtient alors comme valeur moyenne

$$\left(\frac{q}{2\epsilon_0 c}\right)^2 |\alpha|^2.$$

Ainsi d'un point de vue entrée/sortie il n'y a pas de différence entre un modèle quantique et un modèle classique.

## V. CONCLUSION

Le système modèle considéré ici est l'un des plus simples que l'on puisse imaginer en incluant les points suivants :

1. Le contrôle  $u$  est associé aux photons que l'on envoie vers le système ;
2. la mesure  $y$  est associée aux photons que le système nous renvoie ;
3. la dynamique s'appuie sur les équations de Maxwell-Lorentz quantifiées. Dans le cas quantique, la dynamique interne est donnée par une équation de Heisenberg-Langevin où les termes de Langevin sont exactement les fluctuations du vide.
4. le capteur et l'actionneur sont tous les deux loin du système et correspondent à des grandeurs classiques.

Nous avons vu que, sous des hypothèses de petites oscillations, il n'y a pas de différence entre une description classique et une description quantique. Ce point n'est pas surprenant en regard des résultats sur la contrôlabilité d'une famille d'oscillateurs harmoniques (voir [10], [11]), résultats qui sont une traduction en théorie des systèmes d'un fait bien connu des physiciens : des charges classiques ne peuvent émettre que des ondes électro-magnétiques cohérentes.

<sup>1</sup>Physiquement, on détecte des clics, correspondant à des électrons uniques qui viennent juste d'être mis dans un état excité par le champ électrique  $-\dot{\psi}_-(t - T_L)$ , et où ils peuvent se déplacer et donc être détectables. La valeur moyenne calculée ici résulte d'un calcul perturbatif au premier ordre et on l'interprète comme la probabilité qu'a un électron d'être excité. Aussi, le photo-courant est en fait un signal discret, un signal qui compte les électrons. Cependant, comme nous en prenons ici la moyenne sur un temps de l'ordre de  $2\pi/\omega_0$ , nous pouvons le traiter comme un signal continu. C'est un peu comme les capteurs angulaires dont sont équipés les robots : on mesure l'angle en comptant les tops associés à chaque passage (devant une diode) d'une rainure de la roue codeuse. Une telle approximation continue se justifie ici car nous supposons que le capteur et l'actionneur sont loin du système avec lequel ils interfèrent en échangeant des photons :  $y$  est proportionnel au flux moyen de photons rétro-diffusés par le système.

Ce système modèle nécessite d'être enrichi pour être plus proche de la réalité. On pourrait considérer des effets non-linéaires avec un potentiel  $U$  non harmonique. Un calcul perturbatif prenant en compte des termes d'ordre 3 dans  $U$ , donne dans le cas classique des corrections d'ordre supérieur et, dans le cas quantique, des corrections d'ordre 1 directement dues aux fluctuations du vide.

Un système plus proche des systèmes manipulés par les physiciens serait de prendre comme description de la particule, un modèle à deux niveaux d'énergie et sans contrepartie classique comme ici. On pourrait imaginer de traiter une variante avec contrôle et photo-détecteur du système de Jaynes et Cummings[12] : un système à deux niveaux, couplé à un champ électro-magnétique 1D et quantifié (au lieu d'un seul mode résonnant d'une cavité de grande finesse) : dans l'Hamiltonien, seuls les termes associés à la particule changent ; les conditions aux limites, le contrôle  $u$  et le capteur  $y$  restent similaires.

## RÉFÉRENCES

- [1] J.M. Geremia, J.K. Stockton, et H. Mabuchi. Real-time quantum feedback control of atomic spin-squeezing. *Science*, 304 :270, 2004.
- [2] R. Van Handel, J. K. Stockton, et H. Mabuchi. Feedback control of quantum state reduction. *IEEE Trans. Automat. Control*, 50 :768–780, 2005.
- [3] S. Haroche. Contrôle de la décohérence : théorie et expériences, 2004. Notes de cours, Collège de France. <http://www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/college/college.html>.
- [4] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, et J. Rudolph. Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as delay system. *ESAIM : COCV(www.eamth.fr/cocv)*, 3 :315–321, 1998.
- [5] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg. *Atom-Photon interaction : Basic Processes and Applications*. Wiley, 1992.
- [6] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg. *Photons et atomes : introduction à l'électrodynamique quantique*. Editions du CNRS, 1987.
- [7] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg. *Processus d'interaction entre photons et atomes*. Editions du CNRS, 1987.
- [8] A. Aspect, C. Fabre, Ph. Grangier, et G. Grynberg. *Optique quantique 1 et 2*. Ecole Polytechnique, 2002. cours en 4 volume, Majeure de Physique.
- [9] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg. *Photons and Atoms : Introduction to Quantum Electrodynamics*. Wiley, 1989.
- [10] M. Mirrahimi et P. Rouchon. Controllability of quantum harmonic oscillators. *IEEE Trans Automatic Control*, 49(5) :745–747, 2004.
- [11] M. Mirrahimi et P. Rouchon. On the controllability of some quantum electro-dynamical systems. *accepted to CDC/ECC 05*, 2005.
- [12] E.T. Jaynes et F.W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1) :89–109, 1963.