Université Pierre et Marie Curie, Paris 6

Mémoire pour soutenir une

Habilitation à Diriger des Recherches

présenté par **Laurent PRALY**

intitulé:

Stabilisation de point d'équilibre et Atténuation de perturbations

soutenue le 12 novembre 2010 devant le jury composé de

Pierre BERNHARD
Jean-Michel CORON
Alberto ISIDORI
Jean LÉVINE
Witold RESPONDEK

Remerciements

Je remercie très vivement Lars GRÜNE, Eduardo SONTAG et Witold RESPONDEK qui ont accepé avec enthousiasme la tâche importante de rapporteur et dont les rapports très positifs ont permis ma soutenance.

Je remercie chaleureusement chacun des membres du Jury:

Pierre BENHARD, qui m'a introduit à l'automatique, a suivi mes premiers pas dans le monde de la recherche et a permis, avec Guy COHEN, mon entrée à l'École des Mines comme chercheur. Sa qualité de scientifique a aussi et depuis toujours été un modèle pour moi.

Jean-Michel CORON, sans qui, presqu'aucune de mes publications scientifiques que la communauté a retenue n'existerait. Il a toujours été présent pour m'aider et me montrer la voie lorsque je rencontrais des difficultés mathématiques qui me dépassaient et cela avec une très grande simplicité, beaucoup d'encouragements et d'amitié.

Alberto ISIDORI, qui est l'une des personnes avec qui j'adore collaborer et pour qui j'ai le plus grand respect. La qualité scientifique de ses contributions mais aussi sa précision, sa rigueur, sa clareté, sa pédagogie sont des modèles d'une perfection inégalable.

Jean LÉVINE, mon vieux compagnon de route, avec qui j'ai partagé les bons et les mauvais moments du CAS, le Centre d'Automatique et Systèmes. Il m'a toujours soutenu et encouragé, toujours répondu présent. Il est aussi l'un des principaux acteurs qui ont fait le CAS tel qu'il est aujourd'hui.

Witold RESPONDEK, qui en plus de la charge de rapporteur a accepté de faire partie du jury et pour qui j'ai la plus grande admiration pour ses qualité d'homme et de chercheur.

Je remercie aussi toutes les personnes avec lesquelles j'ai collaboré scientifiquement. Elles sont trop nombreuses pour que je les nomme. Mais qu'elles sachent toutes combien je leur suis redevable et toute la valeur que je donne à ces relations toutes particulières et dans le monde entier.

Je tiens à remercier l'institution, l'Ecole des Mines de Paris, qui m'accueille maintenant depuis 30 ans. Il est bien évident que c'est grâce à tout le contexte qu'elle offre que j'ai pu faire ma carrière dans le monde de la recherche en Automatique. C'est aussi au CAS que je suis redevable. Grâce aux efforts constants de recherche de qualité scientifique et de défense de la Recherche avec un grand “R”, il donne un environnement qui est probablement le meilleur qui puisse exister en France et même au delà. Je tiens donc à remercier tous mes collègues d'hier et d'aujourd'hui et tous ceux qui en ont eu la responsabilité. En particulier je remercie Pierre BERNHARD puis Guy COHEN qui ont insufflé l'énergie initiale que les successeurs ont su si bien entretenir.

C'est aussi tous ceux qui m'entourent qui doivent être grandement remerciés. Tout d'abord mes parents qui, du fait de l'éducation qu'ils m'ont donnée, sont responsables pour une bonne part des succès que j'ai pu avoir dans ce métier. Ensuite mes enfants qui ont supporté mon manque de disponibilité ou mon absence mentale que mon travail et toutes les préoccupations qui vont avec ont trop souvent engendrés. Malgré cela ils ont su trouver si brillamment leur chemin et sont aujourd'hui toute ma fierté. Enfin et surtout c'est mon épouse Odile que je tiens à remercier le plus chaleureusement possible. Le mariage est un engagement pour le meilleur et pour le pire. Le meilleur est quelque chose que je ne sais pas trop exprimé, mais le pire cela me connait. Odile a toujours été présente, m'a soutenu dans les moments difficiles, accompagné en toutes circonstances.

Préambule

Dans ce mémoire je reprends un certain nombre de résultats que j'ai obtenus avec mes collaborateurs concernant la stabilisation d'un point d'équilibre et l'atténuation de perturbation. Pour lui donner une certaine cohérence, j'ai choisi de ne pas traiter d'autres thèmes pourtant abordés dans ma recherche comme la commande adaptative, la régulation de sortie et les observateurs. Il est toujours difficile et même frustrant de se limiter, mais c'est là je crois le prix à payer pour la clarté et la concision.

Aussi j'ai cherché à donner une vue d'ensemble. Pour cela je n'ai en général repris qu'un des résultats, souvent le plus emblématique, de chacune des publications que je cite.

Mis à part un bref résumé pour le premier résultat, toutes les démonstrations, sauf deux, sont dans la partie complémentaire intitulée "Démonstrations" à la fin de ce document.

Convention : Mes publications citées dans le texte apparaissent avec des nombres comme [1]. Celles d'autres auteurs apparaissent avec leur nom.

Preamble

In this text, I rephrase some of the results I obtained with my colleagues on equilibrium point stabilization and disturbance attenuation. To give it some coherency, I have chosen not to report on any of the other topic I have been working on like adaptive control, output regulation and observers. It is difficult and even frustrating to limit oneself, but I guess this is the price to pay to be more clear and concise.

Also willing to stay at a higher level, in most cases, I have written only one of the results typically the most "emblematical" one of each of my publications I am quoting.

Besides a short summary for the first one, all the proofs, except two, are in the complementary part entitled "Démonstrations" at the end of this document.

Finally I apologize for the quality of the english. This text has been (too quickly) translated from french and as a translations it is worse than if I would have written it directly in english.

Convention : My publications quoted in the text appear with numbers whereas others appear with their authors name.

Résumé

Ce mémoire comporte trois parties.

La première partie traite des fonctions de Lyapunov assignables et commence par le rappel, avec une nouvelle démonstration, que la propriété de stabilité asymptotique est équivalente à l'existence d'une fonction de Lyapunov de dérivée négative définie. Ceci établit le fait qu'il n'y a pas de perte de généralité à aborder la synthèse de bouclage stabilisant par la construction de telle fonction, dite alors fonction de Lyapunov assignable.

Avec Boumediene Hamzi nous avons démontré qu'avec une propriété supplémentaire au voisinage de l'équilibre à stabiliser, une fonction de Lyapunov assignable est la fonction valeur associée à un problème de commande optimale dont le coût est défini positif en l'état et quadratique en la commande.

Avec Jean-Michel Coron nous avons proposé une technique de construction de fonctions de Lyapunov assignables lorsque la dynamique admet une structure triangulaire dite forme feedback. Cette technique nous permet d'aller bien au delà des résultats connus mettant en évidence en particulier que la régularité des bouclages intermédiaires n'est pas nécessaire.

Ensuite avec Frédéric Mazenc nous nous sommes attaqués à la forme triangulaire duale dite forme feedforward. Nous avons montré comment l'approximation de la solution d'une équation aux dérivées partielles permet de construire une fonction de Lyapunov assignable.

La seconde partie traite de l'atténuation de perturbation au sens de la réduction du gain dans la propriété de stabilité entrée-état introduite par Eduardo Sontag. Cette atténuation est motivée par les résultats, établis avec Zhong-Ping Jiang et Andrew Teel, concernant des systèmes stables entrée-état en interconnexion et garantissant qu'il y a stabilité asymptotique si la composition des gains est plus petite que la fonction identité. Avec Yuan Wang, nous avons établi que n'importe quelle valeur peut être assignée lorsqu'une "matching condition" est satisfaite. Nous avons en quelque sorte étendu ce résultat avec Zhong-Ping Jiang pour des systèmes sous forme feedback.

La troisième partie concerne le bouclage de sortie. Un premier résultat établi avec Andrew Teel porte sur le "Principe de séparation" qui s'avère être valide sous forme semi-globale sous hypothèses de stabilisabilité et d'observabilité uniforme. Pour le cas global, je cite un résultat obtenu avec Zhong Ping Jiang concernant les systèmes dont la dynamique inverse est stable entrée-état et étendu avec Vincent Andrieu et Alessandro Astolfi en utilisant des techniques d'approximation liées à la notion d'homogénéité dans la bi-limite que nous avons introduite. Enfin je cite un résultat obtenu avec Vincent Andrieu concernant les systèmes dont la dynamique inverse est stabilisable.

Summary

This memoir is made of three parts.

The first part deals with Control Lyapunov functions. It starts with reminding the result, with a new proof, that the property of asymptotic stability is equivalent to the existence of a Lyapunov function with negative definite derivative. This establishes that there is no loss of generality in tackling on the stabilization problem via the construction of Lyapunov functions which in this context are called Control Lyapunov functions.

With Boumediene Hamzi we have proved that, with an extra property in a neighborhood of the equilibrium to be stabilized, a Control Lyapunov Function is a value function associated with an optimal control problem whose cost is positive definite in the state and quadratic in the control.

With Jean-Michel Coron we have proposed a design of Control Lyapunov Functions for systems whose dynamics have a triangular form called feedback form. This design allows us to go much beyond what was known showing in particular that smoothness is not necessary for intermediate feedbacks.

Then with Frédéric Mazenc we worked on the dual triangular form called feedforward form. We have shown how an approximation of a solution to a partial differential equation allows us to design a Control Lyapunov function .

The second part deals with disturbance attenuation in the sense of reducing the gain in the property of input-to-state stability introduced by Eduardo Sontag. This attenuation is motivated by the results, established with Zhong-Ping Jiang and Andrew Teel, about interconnection of input-to-state stable systems, and guaranteeing asymptotic stability when the gain composition is smaller than the identity function. With Yuan Wang, we have established that, under a matching condition, any gain can be assigned. In some sense, we have extended this result with Zhong-Ping Jiang for systems in feedback form.

The third part is about output feedback. The first result, established with Andrew Teel, states that the “separation Principle” is true in a semi-global way when we have stabilisability and complete uniform observability. For the global case, I quote a result obtained with Zhong Ping Jiang about systems whose inverse dynamics is input-to-state stable and extended with Vincent Andrieu and Alessandro Astolfi by applying approximation techniques based on the notion of homogeneity in the bi-limit we have introduced. Finally I present a result obtained with Vincent Andrieu on systems whose inverse dynamics are stabilizable.

Table des Matières/Contents

Version Française

Chapitre 1

Fonctions de Lyapunov assignables et Stabilisation

1.1 Problème de stabilisation par bouclage d'état

Soient $\mathcal{O}$ un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}$ un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^m$ et $f : \mathcal{O} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue vérifiant :

$$f(0,0) \;=\; 0 \;.$$

Nous appelons système l'équation différentielle ordinaire sous-déterminée :

$$\dot{x} \;=\; f(x,u) \;, \tag{1.1}$$

où u, dite variable exogène ou plus exactement commande dans ce chapitre, est une “fonction” à définir à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{U}$ des commandes admissibles; dans les applications, c'est très souvent un compact. Le mot “fonction” entre guillemets utilisé ici prend différents sens selon le contexte. La définition ci-dessous lui en donne un lié au problème de stabilisation asymptotique.

Définition 1 *Nous disons que l'origine est asymptotiquement stabilisable par un bouclage d'état si il existe un entier p, un voisinage $\mathcal{V}$ de l'origine dans $\mathbb{R}^p$ et deux fonctions continues $\varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}^p$ et $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, vérifiant :*

$$\phi(t,0,0) \;=\; 0 \qquad \forall t \;,$$

tels que l'origine de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est un équilibre (uniformément) asymptotiquement stable du système (1.1) en boucle fermée avec :

$$\dot{\chi} \;=\; \varphi(t,x,\chi) \quad , \qquad u \;=\; \phi(t,x,\chi) \;. \tag{1.2}$$

Ce système (1.2) qui génère la commande u est appelé bouclage d'état. Il est dit statique si $p=0$, dynamique sinon. Il est dit stationnaire si φ et ϕ ne dépendent pas du temps t. Il est dit périodique si φ et ϕ sont des fonctions périodiques de t.

L'objet de ce chapitre est de rapporter quelques méthodes de construction des triplets (p,φ,ϕ) donnant cette propriété de stabilisation asymptotique.

1.2 Fonctions de Lyapunov assignables

Définition 2 *Soit $\mathcal{N}$ un voisinage de l'origine contenu dans $\mathbb{R}^n$. Une fonction $V : \mathcal{N} \to \mathbb{R}_+$ est dite fonction de Lyapunov sur $\mathcal{N}$ si c'est une fonction de classe C^1, et définie positive sur $\mathcal{N}$. Elle doit aussi être propre lorsque $\mathcal{N} \;=\; \mathbb{R}^n$.*

Étant donné le système (1.1), nous appelons dérivée de V le long des solutions de ce système ou dérivée de V dans la direction de f, l'expression notée indifféremment $\dot{\widehat{V(x)}}$ ou $L_f V(x,u)$:

$$\dot{\widehat{V(x)}} \;=\; L_f V(x,u) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{V(x+hf(x,u)) - V(x)}{h} \;.$$

Les fonctions de Lyapunov sont connues pour donner un outil très efficace pour étudier la stabilité. Mais, pour un système donné, trouver une fonction de Lyapunov appropriée est une tâche difficile. La situation que nous considérons ici est différente car il s'agit de stabilisation et non de stabilité et donc de synthèse et non d'analyse. Précisément le système considéré est sous-déterminé, la commande n'étant pas donnée a priori. L'idée est de choisir une fonction de Lyapunov en premier lieu pour, en second lieu, spécifier le système par le choix de la commande. Cette approche pour obtenir des lois de commande a une longue histoire. Voir par exemple [(Kalman et Bertram)]. D'après ce qui suit, nous ne perdons pas en généralité en la suivant.

Théorème 1 (**[(Kurzweil), 15]**) *Soient $f : \mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction continue s'annulant à l'origine et $\mathcal{A}$ un voisinage de l'origine contenu dans $\mathcal{O}$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *L'origine est une solution asymptotiquement stable de bassin d'attraction $\mathcal{A}$ de*
$$\dot{x} \;=\; f(x)\ . \tag{1.3}$$

2. *Il existe une fonction $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, Lipschitzienne, de constante de Lipschitz égale à 1, et définie positive sur $\mathcal{A}$ et une fonction β_δ de classe[1] $\mathcal{KL}$ telles que, pour toute fonction continue $f_\delta : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant[2] :*
$$\forall y \in \mathcal{A}\,,\ \exists z\ :\ |y-z| \;+\; |f_\delta(y) - f(z)| \;\leq\; \delta(y)\ , \tag{1.4}$$
et pour tout x dans $\mathcal{A}$, chaque solution $X_\delta(x,t)$ associée de :
$$\dot{x} \;=\; f_\delta(x)\ , \tag{1.5}$$
est définie sur $[0,+\infty[$ et satisfait :
$$\varpi_{\mathcal{A}}(X_\delta(x,t)) \;\leq\; \beta_\delta(\varpi_{\mathcal{A}}(x),t) \qquad \forall t \in [0,+\infty[\ . \tag{1.6}$$
où $\varpi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ est la fonction définie par :
$$\varpi_{\mathcal{A}}(x) \;=\; |x| \left(1 \;+\; \frac{1}{d(x,\partial\mathcal{A})}\right)\ .$$

3. *Pour tout réel strictement positif λ, il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$, de classe C^∞, propre sur $\mathcal{A}$, qui satisfait :*
$$L_f V(x) \;\leq\; -\lambda\, V(x) \qquad \forall\, x \,\in\, \mathcal{A}\ . \tag{1.7}$$

Preuve : La première démonstration de ce résultat, qui ne suppose pas l'unicité des solutions est due à [(Kurzweil)]. Depuis il a été étendu de maintes façons. En particulier, à la suite de la publication de [(Clarke, Ledyaev et Stern)], avec Andrew Teel [15], nous l'avons établi dans le cadre beaucoup plus vaste des inclusions différentielles et lorsque l'objet asymptotiquement stable est un ensemble et non plus un point. Avec les techniques utilisées dans cet article, une démonstration un peu plus simple mais surtout mieux structurée du résultat de Kurzweil est possible. Du fait du nombre limité de pages de ce mémoire, nous nous contentons de présenter un résumé en Annexe, la démonstration complète étant dans le chapitre 9.1.

Nous abordons donc le problème de stabilisation asymptotique par le point de vue des fonctions de Lyapunov.

Considérons le système affine en la commande[3] :
$$\dot{x} \;=\; a(x) \;+\; b(x)\,u\ . \tag{1.8}$$
où $a : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ et $b : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^{n*m}$ sont des fonctions continues.

Définition 3 (**[(Artstein), (Sontag [a])]**) *Soient :*

[1] Une fonction $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est dite de classe $\mathcal{K}$ si elle est continue, strictement croissante et nulle en 0. Elle est dite de classe $\mathcal{K}^\infty$ si elle est non bornée.

Une fonction $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est dite de classe $\mathcal{KL}$ si, pour chaque réel s positif ou nul, la fonction $r \mapsto \beta(r,s)$ est de classe $\mathcal{K}$ et, pour chaque réel r strictement positif, la fonction $s \mapsto \beta(r,s)$ est strictement décroissante et satisfait : $\lim_{s\to+\infty} \beta(r,s) \;=\; 0$.

[2] La condition (1.4) signifie que, pour savoir si f_δ est proche de f, il suffit de vérifier que, en tout point y, $f_\delta(y)$ est proche de $f(z)$ en un point z proche de y.

[3] $a(x)$ est un vecteur et $b(x)$ est une matrice.

- *$\mathcal{V}$ un voisinage de l'origine inclus dans $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ pour le cas global),*
- *$V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$ (respectivement $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$) une fonction de Lyapunov V sur $\mathcal{V}$.*

La fonction V est dite fonction de Lyapunov strictement assignable (respectivement assignable) point par point au système (1.8) si[4] *:*

$$L_a V(x) \ < \ 0 \quad (\textit{ respectivement } \leq \ 0 \ ) \qquad \forall x \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \ : \ L_b V(x) \ = \ 0 \ .$$

Elle est dite strictement assignable continûment à l'origine si :

$$\limsup_{\substack{|x|\to 0 \\ L_b V(x) \neq 0}} \ \frac{L_a V(x)}{|L_b V(x)|} \ \leq \ 0 \ .$$

[(Sontag [b])] et [(Freeman et Kokotovic [b])] ont montré que, si il existe une fonction de Lyapunov V strictement assignable point par point et strictement assignable continûment à l'origine, alors il existe des bouclages au moins continus assignant strictement cette fonction. Ils ont aussi donné des expressions de ces bouclages en fonction de $L_a V$ et $L_b V$.

Une autre approche possible pour aborder le problème de stabilisation asymptotique consiste à chercher le bouclage de sorte qu'il soit non seulement asymptotiquement stabilisant mais aussi qu'il minimise le critère :

$$J(x,u) \ = \ \int_0^\infty \left[l(X(x,t;u)) + u(x,t)^T R(X(x,t;u))\, u(x,t) \right] dt \tag{1.9}$$

où $X(x,t;u)$ est la solution de (1.8) en utilisant la commande $u(x,t)$, $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue non négative et $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ est une fonction de classe C^1 telle que la matrice $R(x)$ est définie positive. Une condition suffisante bien connue pour résoudre le problème de commande optimale ci-dessus est donnée par ce qui est appelée la programmation dynamique, due à Bellman, et qui passe par la recherche d'une solution V à l'équation suivante dite équation de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$l(x) \ + \ L_a V(x) \ - \ \frac{1}{4} L_b V(x)\, R(x)^{-1} L_b V(x)^T \ = \ 0 \quad , \qquad V(0) \ = \ 0 \ . \tag{1.10}$$

Il existe une relation étroite entre la solution d'un tel problème et les fonctions de Lyapunov assignables.

Proposition 2 ([12]) *Pour le système (1.8), si $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de Lyapunov propre sur $\mathbb{R}^n$ et de classe C^2, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une fonction continue $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie positive sur $\mathbb{R}^n$ et une fonction continue $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dont les valeurs $R(x)$ sont des matrices symétriques définies positives, telles que V satisfait (1.10).*
2. *V est strictement assignable point par point et vérifie :*
$$\limsup_{\substack{|x|\to 0 \\ L_b V(x) \neq 0}} \ \frac{L_a V(x)}{|L_b V(x)|^2} \ < \ +\infty \ . \tag{1.11}$$
3. *il existe $\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, une fonction de classe C^2, nulle à l'origine, radialement non bornée, à dérivée strictement positive et telle que le bouclage :*
$$\phi(x) \ = \ -L_b(\Theta(V(x)))^T \tag{1.12}$$
assigne continûment strictement $V(x)$.

[4] $L_a V$ est un scalaire, $L_b V$ est un covecteur.

Preuve : Voir le chapitre 9.2 ou [12] pour l'équivalence entre 2 et 3.

Avec cette Proposition 2, nous concluons que l'approche de la synthèse de bouclage par la commande optimale avec des critères du type (1.9), ayant une fonction l définie positive sur $\mathbb{R}^n$ et un coût quadratique en la commande, n'apporte rien de plus que l'approche par fonction de Lyapunov continûment strictement assignable et réciproquement. Cependant la première construit une fonction de Lyapunov à partir d'un coût alors que la seconde suppose la connaissance ou la possibilité de construire cette fonction.

Le bouclage (1.12) s'avère avoir la très intéressante propriété de rendre la stabilisation robuste à un certain nombre d'incertitudes crées par l'actionneur. Ceci est montré par exemple dans [(Moylan et Anderson), (Glad), (Sepulchre, Jankovic et Kokotovic), 12].

Commentaire bibliographique

La notion de fonction de Lyapunov assignable a été introduite dans des articles écrits en anglais. Là le nom utilisé est "Control Lyapunov Function". J'ai pris la liberté de ne pas traduire en français cette expression et de la remplacer par un mot plus en rapport avec la propriété.

Cette introduction a été faite par [(Artstein)] et [(Sontag [a])] qui ne supposent pas que le système est affine en la commande. Pour le cas non affine, [(Coron et Rosier)] ont montré qu'il existe un bouclage continu s'il existe une fonction de Lyapunov V strictement assignable point par point et strictement assignable continûment à l'origine. Par contre en toute généralité, ce bouclage doit aussi dépendre de façon périodique du temps. [(Rifford)] a aussi montré qu'il existe un bouclage assignant cette fonction V mais celui-ci est en général discontinu et les solutions doivent être prises au sens de celles des inclusions différentielles de Krasovskii ou Filippov.

La Proposition 2 relève de ce qui est appelé "optimal inverse". Elle est en direct filiation, mais en clarifiant la situation grâce à la condition (1.11), avec ce qui peut être trouvé dans [(Sepulchre, Jankovic et Kokotovic)] et [(Freeman et Kokotovic [a])].

Dans les deux prochains paragraphes nous décrivons comment il est possible de construire des fonctions de Lyapunov assignables lorsque la dynamique prend des formes particulières. Mais notons ici que [(Camilli, Grüne and Wirth)] ont proposé d'aborder ce problème de construction de front en généralisant la technique de Zubov de construction de fonction de Lyapunov par résolution d'une équation aux dérivées partielles.

1.3 Ajout de dérivateur

Nous considérons maintenant des systèmes pour lesquels nous pouvons trouver des coordonnées permettant d'écrire leur dynamique sous la forme particulière :

$$\dot{x} = f(x,y) \quad , \qquad \dot{y} = g(x,y,u) \, , \tag{1.13}$$

où $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \to \mathbb{R}^{n_x}$, fonction de classe C^1, et $g : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n_y}$, fonction continue, vérifient :

$$f(0,0) = 0 \quad , \qquad g(0,0,0) = 0 \, .$$

Nous nous posons la question de savoir si, étant donné un bouclage ϕ_x donnant des propriétés au système :

$$\dot{x} = f(x, \phi_x(x)) \, ,$$

il existe un bouclage ϕ_y donnant les mêmes propriétés au système :

$$\dot{x} = f(x,y) \quad , \qquad \dot{y} = g(x,y,\phi_y(x,y)) \, .$$

Nous appelons ce problème l'ajout de dérivateur. La motivation de cette appellation vient de ce que nous agissons sur le sous-système en x par l'intermédiaire de y dont la dérivée est commandée par u.

L'intérêt de savoir répondre à la question générale posée ci-dessus est que, en cas de réponse positive, ces propriétés particulières sont préservées lors d'ajouts successifs de dérivateurs. Nous pouvons donc nous attaquer par récurrence à des systèmes sous la forme suivante, dite forme feedback :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \, , \quad \ldots \, , \quad \dot{x}_k = f_k(x_1, \ldots, x_k, u) \, .$$

Pour répondre à la question posée, il s'avère suffisant de savoir construire une fonction de Lyapunov V_y continûment strictement assignable au système suivant où y est dans $\mathbb{R}$:

$$\dot{x} \;=\; f(x,y) \quad , \qquad \dot{y} \;=\; u \; . \tag{1.14}$$

Proposition 3 ([25, 24]) *Supposons l'existence d'une fonction de Lyapunov V_x sur $\mathbb{R}^n$ strictement assignée au système :*

$$\dot{x} \;=\; f(x,v) \tag{1.15}$$

par le bouclage $v = \phi_x$, une fonction localement Hölderienne d'ordre strictement plus grand que $\frac{1}{2}$. Soient des fonctions $\ell : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

1. *ℓ est radialement non bornée, de classe C^1 et de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_{+*}$,*
2. *$\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, satisfait l'équivalence :*

$$\psi(x,y) \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \;=\; \phi_x(x) \tag{1.16}$$

et est telle que la fonction :

$$\Psi(x,y) \;=\; \int_{\phi_x(x)}^{y} \psi(x,s)ds \tag{1.17}$$

vérifie :

$$\lim_{y\to-\infty} \Psi(x,y) \;=\; \lim_{y\to+\infty} \Psi(x,y) \;=\; +\infty \qquad \forall\, x\; . \tag{1.18}$$

Sous ces conditions, la fonction V_y définie par :

$$V_y(x,y) \;=\; \ell(V_x(x)) \;+\; \int_{\phi_x(x)}^{y} \psi(x,s)\,ds \tag{1.19}$$

est une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point au système (1.14).

De plus, si ϕ_x est de classe C^1 et nous avons :

$$\liminf_{|x|+|y|\to 0} \frac{|\psi(x,y)|}{|y-\phi_x(x)|} \;>\; 0 \; , \tag{1.20}$$

alors la fonction de Lyapunov V_y est strictement assignable continûment à l'origine.

Preuve : Voir le chapitre 9.3 ou [25, 24].

La possibilité de construire une fonction de Lyapunov continûment strictement assignable au système (1.14) est un fait bien connu de nos jours. Mais la technique "traditionnelle" impose le choix suivant des degrés de liberté donnés par les fonctions ℓ et ψ :

$$\ell(v) \;=\; v \quad , \qquad \psi(x,y) \;=\; y - \phi_x(x) \; .$$

Pourtant l'exploitation de ces degrés de liberté permet des extensions très intéressantes comme la prise en compte de contrainte sur la commande [17] ou de traiter des cas où la commande ϕ_x n'est pas de classe C^1 comme dans le cas d'homogénéité généralisée [24, (Lin et Qian), 3]. Nous verrons aussi plus loin des applications dans les problèmes d'atténuation de perturbations et de bouclage de sortie.

Commentaire bibliographique

La technique d'ajout de dérivateur est appelée "backstepping" en anglais. Elle a été introduite à la fin des années 1980 par divers auteurs et selon diverses approches. L'approche par changement de variable a été proposée dans [(Kokotovic et Sussmann)], l'approche par fonction de Lyapunov prend son origine dans [(Tsinias)] et l'approche par la stabilité entrée-état de [(Sontag [d])]. Elle a reçu depuis de très nombreux développements et applications. Voir par exemple[(Krstic, Kanellakopoulos et Kokotovic)], [(Freeman et Kokotovic [a])], [(Isidori [a])], [(Isidori [b])].

1.4 Ajout d'intégrateur

Nous considérons maintenant des systèmes dont la dynamique peut être écrite sous la forme :

$$\dot{y} \;=\; h_y(y) \;+\; h_x(x,y)\,x \;+\; h_u(x,y,u)\,u \quad , \qquad \dot{x} \;=\; f(x) \;+\; g(x,y,u)\,u \;, \tag{1.21}$$

où x est dans $\mathbb{R}^{n_x}$, y dans $\mathbb{R}^{n_y}$ et u dans $\mathbb{R}^m$, la fonction f est de classe C^2 les fonctions h_y et h_x sont de classe C^1 et les fonctions h_u et g sont continues, et nous avons :

$$h_y(0) \;=\; 0 \quad , \qquad f(0) \;=\; 0 \;. \tag{1.22}$$

Nous nous posons la question de savoir si, étant donnée une fonction de Lyapunov V_x sur $\mathbb{R}^{n_x}$ satisfaisant :

$$L_f V_x(x) \;<\; 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x} \setminus \{0\} \;,$$

il est possible de construire une fonction de Lyapunov V_y continûment assignable au système (1.21).

Cette fois encore notre intérêt pour cette question vient du fait que, une fois bouclé, le système (1.21) devient un système du type :

$$\dot{x} \;=\; f(x)$$

et nous pouvons étendre à nouveau. Nous avons alors possiblement un moyen pour nous attaquer par récurrence à des systèmes sous la forme suivante, dite forme feedforward :

$$\dot{x}_k \;=\; f_k(u, x_1, \ldots, x_{k-1}) \;, \quad \ldots \;, \quad \dot{x}_1 \;=\; f_1(u, x_1) \;.$$

Ce système est obtenu récursivement en ajoutant à chaque fois de nouvelles coordonnées qui intègrent des fonctions des commandes et des coordonnées déjà introduites. Pour cette raison, cette technique a été appelée ajout d'intégrateur.

Pour répondre à la question, nous commençons par introduire des hypothèses qui permettraient une réponse très simple s'il n'y avait pas le terme de couplage $h_x(x,y)x$.

H1 : Il existe une fonction de Lyapunov V_x sur $\mathbb{R}^{n_x}$ telle que la fonction :

$$W_x(x) \;=\; -L_f V_x(x) \tag{1.23}$$

est définie positive.

H2 : Il existe une fonction de Lyapunov U_y sur $\mathbb{R}^{n_y}$ telle que la fonction :

$$W_y(y) \;=\; -L_{h_y} U_y(y)$$

est à valeurs positives ou nulles.

Pour traiter le terme de couplage, nous supposons l'existence d'une fonction $\Psi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \to \mathbb{R}^{n_y}$ de classe C^1 satisfaisant :

$\mathcal{P}1$: $$\Psi(0,y) \;=\; y \;.$$

$\mathcal{P}2$: Pour tout réel positif c, l'ensemble $\{y \,:\, \exists x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| \leq c\,,\ |\Psi(x,y)| \leq c\}$ est borné.

$\mathcal{P}3$: La dynamique de la nouvelle "coordonnée"[5] Ψ ne dépend pas de x et satisfait :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,y)\, f(x) \;+\; \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y)\, (h_y(y) + h_x(x,y)x) \;=\; h_y(\Psi(x,y)) \;. \tag{1.24}$$

Proposition 4 ([19]) *Avec les hypothèses H1 et H2 et l'existence d'une fonction Ψ satisfaisant les propriétés $\mathcal{P}1$ à $\mathcal{P}3$, la fonction V_y définie par :*

$$V_y(x,y) \;=\; V_x(x) \;+\; U_y(\Psi(x,y))$$

est une fonction de Lyapunov sur $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y}$ continûment assignable au système (1.21). De plus, si le système :

$$\dot{y} \;=\; h_y(y) \tag{1.25}$$

[5] L'emploi du mot coordonnée est abusif car nous n'imposons pas d'avoir une bijection entre (x,y) et (x,Ψ).

est état-zéro détectable[6] *sur* $\mathbb{R}^{n_y}$ *avec la fonction*

$$y \ \mapsto \ \left(W_y(y) \, , \ \frac{\partial U_y}{\partial y}(y) \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0,y)g(0,y,0) + h_u(0,y,0)\right]\right) \ ,$$

alors, pour tout u_b *dans* $]0,+\infty]$*, il existe un bouclage continu, borné en norme par* u_b *et rendant l'origine de (1.21) globalement asymptotiquement stable.*

Preuve : Voir le chapitre 9.4 ou [19].

Pour qu'un tel résultat puisse servir dans les applications, nous devons répondre aux trois questions suivantes :

1. Sous quelles conditions la fonction Ψ existe t'elle ?
2. Est-il possible de trouver une expression d'une solution Ψ de l'équation aux dérivées partielles (1.24) ?
3. Est-il possible de trouver un bouclage en utilisant seulement une approximation de Ψ ?

Avant de répondre à ces questions, observons que [(Jankovic, Sepulchre et Kokotović)] ont proposé de procéder, non pas avec un changement de "coordonnée" comme ci-dessus, mais avec une fonction de Lyapunov du type :

$$V_y(x,y) \ = \ V_x(x) \ + \ V_y(y) \ + \ S(x,y) \tag{1.26}$$

où le terme croisé S est solution de :

$$\frac{\partial U_y}{\partial y}(y)\, h_x(x,y)x \ + \ \frac{\partial S}{\partial x}(x,y)f(x) \ + \ \frac{\partial S}{\partial y}(y)\, [h_y(y) \ + \ h_x(x,y)x] \ = \ 0 \ .$$

Les conditions suffisantes énoncées par [(Jankovic, Sepulchre et Kokotović)] garantissant l'existence d'une solution à cette équation aux dérivées partielles donnant lieu à une fonction V_y qui est une fonction de Lyapunov sur $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y}$ sont moins restrictives que celles que nous verrons pour Ψ ci-dessous. Mais par contre nous n'avons pas connaissance d'applications pratiques de cette autre méthode.

1.4.1 Existence de Ψ

Pour trouver une condition suffisante donnant l'existence de Ψ, commençons par observer que, si une fonction Ψ satisfait (1.24), alors elle satisfait :

$$\dot{\overbrace{\Psi(x,y)}} \ = \ h_y(\Psi(x,y)) \ . \tag{1.27}$$

Donc, en notant $Z(z,t)$ les solutions de

$$\dot{z} \ = \ h_y(z) \ ,$$

nous avons, pour toute solution $(X(x,t),Y(x,y,t))$ de (1.21) avec u nul et pour tout t dans son intervalle maximal de définition $]\sigma_-(x,y),\sigma_+(x,y)[$,

$$\Psi(X(x,t),Y(x,y,t)) \ = \ Z(\Psi(x,y),t) \ .$$

Dans le cas où la fonction h_y est de classe C^1, la fonction Z satisfait :

$$Z(Z(z,t),-t) \ = \ z \ .$$

Ceci implique :

$$\Psi(x,y) \ = \ Z(\Psi(X(x,t),Y(x,y,t)),-t) \ . \qquad \forall t \in]\sigma_-(x,y),\sigma_+(x,y)[\ .$$

Mais, puisque l'hypothèse H1 implique :

$$\lim_{t\to+\infty} X(x,t) \ = \ 0 \ ,$$

si tout se passe bien lorsque nous passons à la limite, avec $\mathcal{P}1$, une expression pour Ψ devrait être :

$$\Psi(x,y) \ = \ \lim_{t\to+\infty} Z(Y(x,y,t),-t) \ .$$

[6] Soit $\mathcal{N}$ un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et $h:\mathcal{N}\to\mathbb{R}^m$ une fonction continue nulle à l'origine. Le système $\dot{x}=f(x)$ est dit état-zéro détectable sur $\mathcal{N}$ avec la fonction h si toute solution $X(x,t)$ de $\dot{x}=f(x)$, $h(x) \ = \ 0$ définie et à valeurs dans $\mathcal{N}$ sur $[0,+\infty[$ converge vers l'origine lorsque t tend vers $+\infty$.

Dans le cas où la fonction h_y est linéaire :

$$h_y(y) \;=\; H\,y$$

cette expression est :

$$\Psi(x,y) \;=\; y \;+\; \int_0^\infty \exp(-Hs)\, h_x(X(x,s),Y(x,y,s))\, X(x,s)\, ds \;. \tag{1.28}$$

Nous avons :

Proposition 5 ([19]) *Supposons que la fonction h_x est de classe C^1, que les hypothèses H1 et H2 sont satisfaites et que la fonction h_y est linéaire. Si*

1. *Il existe une fonction continue $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante et satisfaisant :*

$$\left|\frac{\partial U_y}{\partial y}(y)\, h_x(x,y)\right| \;\leq\; \gamma(|x|)\,(1+U_y(y)) \qquad \forall (x,y) \;. \tag{1.29}$$

2. $$\max\left\{\text{Ré}\left(\textit{valeur propre}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0)\right)\right)\right\} \;<\; \min\left\{\text{Ré}\left(\textit{valeur propre}\,(H)\right)\right\} \;, \tag{1.30}$$

alors l'expression (1.28) définit de façon licite une fonction de classe C^1 satisfaisant les propriétés $\mathcal{P}1$ et $\mathcal{P}3$. De plus, si nous avons :

$$W_y(y) \;=\; -L_{h_y} U_y(y) \;=\; 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{n_y} \;, \tag{1.31}$$

alors la propriété $\mathcal{P}2$ est aussi satisfaite.

Preuve : Voir le chapitre 9.5 ou [19].

La condition (1.31) n'est qu'une des conditions suffisantes connues pour obtenir la propriété $\mathcal{P}2$. Par exemple, nous voyons directement de l'expression (1.28) qu'une autre condition suffisante est que la fonction $y \mapsto h_x(x,y)$ est bornée pour tout x de $\mathbb{R}^{n_x}$.

1.4.2 Expression de Ψ

En pratique il est vain d'aborder le problème de synthèse de bouclage en tentant de résoudre l'équation aux dérivées partielles (1.24). Il est préférable de travailler avec son interprétation (1.27) et d'exploiter les connaissances sur le système à commander pour trouver une expression de la fonction Ψ.

En abordant le problème de cette façon, nous avons pu résoudre le problème de la stabilisation de la position haute d'une barre d'un pendule liée par une rotule à un bras robotisé. Voir [13] et
`http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Multimedia/XavierX96_1.avi`

Aussi il est possible de simplifier l'équation (1.24) selon la technique dite "modulo L_gV_x". Pour la présenter, nous nous limitons au cas où le système (1.21) est sous la forme plus simple :

$$\dot{y} \;=\; h(x) \quad , \qquad \dot{x} \;=\; f(x) \;+\; g(x)\,u \;.$$

Prenons Ψ sous la forme

$$\Psi(x,y) \;=\; y \;-\; \mathcal{M}(x)$$

et, avec H1, posons :

$$V_y(x,y) \;=\; V_x(x) \;+\; \frac{1}{2}\,(y-\mathcal{M}(x))^2 \;.$$

Nous obtenons :

$$\dot{\overbrace{V_y(x,y)}} \;=\; L_fV_x(x) \;+\; (y-\mathcal{M}(x))^T\,(h(x)-L_f\mathcal{M}(x)) \;+\; \left[L_gV_x(x) - (y-\mathcal{M}(x))^T\, L_g\mathcal{M}(x)\right] u \;.$$

Nous voyons ainsi que, si $\mathcal{M}$ satisfait :

$$h(x) - L_f\mathcal{M}(x) \;=\; k(x)L_gV_x(x)^T \quad , \qquad L_g\mathcal{M}(x) \;=\; 0 \;,$$

alors nous avons :

$$\dot{\overbrace{V_y(x,y)}} \;=\; L_fV_x(x) \;+\; L_gV_x(x)\left[k(x)^T\,(y-\mathcal{M}(x)) + u\right] \;.$$

Ceci établit que V_y est une fonction de Lyapunov continûment assignable.

Cette technique est développée dans [11]. Parmi les applications dans lesquelles elle a été utilisée, citons celle du transfert d'orbite pour un satellite ne pouvant produire qu'une faible poussée. Voir [9].

1.4.3 Approximation de Ψ

Du fait de la marge de stabilisation donnée par la positivité définie de la fonction W_x, il est possible de se contenter d'une approximation Ψ_a de Ψ.

Proposition 6 ([19]) *Supposons les hypothèses H1 et H2 satisfaites et l'existence d'une fonction Ψ_a de classe C^1 satisfaisant :*

$\mathcal{P}1_a$: $$\Psi_a(0,y) \;=\; y \;.$$

$\mathcal{P}2_a$: *Pour tout réel positif c, l'ensemble* $\{y \;:\; \exists x \in \mathbb{R}^n \;:\; |x| \leq c\,,\, |\Psi_a(x,y)| \leq c\}$ *est borné.*

$\mathcal{P}3_a$: *Il existe une fonction continue $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, croissante et satisfaisant :*

$$\left|\frac{\partial U_y}{\partial y}(\Psi_a(x,y))\right| \left|\frac{\partial \Psi_a}{\partial x}(x,y)\, f(x) \;+\; \frac{\partial \Psi_a}{\partial y}(x,y)\,(h_y(y) + h_x(x,y)x) \;-\; h_y(\Psi_a(x,y))\right|$$
$$\leq\; |x|^2\,\gamma(|x|)\,(1 + U_y(\Psi_a(x,y))) \qquad \forall (x,y)\;.$$

Sous cette condition, si la matrice $\frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2}(0)$ est définie positive, il existe une fonction $\ell : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ radialement non bornée, de classe C^1 et de dérivée définie positive telle que la fonction V_y définie par :

$$V_y(x,y) \;=\; \ell(V_x(x)) \;+\; \log(1 + U_y(\Psi_a(x,y))) \tag{1.32}$$

est une fonction de Lyapunov sur $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y}$ continûment assignable au système (1.21). De plus, si le système (1.25) est état-zéro détectable sur $\mathbb{R}^{n_y}$ avec la fonction

$$y \;\mapsto\; \left(W_y(y)\,,\; \frac{\partial U_y}{\partial y}(y)\left[\frac{\partial \Psi_a}{\partial x}(0,y)g(0,y,0) + h_u(0,y,0)\right]\right)\;,$$

alors, pour tout u_b dans $]0,+\infty]$, il existe un bouclage continu, borné en norme par u_b et rendant l'origine de (1.21) globalement asymptotiquement stable.

Preuve : Voir le chapitre 9.6 ou [19].

De façon approximative la propriété $\mathcal{P}3_a$ nous dit que, si la croissance en y est limitée, il suffit de résoudre l'équation (1.24) seulement au voisinage de l'origine en x et ce jusqu'à l'ordre 1.

Commentaire bibliographique

La technique d'ajout d'intégrateur est appelée “forwarding” en anglais. Elle est très intéressante pour les applications car elle permet d'exploiter des informations sur la dynamique du système comme son caractère conservatif ou dissipatif, exprimé par l'existence d'une fonction énergie. Aussi elle a l'intérêt de fournir “naturellement” des commandes bornées. Pourtant elle a reçu en fin de compte peu d'attention du fait de la difficulté de trouver des expressions de la fonction Ψ ou des performances moins satisfaisantes obtenues avec des bouclages n'utilisant qu'un approximation Ψ_a.

Nous avons mentionné l'autre approche de [(Jankovic, Sepulchre et Kokotović)] qui passe par l'introduction du terme croisé S dans (1.26). Une troisième approche totalement différente a été proposée par [(Teel [a])] et [(Teel [b])]. Elle ne fait pas intervenir de fonctions de Lyapunov mais repose sur une formulation du Théorème du petit gain dite “avec conditions”. Cette méthode, techniquement plus simple, a reçu bien plus d'attention que celle présentée dans ce chapitre pourtant les performances obtenues sont du même type que celles venant d'un bouclage fondé sur une approximation Ψ_a.

Chapitre 2

Stabilité entrée-état et Atténuation de perturbations

Soient $\mathcal{U}$ un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^l$ des fonctions continues vérifiant :

$$f(0,0,0) \ = \ 0 \quad , \qquad h(0,0) \ = \ 0 \ .$$

Nous considérons le système :

$$\dot{x} \ = \ f(x,u,d(t)) \quad , \qquad y \ = \ h(x,d(t)) \ , \tag{2.1}$$

où maintenant les variables exogènes (u, d) sont de deux sortes : la commande u, comme pour la stabilisation, et ce qui est considéré comme des perturbations, représenté par d, fonction a priori dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$.

La question que nous abordons ici est d'étudier la possibilité de définir un bouclage pour u tel que l'évaluation le long des solutions de la fonction h est la moins dépendante possible des perturbations.

Pour poser correctement cette question, nous devons tout d'abord définir une notion de dépendance.

2.1 Stabilité entrée-état

Définition 4 ([(Sontag [c])]) *Le système :*

$$\dot{x} \ = \ \mathfrak{f}(x,d) \tag{2.2}$$

est dit stable entrée-état si il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une fonction γ de classe $\mathcal{K}$ telles que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$ et toute fonction d dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$, toutes les solutions $X(x,t;d)$ de (2.2) sont définies sur $[0, +\infty[$ et satisfont[1] :

$$|X(x,t;d)| \ \leq \ \max \left\{ \beta(|x|,t), \ \sup_{s\in[0,t]} \gamma(|d(s)|) \right\} \qquad \forall t \geq 0 \ . \tag{2.3}$$

Une fonction γ satisfaisant une telle inégalité est appelée gain du système.

L'inégalité (2.3) signifie que :

- soit la condition initiale x est grande en norme par rapport à la norme L^∞ des variables exogènes d et alors, la solution commence par se comporter comme si cette variable était absente pour converger vers un compact dont la taille est liée à cette norme L^∞.
- soit la condition initiale est petite en norme, alors la solution reste dans ce compact.

Définition 5 *Nous disons que le problème d'atténuation de perturbation sur la sortie h est soluble si il existe un entier p, deux fonctions continues $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ et $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathcal{U}$, vérifiant :*

$$\phi(t,0,0) \ = \ 0 \qquad \forall t \ ,$$

[1] sup est ici au sens de la nome L^∞.

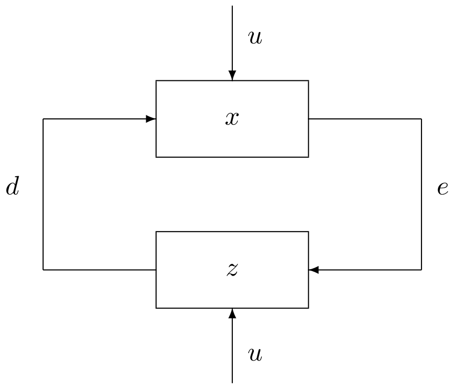

Figure 2.1: Système interconnecté (2.5)

une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une fonction γ de classe $\mathcal{K}^\infty$ tels que, pour toute toute fonction d dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^p)$, toutes les solutions $(X((x,\varkappa),t;d),\mathcal{X}((x,\varkappa),t;d)$ dans $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ du système en boucle fermée (2.1), (1.2) sont définies maximalement à droite sur $[0,+\infty[$, bornées et satisfont :

$$|h(X((x,\varkappa),t;d),d(t))| \tag{2.4}$$

$$\leq \max\left\{\beta\left(\left|(X((x,\varkappa),s;d),\mathcal{X}((x,\varkappa),s;d))\right|,t-s\right)\ ,\ \sup_{r\in[s,t]}\gamma(|d(r)|)\right\} \qquad \text{ppt } t\geq s\geq 0\ .$$

L'expression “atténuation de perturbation” prend tout son sens lorsque nous cherchons à avoir γ le plus petit possible. Une motivation pour étudier ce problème vient de la considération du système, dit interconnecté, de la forme[2] (voir la figure 2.1) :

$$\dot{z}\ =\ g(z,e,u(t))\ ,\ d\ =\ k(z,e,u(t))\quad ,\qquad \dot{x}\ =\ f(x,d,u(t))\ ,\ e\ =\ h(x,u(t))\ , \tag{2.5}$$

où maintenant u représente les variables exogènes à cette interconnexion. Les fonctions h et k dans (2.5) sont dites fonctions d'interconnexion et sont supposées être continues et satisfaire :

$$h(0,0)\ =\ 0\quad ,\qquad k(0,0)\ =\ 0\ .$$

Nous nous posons alors la question de savoir si nous avons la stabilité entrée-état pour ce système augmenté.

Proposition 7 ([20]) *Supposons que les systèmes donnés en (2.5) sont stables entrée-état et donc qu'il existe aussi des fonctions β_d et β_e de classe $\mathcal{KL}$ et des fonctions γ_{de}, γ_{du}, γ_{ed} et γ_{eu} de classe $\mathcal{K}$ telles que, pour chacune de leur solution, nous avons, pour presque tout t plus grand que s,*

$$|k(Z(z,t;(e,u)),e(t),u(t))|\ \leq\ \max\left\{\beta_d(|Z(z,s;(e,u))|,t-s),\ \sup_{\tau\in[s,t]}\gamma_{de}(|e(\tau)|),\ \sup_{\tau\in[s,t]}\gamma_{du}(|u(\tau)|)\right\}\ , \tag{2.6}$$

$$|h(X(x,t;(d,u)),u(t))|\ \leq\ \max\left\{\beta_e(|X(x,s;(d,u))|,t-s),\ \sup_{\tau\in[0,t]}\gamma_{ed}(|d(\tau)|),\ \sup_{\tau\in[s,t]}\gamma_{eu}(|u(\tau)|)\right\}\ . \tag{2.7}$$

Dans ces conditions, si la condition, dite de petit gain :

$$\gamma_{de}\circ\gamma_{ed}(s)\ <\ s\qquad \forall s>0 \tag{2.8}$$

est satisfaite, le système (2.5) est stable entrée-état.

[2] Nous pourrions autoriser h à dépendre aussi de d, mais dans ce cas, nous obtenons ce qui est appelé une boucle algébrique. En effet ceci conduit à une définition implicite de e et de d sous la forme $e=h(x,k(z,e,u),u)$ et $d=k(z,h(x,d,u),u)$. Écrire que h ne dépend pas de d revient à écrire que la première équation est résolue en e.

Preuve : Voir le chapitre 10.1 ou [20].

Ce résultat est une des formulations possible de ce qui est appelée Théorème de petit gain. Une autre formulation qui s'avère plus utile en synthèse de commande est la suivante.

Proposition 8 ([23]) *Supposons que :*

1. *le système d'état z dans (2.5) est stable entrée-état et que sa sortie $d = k(z, u, e(t))$ satisfait (2.6).*
2. *le système d'état x dans (2.5) est stable entrée-état et plus précisément il existe une fonction de Lyapunov V_x sur $\mathbb{R}^n V_x$, des fonctions γ_{xd} et γ_{xu} de classe $\mathcal{K}$ et un réel strictement positif λ tels que nous avons :*

$$\dot{\widehat{V(x)}} \;\leq\; -\lambda\, V_x(x) \;+\; \gamma_{xd}(|d|) \;+\; \gamma_{xu}(|u|) \qquad \forall (x, d, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \;. \tag{2.9}$$

Dans ces conditions, si il existe un réel strictement positif ε et une fonction μ de classe $\mathcal{K}$ tels que nous avons :

$$\gamma_{xd} \circ \gamma_{de}(|h(x, u)|) \;\leq\; (1 - \varepsilon)\, \lambda\, V_x(x) \;+\; \mu(|u|) \qquad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \;, \tag{2.10}$$

alors le système (2.5) est stable entrée-état.

Preuve : Voir le chapitre 10.2 ou [23].

La condition (2.10) est une autre condition du petit gain. Elle exprime le fait que la composition :
– d'un gain, résultant d'une expression de la stabilité entrée-état en terme de fonction de Lyapunov pour le sous-système en x,
– avec un gain, résultant d'une expression de la stabilité entrée-état en terme de fonctions de classe $\mathcal{KL}$ et $\mathcal{K}$,
est suffisamment petite.

Commentaire bibliographique

La notion de stabilité entrée-état a été introduite par [(Sontag [c])] et étudiée très en profondeur par exemple par [(Sontag [f])]. Elle repose sur la norme L^∞. Des variantes utilisant d'autres normes ont été proposées. Voir par exemple [(Sontag [e]), (Sontag [f])].

La condition du petit gain comme condition suffisante pour impliquer la stabilité d'une interconnexion a une très longue histoire en particulier dans le cas où les gains sont linéaires. Pour le cas où les gains sont non linéaires, elle prend son origine dans le travail de [(Mareels et Hill)]. Des versions différentes de celles présentées ici ont été proposées par exemple par [(Teel [b]), (Jiang, Mareels et Wang), (Dashkovskiy, Rüffer et Wirth)].

2.2 Atténuation de perturbations

Considérons le système

$$\dot{x} \;=\; a(x) \;+\; b(x)\, u \;+\; p(x, d) \;, \tag{2.11}$$

où les fonctions $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{nm}$ et $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ sont continues, d est dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$ et nous avons :

$$p(x, 0) \;=\; 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \;.$$

Dans [14], nous avons mis en évidence que ce qui peut être obtenu sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : L_b V(x) = 0\}$ peut être étendu à tout l'espace. En termes clairs ceci signifie que les hypothèses suffisantes pour pouvoir contrôler le gain peuvent ne porter que sur cet ensemble. Précisément, nous avons :

Proposition 9 ([14]) *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov V sur $\mathbb{R}^n$ continûment strictement assignable au système :*

$$\dot{x} = a(x) \;+\; b(x)\, u \tag{2.12}$$

et telle qu'il existe un fonction $\varkappa$ de classe $\mathcal{K}^\infty$ telle que la fonction $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$A(x) \;=\; \max_{d:\, \varkappa(|d|) \leq (|x|)} \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, (a(x) + p(x, d))$$

satisfait :

$$A(x) \;<\; 0 \quad \forall x \neq 0, :\; L_bV(x) = 0 \quad , \qquad \limsup_{\substack{|x|\to 0 \\ L_bV(x)\neq 0}} \frac{A(x)}{|L_bV(x)|} \;\leq\; 0 \;.$$

Sous cette condition, il existe un bouclage continu ϕ qui rend le système (2.11) stable entrée-état avec le gain :

$$\gamma \;=\; \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \chi^{-1} \;.$$

où α_1 et α_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{K}^\infty$ satisfaisant :

$$\alpha_1(|x|) \;\leq\; V(x) \;\leq\; \alpha_2(|x|) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \;.$$

Preuve : Voir le chapitre 10.3 ou [14].

Avec ce résultat nous devinons qu'il est possible d'assigner n'importe quel gain dans le cas où $\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, p(x,d)$ est nul lorsque $L_bV(x)$ est nul. Une telle condition est en particulier satisfaite lorsque nous avons la factorisation :

$$p(x,d) \;=\; b(x)\, q(x,d) \;.$$

Cette condition est connue en anglais sous le nom de "matching condition" .

Proposition 10 ([18]) *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov V sur $\mathbb{R}^n$ continûment strictement assignable au système (2.12), une fonction continue $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et d'une fonction $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et nulle en zéro telles que la fonction p satisfait :*

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, p(x,d)\right| \;\leq\; |L_bV(x)|\, \sigma(V(x))\, \rho(|d|) \qquad \forall (x,d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \;. \tag{2.13}$$

Sous cette condition, pour toutes fonctions γ_{ud} et γ_{xd} de classe $\mathcal{K}^\infty$, il existe une fonction continue $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et des fonctions β_u et β_x de classe $\mathcal{KL}$ telles que, pour chaque fonction d dans $L^\infty_{loc}([0,\infty[,\mathbb{R}^p)$ et chaque point x de $\mathbb{R}^n$, toutes les solutions $X(x,t;d)$ du système en boucle fermée :

$$\dot{x} \;=\; a(x) \;+\; b(x)\, \phi(x) \;+\; p(x,d)$$

sont définies sur $[0,\infty[$ et satisfont :

$$|X(x,t;d)| \;\leq\; \max\left\{\beta_x(|x|,t)\,,\, \gamma_{xd}\left(\sup_{s\in[0,t]} |d(s)|\right)\right\} \qquad \forall t \geq 0 \;. \tag{2.14}$$

De plus, lorsque σ ne prend ses valeurs que dans $[0,\frac{1}{m}]$, nous avons aussi :

$$|\phi(X(x,t;d))| \;\leq\; \max\left\{\beta_u(|x|,t)\,,\, (\mathtt{Id}+\gamma_{ud})\left(\sup_{s\in[0,t]} \rho(|d(s)|)\right)\right\} \qquad \forall t \geq 0 \;.$$

Preuve : Voir le chapitre 10.4 ou [18].

Le gain γ_{xd} étant arbitraire, l'inégalité (2.14) montre que l'action de d sur l'état peut être arbitrairement atténuée comme nous nous y attendions. De plus, lorsque σ ne prend ses valeurs que dans $[0,\frac{1}{m}]$, cette atténuation peut être réalisée avec un bouclage dont la norme L^∞ de son l'évaluation le long des solutions est asymptotiquement aussi proche que nous voulons de celle de $\rho(|d|)$.

Avec la technique d'ajout de dérivateur, nous pouvons étendre ce résultat à certains cas où la perturbation n'agit pas dans l'image de la commande. Pour étudier ce point nous supposons que le système est sous la forme :

$$\dot{x} \;=\; a(x) \;+\; b(x)\,(y + c(x)d_x) \quad , \qquad \dot{y} \;=\; u \;+\; f(x,y) \;+\; g(x,y)d_y \;, \tag{2.15}$$

avec x dans $\mathbb{R}^n$, y et u dans $\mathbb{R}^l$, d_x et d_y dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les fonctions a, b, c, f et g de classe C^q et satisfaisant :

$$a(0) \;=\; 0 \quad , \qquad f(0,0) \;=\; 0 \;.$$

Nous voulons obtenir un bouclage tel que le système bouclé est stable entrée-état avec un gain prescrit entre (d_x, d_y) et x.

Proposition 11 ([23]) *Supposons donner ϕ_x, un bouclage de classe C^{q+1}, et V_x, une fonction de Lyapunov sur $\mathbb{R}^{n_x}$ de classe C^{q+2}, satisfaisant :*

$$L_a V_x(x) \;+\; L_b V_x(x)\,\phi_x(x) \;\leq\; -\lambda\, V_x(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \;, \tag{2.16}$$

où λ est un réel strictement positif. Sous cette condition, il existe un bouclage ϕ de classe C^q tel que, avec $u = \phi(x,y)$, le système (2.15) est stable entrée-état avec (d_x, d_y) comme entrée. De plus, pour toute fonction continue γ_d telle qu'il existe des réels strictement positifs s_0 et μ vérifiant :

$$\gamma_d \circ \alpha_1^{-1}(s^2) \;\leq\; \mu\, s \qquad \forall s \in [0, s_0] \;, \tag{2.17}$$

où α_1 est une fonction de classe $\mathcal{K}^\infty$ vérifiant :

$$\alpha_1(|x|) \;\leq\; V_x(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \;, \tag{2.18}$$

le bouclage ϕ peut être choisi pour qu'il existe un réel ε strictement positif et une fonction de Lyapunov V sur $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}$ de classe C^{q+1} satisfaisant :

$$\overbrace{V(x,y)}^{\cdot} \;\leq\; -\lambda\, V(x,y) \;+\; |(d_x, d_y)|^2 \qquad \forall (x, y, d_x, d_y) \;. \tag{2.19}$$

$$\gamma_d(|x|)^2 \;\leq\; (1-\varepsilon)\,\lambda\, V(x,y) \qquad \forall (x,y) \;, \tag{2.20}$$

Preuve : Voir le chapitre 10.5 ou [23].

Remarque 2.21

1. Les inégalités (2.19) et (2.20) sont exactement celles dont nous avons besoin pour pouvoir utiliser le résultat énoncé dans la Proposition 8. En particulier, le fait que, pour toute fonction γ_d, nous pouvons satisfaire l'inégalité (2.20) démontre que nous avons bien là un résultat sur la possibilité d'assigner une fonction de gain bien que la perturbation n'agit pas dans l'image de la commande. Il faut cependant noter que cette fonction γ_d est contrainte au voisinage de zéro par la condition (2.17). Si V_x est minorée sur un voisinage de l'origine par une forme quadratique , cette condition impose que γ_d est linéairement dominée au voisinage de 0.

2. Puisque les conclusions de la Proposition 11 sont identiques aux hypothèses mais pour le système étendu, nous pouvons appliquer ce résultat itérativement en progressant dans une chaîne de dérivateurs mais en perdant, à chaque fois, un degré de régularité. En particulier, la Proposition 11 peut être utilisée itérativement pour montrer que, pour le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& a(x) \;+\; b(x)\,(y_1 + c(x) d_0) \;, \\ \dot{y}_1 &=& y_2 \;+\; f_1(x, y_1) \;+\; g_1(x, y_1)\, d_1 \;, \\ & \vdots & \\ \dot{y}_m &=& u \;+\; f_m(x, y_1, \ldots, y_m) \;+\; g_m(x, y_1, \ldots, y_m)\, d_m \;, \end{array}\right.$$

étant donnée un triplet (ϕ_x, V_x, γ_d) satisfaisant (2.16) et (2.17), il existe une fonction ϕ continue, une fonction de Lyapunov V sur $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^m$ et un réel λ strictement positif tels que, avec :

$$u \;=\; \phi(x, y_1, \ldots, y_m) \;,$$

nous avons :

$$\overbrace{V(x, y_1, \ldots, y_m)}^{\cdot} \;\leq\; -\lambda\, V(x, y_1, \ldots, y_m) \;+\; \sum_{i=0}^{m} |d_i|^2 \qquad \forall (x, y_1, \ldots, y_m, d_0, \ldots, d_m) \;,$$

$$\gamma_d(|x|)^2 \;\leq\; (1-\varepsilon)\,\lambda\, V(x, y_1, \ldots, y_m) \qquad \forall (x, y_1, \ldots, y_m) \;.$$

Ce résultat signifie que nous pouvons complètement contrôler le gain entre les perturbations et les composantes de l'état qui arrivent après les perturbations dans la chaîne de dérivation en partant de la commande.

Commentaire bibliographique

Alors que la stabilité entrée-état et ses nombreuses variantes et les Théorèmes du petit gain ont reçu beaucoup d'attention, les résultats sur l'assignation de gain en tant que tels sont moins nombreux. En fait, ils sont malheureusement souvent cachés à l'intérieur des constructions des bouclages et de ce fait pas formulés explicitement.

La possibilité de rendre un système perturbé stable entrée-état par bouclage a été étudié par exemple dans [(Sontag et Wang [a])] et [(Freeman et Kokotovic [a])] mais sous des hypothèses telles qu'il est impossible de contrôler le gain obtenu.

Le lecteur pourra se reporter à [(Isidori [a]), Paragraphe 9.5] pour trouver des résultats sur le problème d'atténuation de perturbation lorsque l'effet de la perturbation est quantifié, non pas par la norme L^∞, mais par la norme L^2.

Chapitre 3

Bouclage de sortie

3.1 Problème de stabilisation par bouclage de sortie

Soient $\mathcal{O}$ un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{U}$ un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^m$. Soient $f : \mathcal{O} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ et $h : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^l$ des fonctions différentiables un nombre suffisant de fois et vérifiant :

$$f(0,0) \;=\; 0 \quad , \qquad h(0) \;=\; 0 \; .$$

Nous considérons le système :

$$\dot{x} \;=\; f(x,u) \quad , \qquad y \;=\; h(x) \; , \tag{3.1}$$

où u est la commande et y est le vecteur représentant les informations sur le système à notre disposition à chaque instant.

Définition 6 *Nous disons que l'origine est asymptotiquement stabilisable par un bouclage de sortie si il existe un entier p, un voisinage $\mathcal{V}$ de l'origine dans $\mathbb{R}^p$ et deux fonctions continues $\varphi : \mathbb{R} \times h(\mathcal{O}) \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}^p$ et $\phi : \mathbb{R} \times h(\mathcal{O}) \times \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, vérifiant :*

$$\phi(t,0,0) \;=\; 0 \qquad \forall t \; ,$$

tels que l'origine de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est un équilibre (uniformément) asymptotiquement stable du système (3.1) en boucle fermée avec :

$$\dot{\chi} \;=\; \varphi(t, h(x), \chi) \quad , \qquad u \;=\; \phi(t, h(x), \chi) \; . \tag{3.2}$$

Ce système (3.2) qui génère la commande u à partir de l'information $h(x)$ sur le système à commander est appelé bouclage de sortie.

Avec Vincent Andrieu nous avons proposé dans [1] une approche permettant d'introduire, classifier et mettre en relation les très nombreuses réponses proposées dans la littérature à cette question de stabilisation par bouclage de sortie. Du fait de la limitation du nombre de page de ce mémoire, je ne peux reprendre tous les éléments de cette approche. Je me contente ici de noter que nous avons identifié deux façons d'aborder le problème de synthèse de bouclage de sortie.

La méthode directe consiste à résoudre le problème de stabilisation directement sur le système. Mais du fait que l'information sur l'état, nécessaire pour la stabilisation, n'est qu'approximativement connue, nous devons prendre en compte une perturbation sur la commande. Cette information sur l'état est typiquement fournie par un observateur qui est un système dynamique utilisant comme entrée les informations connues du système, en l'occurrence la paire (u, y), et fournissant comme sortie une estimation $\hat{x}$ de l'état x. C'est cette approche qui sous-tend ce qui est présenté dans la Proposition 12 qui suit. Elle est en fait très difficile à suivre et n'a reçu que peu d'attention.

La méthode indirecte est de loin la plus développée et implique elle aussi le plus souvent l'utilisation d'un observateur. Elle consiste à résoudre le problème de stabilisation non pas pour le système mais pour cet observateur, comptant sur les propriétés de convergence de l'estimation $\hat{x}$ vers la vraie valeur x pour que la propriété de stabilisation soit transférée au système lui-même. Dans ce cas, la perturbation est due au terme de correction introduit dans l'observateur justement pour obtenir cette convergence. C'est cette approche qui sous-tend ce qui est présenté dans les Propositions 13, 14 et 15.

3.2 "Principe" de séparation

Une façon qui semble naturelle pour répondre au problème de stabilisation par bouclage de sortie est de construire d'une part un bouclage d'état ϕ et d'autre part d'estimer l'état x du système par une grandeur $\hat{x}$ de façon à utiliser la commande

$$u = \phi(\hat{x}) .$$

Cette démarche est connue sous le nom de "Principe" de séparation. Dans le cas où la dynamique du système est linéaire en la paire (état,commande) et la fonction de sortie est linéaire, ce principe est totalement justifié et peut toujours être suivi si le problème a une solution.

Définition 7 ([(Gauthier et Bornard)]) *Le système (3.1) est dit uniformément (par rapport à la commande) observable si il existe deux entiers n_y et n_u et une fonction Φ localement Lipschitzienne telle que, pour chaque solution, dénotée $x(t)$, $u_i(t)$ pour alléger les notations, de*

$$\dot{x} = f(x, u_0) \quad , \qquad \dot{u}_0 = u_1 \quad , \qquad \dots \quad , \qquad \dot{u}_{n_u} = v \ , \tag{3.3}$$

nous avons, pour tout t dans le domaine de définition de cette solution,

$$x(t) = \Phi\left(y(t), \dots, y^{(n_y)}(t), u_0(t), \dots, u_{n_u}(t)\right) \tag{3.4}$$

où $y^{(i)}(t)$ est la ième dérivée par rapport au temps de $h(x(t))$.

Proposition 12 ([21]) *Si il existe un bouclage (d'état) $\phi_e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^{\max\{nu+1, n_y\}}$ qui stabilise globalement asymptotiquement l'origine du système (3.1) et si ce système est uniformément observable, alors, pour tout compact C_x, il existe des fonctions continues φ et ϕ et un compact C_χ tel que l'origine est un équilibre asymptotiquement stable du système (3.1), (3.2) avec un bassin d'attraction contenant $C_x \times C_\chi$.*

Preuve : La démonstration de cette Proposition est donnée dans [21]. Elle repose sur la technique d'ajout de dérivateur pour obtenir un bouclage d'état pour le système (3.3) et sur l'utilisation d'un observateur à grand gain pour estimer l'état x partir de (3.4) et du système auxiliaire :

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad , \qquad \dots \quad , \qquad \dot{y}_{n_y} = \Psi_{n_y}(x, u_0, \dots, u_{n_y}) \quad , \qquad y = y_1 \ .$$

Cet énoncé, qui a été étendu par [(Atassi and Khalil), (Shim and Teel)], est très satisfaisant du fait qu'il démontre la validité du "Principe" de séparation sous des hypothèses raisonnables. Par contre le résultat n'est qu'une stabilisation dite semi-globale du fait que le domaine d'attraction n'est pas l'espace entier mais peut contenir n'importe quel compact donné, le bouclage dépendant de celui-ci. Ceci ne vient pas d'une insuffisance technique mais d'une obstruction. Par exemple le problème de stabilisation par bouclage de sortie peut être résolu semi-globalement pour le système :

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad , \qquad \dot{x}_2 = x_2^3 + u \quad , \qquad y = x_1 \ .$$

Par contre nous avons démontré dans [22] qu'il ne peut pas l'être globalement. Il manque pour cela une propriété que nous avons appelée "observabilité de la non bornitude" qui exprime le fait que, si, le long d'une solution, l'état tend vers l'infini en temps fini, alors il en est de même de la paire entrée-sortie (u, y). Dans l'exemple précédent, cette propriété n'est pas satisfaite car la composante x_2 peut diverger tellement vite le long d'une solution, que son intégrale $y = x_1$ reste bornée. Tous les résultats traitant du cas global ont ainsi une hypothèse impliquant cette propriété. Il est démontré par [(Angeli et Sontag)] que cette propriété est liée à l'existence d'un observateur d'un majorant de la norme de l'état. Dans [7], nous avons montré qu'avec un tel observateur le résultat de la Proposition 12 peut être rendu global.

3.3 Bouclage de sortie pour un système de dynamique inverse stable entrée-état

Supposons qu'il existe des coordonnées $x = (z, \mathcal{x}_1, \dots, \mathcal{x}_p)$ telles que la dynamique du système (3.1) prend la forme particulière[1] :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z} & = & f_z(z, \mathcal{x}_1) , \\ \dot{\mathcal{x}}_1 & = & \mathcal{x}_2 + a_1(\mathcal{x}_1) + g_1(z, \mathcal{x}_1) , \\ & \vdots & \\ \dot{\mathcal{x}}_i & = & \mathcal{x}_{i+1} + a_i(\mathcal{x}_1, \dots, \mathcal{x}_i) + g_i(z, \mathcal{x}_1) , \\ & \vdots & \\ \dot{\mathcal{x}}_p & = & u + a_p(\mathcal{x}_1, \dots, \mathcal{x}_p) + g_p(z, \mathcal{x}_1) , \\ y & = & \mathcal{x}_1 , \end{array}\right. \tag{3.5}$$

où les $\mathcal{x}_i$, u et y sont dans $\mathbb{R}$, z est dans $\mathbb{R}^l$, la fonction $f_z : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ et les fonctions $g_i : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues, les fonctions a_i sont de classe C^{n+1-i} et nous avons :

$$a_i(0, \dots, 0) = 0 \quad , \qquad g_i(0, 0) = 0 .$$

Dans ce système la dynamique des composantes z de l'état est appelée dynamique inverse. C'est la dynamique qui reste lorsque le comportement de la sortie y est imposé.

Proposition 13 ([23]) *Nous supposons que :*

- *le sous-système en z dans (3.5), d'état z, entrée $\mathcal{x}_1$, sortie $g(z, \mathcal{x}_1) = (g_i(z, \mathcal{x}_1))$, est stable entrée-état et, en particulier, il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une fonction γ_d de classe $\mathcal{K}^\infty$ telles que, pour toute fonction $\mathcal{x}_1$ dans $L^\infty_{loc}([0, +\infty))$ et toutes les solutions $Z(z, t; \mathcal{x}_1)$ satisfont :*

$$|g(Z(z, t; \mathcal{x}_1), \mathcal{x}_1(t))| \leq \max\left\{\beta(|Z(z, s; \mathcal{x}_1)|, t - s) , \sup_{\tau \in [s,t]} \gamma_d(|\mathcal{x}_1(\tau)|)\right\} \qquad \text{ppt } s \in [0, t) , \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ ; \tag{3.6}$$

- *il existe des réels strictement positifs s_0 et μ vérifiant :*

$$\gamma_d(s) \leq \mu\, s \qquad \forall s \in [0, s_0] ; \tag{3.7}$$

- *il existe un réel L tel que nous avons :*

$$|a_i(\mathcal{x}_1, \mathcal{x}_2 + \delta_2, \dots, \mathcal{x}_I + \delta_i) - a_i(\mathcal{x}_1, \mathcal{x}_2, \dots, \mathcal{x}_i)| \leq L \sum_{j=2}^{i} |\delta_j| \qquad \forall (\mathcal{x}_1, \dots, \mathcal{x}_i, \delta_2, \dots, \delta_i) . \tag{3.8}$$

Sous ces conditions il existe un bouclage stationnaire dynamique continu de sortie qui stabilise globalement asymptotiquement l'origine.

Preuve : La démonstration de cette Proposition est donnée dans le chapitre 11.1 ou [23]. Elle repose sur l'utilisation d'un observateur à grand gain et une construction du bouclage de sortie tirée directement de la technique d'assignation de gain donnée dans la Proposition 11.

Le résultat énoncé dans cette Proposition a été le point de départ de deux types de développements.

D'une part la propriété d'observabilité de la non bornitude est assurée ici par la condition de Lipschitz (3.8). Elle est encore satisfaite si L dépend de $y = \mathcal{x}_1$. Nous avons exploité cette remarque dans [10]. Cela conduit en particulier à l'utilisation d'un observateur dont le gain r est modifié pour suivre l'évolution de $L(y)$ le long de la solution selon une dynamique du type :

$$\dot{r} = a\, r\, [r - b - L(y)] ,$$

[1] Une caractérisation intrinsèque des systèmes admettant cette forme est donnée dans [(Byrnes et Isidori), Corollary 5.7]. C'est essentiellement la seule forme générale pour laquelle nous connaissons des réponses à la question de stabilisation par bouclage de sortie.

où a et b sont des réels strictement positifs. Cette méthode dite de “dynamic scaling” a été exploitée dans [8] et reprise et améliorée par d'autres auteurs dont en particulier [(Krishnamurthy et Khorrami [a])] et [(Krishnamurthy et Khorrami [b])].

D'autre part il est mis en évidence dans la Proposition 13 que, pour résoudre le problème de stabilisation[2] il est suffisant de travailler avec des majorations de certains termes, ici par exemple les fonctions g_i. Ce point de vue est celui des techniques dites de domination auxquelles de nombreux auteurs ont contribué (Voir par exemple [16, (Jiang, Mareels, Hill et Huang), (Qian and Li), (Li, Qian et Frye), (Polendo et Qian)]). Dans cette voie, [(Khalil et Saberi)] ont montré qu'un bouclage de sortie linéaire construit pour la chaîne d'intégrateurs :

$$\dot{x}_1 \;=\; x_2 \quad , \qquad \dots \quad , \qquad \dot{x}_{p-1} \;=\; x_p \quad , \qquad \dot{x}_p \;=\; u \quad , \qquad y \;=\; x_1 \; ,$$

permet de résoudre, en prenant des gains suffisamment grands, le problème de stabilisation par bouclage de sortie pour tout système dont la dynamique est linéaire en la paire (état,commande), la fonction de sortie est linéaire, le degré relatif est p et la dynamique inverse est stable entrée-état.

Pour écrire une extension de ce résultat au cas non linéaire, nous adoptons aussi la chaîne d'intégrateurs ci-dessus comme modèle simplifié de la dynamique des y_i dans la forme (3.5). Ceci nous conduit à réécrire cette dynamique sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z} &=& f_z(z, x_1, \dots, x_p) \; , \\ \dot{x}_1 &=& x_2 \;+\; g_1(z, x_1, \dots, x_p) \; , \\ &\vdots& \\ \dot{x}_i &=& x_{i+1} \;+\; g_i(z, x_1, \dots, x_p) \; , \\ &\vdots& \\ \dot{x}_p &=& u \;+\; g_p(z, x_1, \dots, x_p) \; , \\ y &=& x_1 \; , \end{array}\right. \tag{3.9}$$

où de nouveau les x_i, u et y sont dans $\mathbb{R}$, z est dans $\mathbb{R}^l$, la fonction $f_z : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ et les fonctions $g_i : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues et nous avons :

$$g_i(0, 0, \dots, 0) \;=\; 0 \; .$$

Proposition 14 ([3]) *Supposons que le sous-système en z dans (3.9), d'état z, entrée $x = (x_i)$, sortie $g(z, x) = (g_i(z, x))$, est stable entrée-état et, en particulier, qu'il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et des fonctions $\gamma_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$, continues et nulles à l'origine, telles que, pour toute fonction x dans $L^\infty_{loc}([0, +\infty))$ et toutes les solutions $Z(z, t; x)$ satisfont :*

$$|g_i(Z(z, t; x), x(t))| \;\leq\; \max\left\{\beta(|Z(z, s; x)|, t - s) \, , \, \sup_{\tau \in [s,t]} \gamma_i(|x(\tau)|)\right\} \qquad \text{ppt } s \in [0, t) \; , \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \; .$$

Sous cette condition, si il existe des réels c_0, c_∞, d_0 et d_∞ satisfaisant :

$$-1 \;<\; d_0 \;\leq\; d_\infty \;<\; \frac{1}{p-1}$$

et :

$$\gamma_i(x) \;\leq\; c_0 \sum_{j=1}^{i} |x_j(\kappa)|^{\frac{1-d_0(n-i-1)}{1-0(n-j)}} \;+\; c_\infty \sum_{j=1}^{i} |x_j(\kappa)|^{\frac{1-d_\infty(n-i-1)}{1-d_\infty(n-j)}} \qquad \forall i \in \{1, \dots, p\} \; , \tag{3.10}$$

ou :

$$\gamma_i(x) \;\leq\; c_0 \sum_{j=i+2}^{n} |x_j(\kappa)|^{\frac{1-d_0(n-i-1)}{1-d_0(n-j)}} \;+\; c_\infty \sum_{j=i+2}^{n} |x_j(\kappa)|^{\frac{1-d_\infty(n-i-1)}{1-d_\infty(n-j)}} \qquad \forall i \in \{1, \dots, p\} \; , \tag{3.11}$$

alors il existe un bouclage stationnaire dynamique continu de sortie qui stabilise globalement asymptotiquement l'origine.

[2] Ce n'est pas le cas de la poursuite.

Observons que, dans le terme de droite l'inégalité (3.10), seules les composantes x_1 à x_i sont autorisées à être présentes. Ceci relève donc de la forme feedback discutée dans le paragraphe 1.3. Inversement, dans l'inégalité (3.11), c'est les composantes x_{i+2} à x_p comme dans la forme feedfoward du paragraphe 1.4.

Preuve : La démonstration de cette Proposition est donnée dans [3]. Elle fait appel à la notion de fonction homogène dans la bi-limite, c'est à dire de fonction continue ψ telle que,

1. il existe un $n+1$-uplet $(r_{0,1}, \dots, r_{0,n}, d_0)$ de réels positifs et une fonction continue non identiquement nulle ψ_0 tels que, pour tout compact C de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout réel strictement positif ε, il existe un réel strictement positif λ_0 tels que nous avons :
$$\max_{x \in C} \left| \frac{\psi(\lambda^{r_{0,1}} x_1, \dots, \lambda^{r_{0,n}} x_n)}{\lambda^{d_0}} - \psi_0(x) \right| \leq \varepsilon \quad , \qquad \forall \quad \lambda \in]0, \lambda_0] \ ;$$
2. il existe un $n+1$-uplet $(r_{\infty,1}, \dots, r_{\infty,n}, d_\infty)$ de réels positifs et une fonction continue non identiquement nulle ψ_∞ tels que, pour tout compact C de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout réel strictement positif ε, il existe un réel strictement positif λ_∞ tels que nous avons :
$$\max_{x \in C} \left| \frac{\psi(\lambda^{r_{\infty,1}} x_1, \dots, \lambda^{r_{\infty,n}} x_n)}{\lambda^{d_\infty}} - \psi_\infty(x) \right| \leq \varepsilon \quad , \qquad \forall \quad \lambda \geq \lambda_\infty \ .$$

Nous avons proposé dans [3] un certain nombre de techniques pour travailler avec des systèmes définis par des champs de vecteurs homogènes dans la bi-limite et en particulier donner des méthodes de synthèse de bouclages et d'observateurs.

3.4 Bouclage de sortie pour un système de dynamique inverse stabilisable

Les hypothèses faites dans le paragraphe précédent sur le sous-système en z permettent l'application de techniques reposant sur la domination et en particulier permettent d'ignorer la composante z de l'état. Lorsque cette hypothèse n'est pas satisfaite, cette composante doit elle aussi être prise en compte dans le bouclage.

Supposons que la dynamique du système peut se décomposer sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z} & = & f_z(z, x_1) \ , \\ \dot{x}_1 & = & a_1(z, x_1)\, x_2 \ + \ b_1(z, x_1) \ , \\ & \vdots & \\ \dot{x}_i & = & a_i(z, x_1, \dots, x_i)\, x_{i+1} \ + \ b_i(z, x_1, \dots, x_i) \ , \\ & \vdots & \\ \dot{x}_p & = & a_p(x_1)\, u \ + \ b_p(z, x_1, \dots, x_p) \ , \\ y & = & x_1 \ , \end{array} \right. \tag{3.12}$$

où les fonctions a_i et b_i sont différentiables un nombre suffisant de fois, les a_i ne prenant que des valeurs strictement positives. Observons qu'en modifiant les coordonnées x_i, nous pouvons modifier arbitrairement les fonctions a_1 à a_{p-1} et b_1 à b_{p-1}. Pour simplifier les notations, en notant $\xi = (z, x_1, \dots, x_p)$, nous réécrivons les équations ci-dessus sous la forme plus compacte[3] :

$$\dot{\xi} \ = \ A(\xi, y)\, \xi \ + \ B(y)\, u \quad , \qquad \dot{y} \ = \ C(\xi, y) \ .$$

Proposition 15 ([4]) *Si :*

1. *il existe des fonctions a_1 à a_{p-1}, à valeurs strictement positives, des fonctions b_1 à b_{p-1}, des fonctions $y \mapsto K(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n-1}$ et $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+*}$ de classe C^p et une matrice définie positive P satisfaisant :*
$$P \, \frac{\partial(A - KC)}{\partial \xi}(\xi, y) + \frac{\partial(A - KC)}{\partial \xi}(\xi, y)^T P \ < \ -k(y)^2 \, \frac{\partial C}{\partial \xi}(\xi, y)^T \, \frac{\partial C}{\partial \xi}(\xi, y) \qquad \forall (\xi, y) \ ; \tag{3.13}$$

[3]Cette notation met en lumière pourquoi a_p ne peut dépendre que de $x_1 = y$. Ceci n'est pas restrictif puisque nous pouvons toujours ajouter un dérivateur.

2. le système :

$$\dot{\xi} \;=\; A(\xi, 0)$$

est état-zéro détectable sur $\mathbb{R}^{n-1}$ avec la fonction $\xi \mapsto C(\xi, 0)$;

3. il existe une fonction ϕ_z de classe C^{p+1}, une fonction de Lyapunov V_z de classe C^{p+1}, une fonction α_z définie positive et une fonction γ_z de classe $\mathcal{K}^\infty$ telles que nous avons :

$$\limsup_{s\to+\infty} \frac{\gamma_z(s)}{s^2} \;>\; 0 \quad , \quad \frac{\partial V_z}{\partial z}(z)\left[f_z(z, \phi_z(z)) + K_z(\phi_z(z))\, d\right] \;\leq\; -\alpha_z(z) \;+\; \gamma_z(|d|) \;, \tag{3.14}$$

où K_z est la composante selon z du vecteur K ci-dessus,

alors il existe un bouclage stationnaire dynamique continu de sortie qui stabilise globalement asymptotiquement l'origine.

Preuve : Voir le chapitre 11.2 ou [4].

Commentaire bibliographique

Seule une petite partie des résultats que j'ai obtenus ont été présentés dans ce chapitre, elle-même n'étant qu'une infime partie de tout ce qui a été publié. Voir la bibliographie dans [1]. Et pourtant, en fin de compte, tous ces résultats sont, pour la plupart, loin d'être suffisants pour aborder des applications. Ils demandent la connaissance de la dynamique sous les formes (3.5), (3.9) ou (3.12) qui sont en fait difficiles à obtenir, lorsqu'elles existent. Mais surtout ils ne prennent pas en compte les contraintes toujours présentes sur les commandes.

Par ailleurs ces résultats reposent sur l'existence d'un observateur, observateur dit “à grand gain” pour les Propositions 12 et 13, une extension de ce type d'observateur utilisant l'homogénéité dans la bi-limite dans la Proposition 14 et un observateur d'ordre réduit pour la Proposition 15. Pour obtenir des résultats plus satisfaisant il y a un besoin criant de pousser plus loin la théorie des observateurs qui reste rudimentaire. Ce constat m'a motivé pour dédier une partie de ma recherche à ce thème. Voir par exemple [2, 5, 6].

Chapitre 4

Conclusion

Les résultats que j'ai rappelés dans ce mémoire ne sont qu'un tout petit extrait, que j'espère suffisamment représentatif, de tout ce qui a pu être produit par la communauté des automaticiens durant ces vingt dernières années sur les thèmes de la stabilisation et de l'atténuation de perturbations. Cette production une fois "digérée" et organisée constitue je crois un ensemble cohérent et consistant permettant de donner des réponses à un certain nombre de questions de nature mathématique.

Mais sommes-nous pour autant mieux armés pour aborder des applications ? "Applications" ou plus exactement "applicabilité" est le maître-mot ici. En effet nous évoluons dans le domaine des mathématiques appliquées à l'automatique. Les réponses à des questions mathématiques ne sont pas suffisantes. Il faut aussi prendre en compte les aspects spécifiques des applications.

Comme je l'ai déjà écrit pour le bouclage de sortie, de mon point de vue, peu des Propositions énoncées dans ce mémoire ont un intérêt direct pour les applications. Aussi bien les hypothèses que les réponses obtenues peuvent être trop éloignées de la "réalité" et de ses contraintes. Par contre, par expérience, je peux dire que la démarche de leur démonstration, les façons d'aborder les problèmes qu'elles proposent, les techniques de construction de bouclage qu'elles incorporent sont tous des plus qu'il est très utile d'avoir dans son escarcelle lorsqu'il faut se confronter aux applications.

Aussi tous ces résultats sont des résultats d'existence allant tout de même jusqu'à donner des expressions aux bouclages. Mais seul l'aspect qualitatif est abordé, et pas celui quantitatif, pourtant le plus important pour ces applications.

En conclusion, le sujet est loin d'être épuisé.

Annexe : Résumé de la démonstration du Théorème 1.

4.1 Preuve de 1 $\Leftrightarrow$ 2

L'implication 2 $\Rightarrow$ 1 est une trivialité. Il suffit de prendre $f = f_\delta$.

Pour démontrer la réciproque, nous commençons par observer que le bassin d'attraction $\mathcal{A}$ est un ouvert et qu'il existe une fonction β, de classe $\mathcal{KL}$ telle que, pour tout x dans $\mathcal{A}$, chaque solution $X(x,t)$ est définie au moins sur $[0,+\infty[$ et vérifie :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)) \;\leq\; \beta(\varpi_{\mathcal{A}}(x),t) \qquad \forall t \in [0,+\infty[\;. \tag{4.1}$$

À partir de ce point, la fonction δ est construite sur la suite C_i de compacts suivants inclus dans $\mathcal{A}$:

$$C_i \;=\; \{x \,:\, r_i \leq \varpi_{\mathcal{A}}(x) \leq r_{i+1}\} \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

en utilisant la compacité séquentielle des solutions de (1.3). Voir [(Filippov), Theorems 5, §1] par exemple.

4.2 Preuve de 1 $\Leftrightarrow$ 3

L'implication 3 $\Rightarrow$ 1 est une conséquence des propriétés de la fonction V et des solutions des inégalités différentielles.

Pour démontrer la réciproque, le point de départ est d'utiliser le fait que la fonction β dans (4.1) satisfait l'inégalité (voir [(Sontag [e]), Proposition 7]) :

$$\alpha_1(\beta(r,s)) \;\leq\; \alpha_2(r)\,\exp(-2\lambda s) \qquad \forall (r,s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \;.$$

où λ est un réel strictement positif et α_1 et α_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{K}^\infty$, α_1 étant aussi de classe C^1. Suivant alors par exemple [(Yoshizawa), (19.9)] ou [15], l'idée est de prendre :

$$V(x) \;=\; \sup_{t\geq 0}\left\{\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)))\exp(\lambda t)\right\} \;. \tag{4.2}$$

puisque, pourvu que la dérivée ait un sens, ceci conduit directement à :

$$\dot{\widehat{V(x)}} \;\leq\; -\lambda\, V(x) \;.$$

Ce choix de V ne convient pas du fait de la non unicité des solutions. Pour contourner cette difficulté, nous titons profit du point 2 du Théorème,. Celui-ci nous permet d'approximer la fonction f par une fonction localement Lipschitzienne f_a tout en préservant la stabilité asymptotique de l'origine. Ainsi, dans (4.2), nous pouvons remplacer la solution $X(x,t)$ de (1.3) par celle, unique, $X_a(x,t)$ de :

$$\dot{x} \;=\; f_a(x) \;.$$

Mais en procédant ainsi, nous obtenons l'inégalité :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f_a(x) \;\leq\; -\lambda\, V(x) \;.$$

Or ce qui nous intéresse est $\frac{\partial V}{\partial x} f$ et non pas $\frac{\partial V}{\partial x} f_a$. Nous devons donc faire attention dans notre choix de l'approximation f_a pour que nous ayons :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x) \;\leq\; \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f_a(x)\;.$$

Ceci nous conduit à utiliser en fait, non pas une, mais $2n$ approximations, chacune définie par :

$$f_j(x) \;=\; f(x) \;+\; \frac{n}{n+1}\delta(x)e_j \;+\; \frac{1}{n+1}\delta(x)u_j(x)\;, \tag{4.3}$$

où δ est la fonction donnée par le point 2 du Théorème, les e_1 à e_n sont les vecteurs d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et les e_{n+1} à e_{2n} sont simplement les $-e_1$ à $-e_n$. L'intérêt de ces expressions (4.3) est qu'elles satisfont (1.4) et donc toutes les solutions $X_j(x,t)$ de :

$$\dot{x} \;=\; f_j(x) \tag{4.4}$$

satisfont aussi (4.1). De plus nous pouvons montrer que, si nous avons une fonction $V : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f_j(x) \;\leq\; -\lambda\, V(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}\;, \quad \forall j \in \{1, \ldots, 2n\}\;,$$

avec λ un réel positif, alors nous avons aussi :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x) \;\leq\; -\lambda V(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}\;.$$

Mais nous faisons face à une nouvelle difficulté. En effet nous avons maintenant, en chaque point x de $\mathcal{A}$, non pas une seule valeur possible $f_a(x)$ pour $\dot{x}$, mais toute cette famille finie $f_j(x)$. Ceci nous conduit à considérer non plus l'équation différentielle :

$$\dot{x} \;=\; f_a(x)\;,$$

mais l'inclusion différentielle :

$$\dot{x} \;\in\; \{f_1(x), \ldots, f_{2n}(x)\}\;. \tag{4.5}$$

À partir de ce point, nous pourrions faire appel à la théorie des inclusions différentielles à second membre semi continue supérieurement et à valeurs des ensembles non vides, compacts et convexes. Une façon plus élémentaire de procéder consiste à définir une solution $\mathfrak{X}(x,t)$ de (4.5) comme concaténation des morceaux de solutions $X_j(x,t)$ de (4.4). Ceci permet en particulier de tirer directement profit de tout ce que nous savons sur ces X_j.

Avec ces données la démonstration du Théorème est faite dans le chapitre 9.1 en 4 étapes :

1. Propriétés des solutions $\mathfrak{X}(x,t)$ de (4.5) et stabilité asymptotique de l'origine pour (4.5).
2. Construction explicite des f_j et locale Lipschitzianité des $\mathfrak{X}$.
3. Démonstration que la fonction $V_0 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ définie par :

   $$\sup_{\mathfrak{X}, t\geq 0} \left\{\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(x,t)))\, \exp(\lambda t)\right\}$$

   est localement Lipschitzienne sur $\mathcal{A} \setminus \{0\}$, définie positive et propre sur $\mathcal{A}$ et satisfait :

   $$\limsup_{h\to 0_+} \frac{V_0\left(x + h f_j(x)\right) - V_0(x)}{h} \;\leq\; -\lambda\, V_0(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}\;, \quad \forall j \in \{1, \ldots, 2n\}\;.$$

4. Régularisation de V_0 en utilisant [(Wilson), Theorem 1.3] et [(Lin, Sontag et Wang), Lemma 4.3].

English Version

Chapitre 5

Control Lyapunov functions and stabilization

5.1 The state feedback stabilization problem

Let $\mathcal{O}$ be a neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^n$ and $\mathcal{U}$ be a neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^m$. Let $f : \mathcal{O}\times\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ be a continuous function satisfying :

$$f(0,0) \;=\; 0 \;.$$

We call system the following under-determined ordinary differential equation :

$$\dot{x} \;=\; f(x,u) \;, \tag{5.1}$$

where u, named exogenous variable or more specifically control in this chapter, is a "function" to be defined with values in the set $\mathcal{U}$ of admissible controls; in applications, it is typically a compact set. The word "function" written in quotes here can take several meanings depending on the context. The definition below gives one of these meanings related to the problem of asymptotic stabilization.

Définition 8 *We say that the origin is asymptotically stabilizable by a state feedback if there exists an integer p, a neighborhood $\mathcal{V}$ of the origin in $\mathbb{R}^p$ and two continuous functions $\varphi : \mathbb{R}\times\mathcal{O}\times\mathcal{V} \to \mathbb{R}^p$ and $\phi : \mathbb{R}\times\mathcal{O}\times\mathcal{V} \to \mathcal{U}$, satisfying :*

$$\phi(t,0,0) \;=\; 0 \qquad \forall t \;,$$

so that the origin in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ is an (uniformly) asymptotically stable equilibrium of the system (5.1) in closed loop with :

$$\dot{\chi} \;=\; \varphi(t,x,\chi) \quad , \qquad u \;=\; \phi(t,x,\chi) \;. \tag{5.2}$$

This system (5.2) which generates the control u is called state feedback. It is said static if $p = 0$, dynamic if not. It is said stationary if φ and ϕ do not depend on t. It is said periodic if φ and ϕ are periodic functions of t.

The objective in this chapter is to report some method to build triplets (p,φ,ϕ) providing this asymptotic stabilization property.

5.2 Control Lyapunov functions

Définition 9 *Let $\mathcal{N}$ be a neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^n$. A function $V : \mathcal{N} \to \mathbb{R}_+$ is said a Lyapunov function on $\mathcal{N}$ if it is C^1, and positive definite on $\mathcal{N}$. It must be also proper when $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n$.*

Given system (5.1), we call derivative of V along the solutions of this system or derivative of V in the direction of f, the following expression which we denote indifferently $\dot{\overbrace{V(x)}}$ or $L_fV(x,u)$:

$$\dot{\overbrace{V(x)}} \;=\; L_fV(x,u) \;=\; \limsup_{h\to 0} \frac{V(x+hf(x,u))-V(x)}{h} \;.$$

Lyapunov functions are known to provide a very efficient tool to study stability. But, given a system, finding an appropriate Lyapunov function is a difficult task. The situation we consider here is different. We are concerned with stabilization and not stability, i.e. with design not with analysis. Precisely, the system we consider is under-determined, the input not being specified a priori. The idea is to choose a Lyapunov function first and then to specify the system by choosing its input. This approach to design feedback laws has a very long history. See [(Kalman et Bertram)] for instance. From what follows, we see that there is no loss in generality in following it.

Théorème 16 (**[(Kurzweil), 15]**) *Let $f : \mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}^n$ be a continuous function which is zero at the origin and $\mathcal{A}$ be a neighborhood of the origin contained in $\mathcal{O}$. The following three properties are equivalent :*

1. *The origin is an asymptotically stable solution of the following system with $\mathcal{A}$ as basin of attraction :*

$$\dot{x} \; = \; f(x) \; . \tag{5.3}$$

2. *There exists a Lipschitz function $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, with Lipschitz constant equal to 1, and positive definite on $\mathcal{A}$, and a class [1] $\mathcal{KL}$ function β_δ such that, for any continuous function $f_\delta : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ satisfying[2] :*

$$\forall y \in \mathcal{A} \, , \; \exists z \; : \; |y-z| \; + \; |f_\delta(y) - f(z)| \; \leq \; \delta(y) \; , \tag{5.4}$$

and for any x in $\mathcal{A}$, each solution $X_\delta(x,t)$ associated with :

$$\dot{x} \; = \; f_\delta(x) \; , \tag{5.5}$$

is defined on $[0, +\infty[$ and satisfies :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X_\delta(x,t)) \; \leq \; \beta_\delta(\varpi_{\mathcal{A}}(x), t) \qquad \forall t \in [0, +\infty[\; . \tag{5.6}$$

where $\varpi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ is the function defined as :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(x) \; = \; |x| \left(1 \; + \; \frac{1}{d(x, \partial\mathcal{A})} \right) \; .$$

3. *For any strictly positive real number λ, there exists a C^∞ Lyapunov function $V : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ which is proper on $\mathcal{A}$ and satisfies :*

$$L_f V(x) \; \leq \; -\lambda \, V(x) \qquad \forall \, x \; \in \; \mathcal{A} \; . \tag{5.7}$$

Proof : The first proof of this result, which do not assume uniqueness of solutions, has been given by [(Kurzweil)]. Since then it has been extended in many ways. In particular, with Andrew Teel [15], by following [(Clarke, Ledyaev et Stern)], we have established it in the broader case of differential inclusions and when the asymptotically stable object is a set and no more a point. With the techniques used in that paper, a simpler and better structured proof of Kurzweil result is possible. Due to the space limit, we restrict ourselves in giving a summary of this other proof in Appendix; the complete proof is in the chapter 9.1.

With this Theorem, we know we can tackle on the asymptotic stabilization problem from the Lyapunov functions point of view.

Consider the following system which is affine in the control[3] :

$$\dot{x} \; = \; a(x) \; + \; b(x) \, u \; . \tag{5.8}$$

where $a : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ and $b : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^{n*m}$ are continuous functions.

Définition 10 (**[(Artstein), (Sontag [a])]**) *Let :*

---

[1] A function $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is said of class $\mathcal{K}$ if it is continuous, strictly increasing and zero at zero. It is of class $\mathcal{K}^\infty$ if it is unbounded.

A function $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is said of class $\mathcal{KL}$ if, for each non negative real number s, the function $r \mapsto \beta(r,s)$ is of class $\mathcal{K}$ and, for each strictly positive real number r, the function $s \mapsto \beta(r,s)$ is strictly decreasing and satisfies : $\lim_{s \to +\infty} \beta(r,s) \; = \; 0$.

[2] The condition (5.4) means that, to know if f_δ is close to f, it is sufficient to check that, for any y, $f_\delta(y)$ is close to $f(z)$, where z is close to y.

[3] $a(x)$ is a vector and $b(x)$ is a matrix.

- $\mathcal{V}$ *be a neighborhood of the origin contained in* $\mathcal{O}$ *(respectively* $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ *for the global case),*
- $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$ *(respectively* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$*) be a Lyapunov function* V *on* $\mathcal{V}$*.*

The function V *is called a (weak) Control Lyapunov Function for the system (5.8) if*[4] *:*

$$L_aV(x) \;<\; 0 \quad (\textit{ respectively } \leq\, 0\ ) \qquad \forall x \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \,:\, L_bV(x) \;=\; 0\ .$$

It is said to satisfy the small control property if we have :

$$\limsup_{\substack{|x|\to 0\\ L_bV(x)\neq 0}} \frac{L_aV(x)}{|L_bV(x)|} \;\leq\; 0\ .$$

[(Sontag [b])] and [(Freeman et Kokotovic [b])] have shown that, the existence of a Control Lyapunov Function satisfying the small control property is equivalent to the existence of stationary, static, continuous, asymptotically stabilizing state feedback. They have also given expressions of these feedbacks as functions of L_aV and L_bV.

Another way of dealing with the asymptotic stabilization problem consists in looking for a feedback which, not only is asymptotically stabilizing but also minimizes the cost :

$$J(x,u) \;=\; \int_0^{\infty} \left[l(X(x,t;u)) + u(x,t)^T R(X(x,t;u))\, u(x,t)\right] dt \tag{5.9}$$

where $X(x,t;u)$ is the solution of (5.8) when the control $u(x,t)$ is used, $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ is a continuous function with non negative values and $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ is a C^1 function with positive definite values. A well known sufficient condition to solve this optimal control problem is given by what is called dynamic programming proposed by Bellman, and which goes with finding a solution V to the following equation, named Hamilton-Jacobi-Bellman equation :

$$l(x) \;+\; L_aV(x) \;-\; \frac{1}{4}\, L_bV(x)\, R(x)^{-1} L_bV(x)^T \;=\; 0 \quad , \qquad V(0) \;=\; 0\ . \tag{5.10}$$

There is a strong relationship between the solution of such a problem and Control Lyapunov Functions.

Proposition 17 ([12]) *For the system (5.8), if* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *is a* C^2 *Lyapunov function on* $\mathbb{R}^n$*, then the following three properties are equivalent :*

1. *There exist a continuous function* $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *which is positive definite on* $\mathbb{R}^n$ *and a continuous function* $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ *whose values are symmetric positive definite matrices such that* V *satisfies (5.10).*
2. V *is a Control Lyapunov Function which satisfies :*
$$\limsup_{\substack{|x|\to 0\\ L_bV(x)\neq 0}} \frac{L_aV(x)}{|L_bV(x)|^2} \;<\; +\infty\ . \tag{5.11}$$
3. *There exists a* C^2 *function* $\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *which is zero at the origin, radially unbounded, with a strictly positive derivative, such the the feedback :*
$$\phi(x) \;=\; -L_b(\Theta(V(x)))^T \tag{5.12}$$
is continuous and makes negative definite the derivative of V *along the closed loop solutions.*

Proof : See the chapter 9.2 or [12] for the equivalence between 2 and 3.

With this Proposition 17, we conclude that the design via the optimal control approach with cost like (5.9), which is quadratic in u and where l is a positive definite on $\mathbb{R}^n$, does not bring anything more than the approach via Control Lyapunov Functions and conversely. Nevertheless the former builds the feedback from a cost whereas the latter assumes the knowledge or the ability of designing this function.

The feedback (5.12) is known to have the very attractive property of making the asymptotic stabilization property robust to a wide class of disturbances introduced in the actuator. This is shown for instance in [(Moylan et Anderson), (Glad), (Sepulchre, Jankovic et Kokotovic), 12].

[4] L_aV is a scalar, L_bV is a covector.

Bibliographical Notes

The notion of Control Lyapunov Function has been introduced by [(Artstein)] and [(Sontag [a])] who dot not ask for the system to be affine in the control. For this non affine case, [(Coron et Rosier)] have proved the existence of a continuous asymptotically stabilizing feedback when there is a Control Lyapunov Function V satisfying the small control property. But in general this feedback depends in a periodic way on the time and does make the derivative of V negative. [(Rifford)] has shown that this negativeness can be obtained but by using a discontinuous stationary feedback and by considering Krasovskii or Filippov solutions

Proposition 17 belongs to the family of results dealing with what is called "optimal inverse". It is related to what can be found in [(Sepulchre, Jankovic et Kokotovic)] and [(Freeman et Kokotovic [a])], but clarifying the point thanks to condition (5.11).

In the newt two paragraphs we describe how it is possible to design Control Lyapunov Functions when we can find coordinates such that the dynamics take particular forms. But we note here that a "frontal" approach to this design has been proposed by [(Camilli, Grüne and Wirth)] who generalize the Zubov method for finding a Lyapunov function by solving a partial differential equation.

5.3 Backstepping

Consider systems for which we can find coordinates allowing us to write their dynamics in the following particular form :

$$\dot{x} \;=\; f(x,y) \quad , \qquad \dot{y} \;=\; g(x,y,u) \; , \tag{5.13}$$

where $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \to \mathbb{R}^{n_x}$, a C^1 function, and $g : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n_y}$, a continuous function, satisfy :

$$f(0,0) \;=\; 0 \quad , \qquad g(0,0,0) \;=\; 0 \; .$$

We would like to know if, given a feedback ϕ_x giving some property to the system :

$$\dot{x} \;=\; f(x,\phi_x(x)) \; ,$$

there exists a feedback ϕ_y giving the same property to the system :

$$\dot{x} \;=\; f(x,y) \quad , \qquad \dot{y} \;=\; g(x,y,\phi_y(x,y)) \; .$$

We are interested in answering this question since, in case of positive answer, this particular property can be propagated recursively for systems in the following form called feedback form :

$$\dot{x}_1 \;=\; f_1(x_1,x_2) \; , \quad \ldots \; , \quad \dot{x}_k \;=\; f_k(x_1,\ldots,x_k,u) \; .$$

To answer the question, it turns out that it is sufficient to design a Control Lyapunov Function for the following system where y is in $\mathbb{R}$:

$$\dot{x} \;=\; f(x,y) \quad , \qquad \dot{y} \;=\; u \; . \tag{5.14}$$

Proposition 18 ([25, 24]) *Assume there exists a Control Lyapunov Function V_x on $\mathbb{R}^n$ for the system :*

$$\dot{x} \;=\; f(x,v) \tag{5.15}$$

to which is associated the feedback $v = \phi_x$, given by a locally Hölder function with order strictly larger than $\frac{1}{2}$. Let $\ell : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ and $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be functions with the following properties :

1. *ℓ is C^1, radially unbounded, with a derivative taking strictly positive values on $\mathbb{R}_{+*}$,*
2. *$\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is C^1, satisfies :*

$$\psi(x,y) \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \;=\; \phi_x(x) \tag{5.16}$$

and is such that the function :

$$\Psi(x,y) \;=\; \int_{\phi_x(x)}^{y} \psi(x,s)ds \tag{5.17}$$

satisfies :

$$\lim_{y\to-\infty} \Psi(x,y) \;=\; \lim_{y\to+\infty} \Psi(x,y) \;=\; +\infty \qquad \forall x \; . \tag{5.18}$$

Under these conditions, the functions V_y defined by :

$$V_y(x,y) \;=\; \ell(V_x(x)) \;+\; \int_{\phi_x(x)}^{y} \psi(x,s)\,ds \tag{5.19}$$

is a Control Lyapunov Functions for the system (5.14).

Moreover if ϕ_x is C^1 and we have :

$$\liminf_{|x|+|y|\to 0} \frac{|\psi(x,y)|}{|y-\phi_x(x)|} \;>\; 0 \;, \tag{5.20}$$

then V_y satisfies the small control property.

Proof : See the chapter 9.3 or [25, 24].

The ability of designing a Control Lyapunov function for the system (5.14) is well known today. But the usual technique imposes the following choice for the functions ℓ and ψ :

$$\ell(v) \;=\; v \quad , \qquad \psi(x,y) \;=\; y - \phi_x(x) \;.$$

However by taking advantage of these degrees of freedom, very interesting extensions can be done such as control saturations [17], non C^1 feedback ϕ_x or generalized homogeneity as in [24, (Lin et Qian), 3].

We shall see later applications in disturbance attenuation and in output feedback.

Bibliographical Notes

The backstepping technique has been introduced at the end of the eighties by several authors following various routes. The approach by a change of coordinates can be found in [(Kokotovic et Sussmann)], then one by Lyapunov function in [(Tsinias)] or the one by input-to-state stability in [(Sontag [d])]. Since then it has received a lot of extension and applications. See [(Krstic, Kanellakopoulos et Kokotovic)], [(Freeman et Kokotovic [a])], [(Isidori [a])], [(Isidori [b])] for instance.

5.4 Forwarding

Consider now systems whose dynamics can be written as :

$$\dot{y} \;=\; h_y(y) \;+\; h_x(x,y)\,x \;+\; h_u(x,y,u)\,u \quad , \qquad \dot{x} \;=\; f(x) \;+\; f_u(x,y,u)\,u \;, \tag{5.21}$$

where x is in $\mathbb{R}^{n_x}$, y in $\mathbb{R}^{n_y}$ and u in $\mathbb{R}^m$, the function f is C^2, the functions h_y and h_x are C^1 and the functions h_u and f_u are continuous, and we have :

$$h_y(0) \;=\; 0 \quad , \qquad f(0) \;=\; 0 \;. \tag{5.22}$$

We would like to know whether, given a Lyapunov function V_x on $\mathbb{R}^{n_x}$ satisfying :

$$L_f V_x(x) \;<\; 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x} \setminus \{0\} \;,$$

it is possible to design a Control Lyapunov Function V_y for the system (5.21).

Again our interest in this question comes from the fact that, once in closed loop, the system (5.21) becomes a system like :

$$\dot{x} \;=\; f(x)$$

and we can propagate. So we have possibly a way to deal recursively with systems in the following form, called feedforward form :

$$\dot{x}_k \;=\; f_k(u, x_1, \ldots, x_{k-1}) \;, \quad \ldots \;, \quad \dot{x}_1 \;=\; f_1(u, x_1) \;.$$

To answer the question, we start by introducing assumptions which, if there were no coupling term $h_x(x,y)x$, would allow us to give a trivial answer :

H1 : There exists a Lyapunov function V_x on $\mathbb{R}^{n_x}$ such that the function :

$$W_x(x) \;=\; -L_f V_x(x) \tag{5.23}$$

is positive definite.

H2 : There exists a Lyapunov function U_y on $\mathbb{R}^{n_y}$ such that the function :

$$W_y(y) \;=\; -L_{h_y} U_y(y)$$

takes non negative values.

To deal with the coupling term, we assume there exists a C^1 function $\Psi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \to \mathbb{R}^{n_y}$ satisfying :

$\mathcal{P}1$: $$\Psi(0,y) \;=\; y\ .$$

$\mathcal{P}2$: For any non negative real number c, the set $\{y\ :\ \exists x \in \mathbb{R}^n\ :\ |x| \le c\,,\ |\Psi(x,y)| \le c\}$ is bounded.

$\mathcal{P}3$: The dynamics of the new "coordinate"[5] Ψ does not depend on x and satisfies :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,y)\, f(x) \;+\; \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y)\,(h_y(y) + h_x(x,y)x) \;=\; h_y(\Psi(x,y))\ . \tag{5.24}$$

Proposition 19 ([19]) *Under assumptions H1 and H2 and if there exists a function Ψ satisfying properties $\mathcal{P}1$ to $\mathcal{P}3$, the function V_y defined by :*

$$V_y(x,y) \;=\; V_x(x) \;+\; U_y(\Psi(x,y))$$

is a Control Lyapunov function on $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y}$ for the system (5.21). Moreover, if the system :

$$\dot{y} \;=\; h_y(y) \tag{5.25}$$

is zero-state detectable[6] *on $\mathbb{R}^{n_y}$ with the function*

$$y \;\mapsto\; \left(W_y(y)\,,\ \frac{\partial U_y}{\partial y}(y)\left[\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0,y) f_u(0,y,0) + h_u(0,y,0)\right]\right)\ ,$$

then, for any u_b in $]0,+\infty]$, there exists a continuous feedback, bounded in norm by u_b and making the origin of (5.21) globally asymptotically stable.

Proof : See the chapter 9.4 or [19].

For such a result to be useful in applications, we must answer the following three questions :

1. Under which conditions does the function Ψ exist ?
2. Is it possible to find an expression for Ψ as solution of the partial differential equation (5.24) ?
3. Is it possible to find a feedback by using only an approximation for Ψ ?

Before answering these questions, we observe that [(Jankovic, Sepulchre et Kokotović)] have proposed to go, not with a change of "coordinate" as above, but with a Lyapunov function in the form :

$$V_y(x,y) \;=\; V_x(x) \;+\; V_y(y) \;+\; S(x,y) \tag{5.26}$$

where the cross term S is solution of :

$$\frac{\partial U_y}{\partial y}(y)\, h_x(x,y)x \;+\; \frac{\partial S}{\partial x}(x,y) f(x) \;+\; \frac{\partial S}{\partial y}(y)\,[h_y(y) \;+\; h_x(x,y)x] \;=\; 0\ .$$

The sufficient conditions given by [(Jankovic, Sepulchre et Kokotović)] which imply the existence of a solution to this partial differential equation and giving rise to a function V_y which is Lyapunov function on $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y}$ are less restrictive than the ones we shall see below for the existence of Ψ. But on the other hand we are unaware of any application of this other technique.

[5] This is an abuse of language since we do not impose that the mapping $(x,y) \mapsto (x,\Psi)$ is a bijection.

[6] Let $\mathcal{N}$ be a neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^n$ and $h : \mathcal{N} \to \mathbb{R}^m$ be a continuous function which is zero at the origin. The system $\dot{x} = f(x)$ is said zero-detectable on $\mathcal{N}$ with the function h if any solution $X(x,t)$ of $\dot{x} = f(x)\ ,\ h(x) \;=\; 0$ which is defined and with values in $\mathcal{N}$ on $[0,+\infty[$ converges to the origin when t goes to $+\infty$.

5.4.1 Existence of Ψ

To exhibit a sufficient condition implying the existence of Ψ, we start by observing that, if a function Ψ satisfies (5.24), then it satisfies :

$$\dot{\overbrace{\Psi(x,y)}} \;=\; h_y(\Psi(x,y)) \;. \tag{5.27}$$

So, with denoting $Z(z,t)$ the solutions of

$$\dot z \;=\; h_y(z) \;,$$

we have, for any solution $(X(x,t),Y(x,y,t))$ of (5.21) with u zero and for any t in its maximal domain of definition $]\sigma_-(x,y),\sigma_+(x,y)[$,

$$\Psi(X(x,t),Y(x,y,t)) \;=\; Z(\Psi(x,y),t) \;.$$

In the case where the function h_y is C^1, the function Z satisfies :

$$Z(Z(z,t),-t) \;=\; z \;.$$

This implies :

$$\Psi(x,y) \;=\; Z(\Psi(X(x,t),Y(x,y,t)),-t) \;. \qquad \forall t \in]\sigma_-(x,y),\sigma_+(x,y)[\;.$$

But, since assumption H1 implies :

$$\lim_{t\to+\infty} X(x,t) \;=\; 0 \;,$$

if everything goes well when we go with the limit, with $\mathcal{P}1$, an expression for Ψ should be :

$$\Psi(x,y) \;=\; \lim_{t\to+\infty} Z(Y(x,y,t),-t) \;.$$

In the case where the function h_y is linear :

$$h_y(y) \;=\; H\,y$$

this expression is :

$$\Psi(x,y) \;=\; y \;+\; \int_0^\infty \exp(-Hs)\,h_x(X(x,s),Y(x,y,s))\,X(x,s)\,ds \;. \tag{5.28}$$

We have :

Proposition 20 ([19]) *Assume the function h_x is C^1, assumptions H1 and H2 hold and the function h_y is linear. If*

1. *there exists a continuous function $\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ which is non decreasing and satisfies :*

$$\left|\frac{\partial U_y}{\partial y}(y)\,h_x(x,y)\right| \;\leq\; \gamma(|x|)\,(1+U_y(y)) \qquad \forall (x,y) \;. \tag{5.29}$$

2. $$\max\left\{\text{Ré}\left(\textit{eigen value}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0)\right)\right)\right\} \;<\; \min\left\{\text{Ré}\left(\textit{eigen value}\,(H)\right)\right\} \;, \tag{5.30}$$

then the expression (5.28) defines properly a C^1 function satisfying properties $\mathcal{P}1$ and $\mathcal{P}3$. Moreover, if we have :

$$W_y(y) \;=\; -L_{h_y}U_y(y) \;=\; 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{n_y} \;, \tag{5.31}$$

then property $\mathcal{P}2$ is satisfied also.

Proof : See the chapter 9.5 or [19].

Condition (5.31) is only one out of several known sufficient conditions implying property $\mathcal{P}2$. For example, we see readily from expression (5.28) that another condition is that the function $y \mapsto h_x(x,y)$ is bounded for any x in $\mathbb{R}^{n_x}$.

5.4.2 Expression of Ψ

In practice, it is hopeless to approach the feedback design by solving the partial differential equation (5.24). It is more fruitful to use its interpretation (5.27) and exploit all what is known about the system to be controlled to find an expression for Ψ.

In this way, we have been able to solve the problem of stabilizing the upper position of a spheric pendulum carried by robot arm. See [13] and
`http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Multimedia/XavierX96_1.avi`

Also it is possible to reduce the complexity of (5.24) by following the technique which has been called "modulo L_gV_x". To introduce it, we restrict our attention to systems (5.21) admitting the following simpler description :

$$\dot{y} \;=\; h(x) \quad , \qquad \dot{x} \;=\; f(x) \;+\; g(x)\,u \; .$$

By picking Ψ as

$$\Psi(x,y) \;=\; y \;-\; \mathcal{M}(x)$$

and, with H1, we let :

$$V_y(x,y) \;=\; V_x(x) \;+\; \frac{1}{2}\,(y-\mathcal{M}(x))^2 \; .$$

We obtain :

$$\overset{\cdot}{\overbrace{V_y(x,y)}} \;=\; L_fV_x(x) \;+\; (y-\mathcal{M}(x))^T\,(h(x)-L_f\mathcal{M}(x)) \;+\; \left[L_gV_x(x)-(y-\mathcal{M}(x))^T\,L_g\mathcal{M}(x)\right]u \; .$$

So we see that, if $\mathcal{M}$ satisfies :

$$h(x)-L_f\mathcal{M}(x) \;=\; k(x)L_gV_x(x)^T \quad , \qquad L_g\mathcal{M}(x) \;=\; 0 \; ,$$

then we have :

$$\overset{\cdot}{\overbrace{V_y(x,y)}} \;=\; L_fV_x(x) \;+\; L_gV_x(x)\left[k(x)^T\,(y-\mathcal{M}(x))+u\right] \; .$$

This establishes that V_y is a weak Control Lyapunov Function.

This technique has been proposed and analyzed in [11]. Among the applications where it has been used, let us mention the orbit transfer problem under continuous but weak thrust. See [9].

5.4.3 Approximation of Ψ

Thanks to the stability margin given by the positiveness of the function W_x, it is possible to design a feedback with an approximation Ψ_a of Ψ.

Proposition 21 (**[19]**) *Assume H1 and H2 hold and there exists a C^1 function Ψ_a satisfying :*

$\mathcal{P}1_a$:
$$\Psi_a(0,y) \;=\; y \; .$$

$\mathcal{P}2_a$: *For any non negative real number c, the set $\{y \,:\, \exists x\in\mathbb{R}^n \,:\, |x|\leq c\,,\ |\Psi_a(x,y)|\leq c\}$ is bounded.*

$\mathcal{P}3_a$: *There exists a continuous function $\gamma:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, which is non decreasing and satisfies :*

$$\left|\frac{\partial U_y}{\partial y}(\Psi_a(x,y))\right|\left|\frac{\partial\Psi_a}{\partial x}(x,y)\,f(x) \;+\; \frac{\partial\Psi_a}{\partial y}(x,y)\,(h_y(y)+h_x(x,y)x) \;-\; h_y(\Psi_a(x,y))\right|$$
$$\leq\; |x|^2\,\gamma(|x|)\,(1+U_y(\Psi_a(x,y))) \qquad \forall(x,y) \; .$$

Under this condition, if the matrix $\frac{\partial^2W_x}{\partial x^2}(0)$ is positive definite, then there exists a C^1 function $\ell:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ which is radially unbounded, whose derivative is positive definite and is such that the function V_y defined as :

$$V_y(x,y) \;=\; \ell(V_x(x)) \;+\; \log(1+U_y(\Psi_a(x,y))) \tag{5.32}$$

is a Control Lyapunov Function on $\mathbb{R}^{n_x}\times\mathbb{R}^{n_y}$ for the system (5.21). Moreover, if the system (5.25) is zero-state detectable on $\mathbb{R}^{n_y}$ with the function

$$y \;\mapsto\; \left(W_y(y)\,,\ \frac{\partial U_y}{\partial y}(y)\left[\frac{\partial\Psi_a}{\partial x}(0,y)f_u(0,y,0)+h_u(0,y,0)\right]\right) \; ,$$

then, for any u_b in $]0,+\infty]$, there exists a continuous feedback, bounded in norm by u_b and making the origin of (5.21) globally asymptotically stable.

Proof : See the chapter 9.6 or [19].

Roughly, property $\mathcal{P}3_a$ says that, if the growth in y in the coupling term is limited, it is sufficient to solve equation (5.24) in a neighborhood of the origin en x and up to order 1 only.

Bibliographical Notes

The forwarding technique is potentially very interesting for the applications. It exploits information we may have on the system to be controlled as its conservative/dissipative property and it leads "naturally" to a bounded feedback. Unfortunately it has received little attention likely due to the difficulty in finding expressions for Ψ or for the bad performance with typically slow peaking obtained when the feedback is designed from an approximation Ψ_a.

We have mentioned the other approach proposed by [(Jankovic, Sepulchre et Kokotović)] which goes with working a cross S term as in (5.26). A third but totally different approach has been introduced by [(Teel [a])] and [(Teel [b])]. It does not involve Lyapunov functions. Instead it relies on a special form of the small gain theorem called "with conditions". Although this method is simpler from a technical point of view, it leads to performance of the same quality as what we can get with an approximation Ψ_a.

Chapitre 6

Input to state stability and disturbance attenuation

Again let $\mathcal{O}$ be a neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^n$ and $\mathcal{U}$ be a neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^m$. Let $f : \mathcal{O} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ and $h : \mathcal{O} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^l$ be continuous functions satisfying :

$$f(0,0,0) \;=\; 0 \quad , \qquad h(0,0) \;=\; 0 \; .$$

We consider the system :

$$\dot{x} \;=\; f(x,u,d(t)) \quad , \qquad y \;=\; h(x,d(t)) \; , \tag{6.1}$$

where now the exogenous variables (u,d) are of two kinds : the control u, as in the stabilization problem, and what is considered as disturbances, represented by d, a function which is a priori in $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^p)$.

This problem we are interested in here is about the ability to design a feedback for u such that the evaluation along the closed loop solutions of the function h depends as less as possible on the disturbances.

To state this problem, we need to define this notion of dependence.

6.1 Input to state stability

Définition 11 ([(Sontag [c])]) *The system :*

$$\dot{x} \;=\; \mathfrak{f}(x,d) \tag{6.2}$$

is said input to state stable if there exists a class $\mathcal{KL}$ function β and a class $\mathcal{K}$ function γ such that, for any x in $\mathbb{R}^n$ and any function d in $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^p)$, all the solutions $X(x,t;d)$ of (6.2) are defined on $[0,+\infty[$ and satisfy[1] *:*

$$|X(x,t;d)| \;\leq\; \max\left\{\beta(|x|,t),\ \sup_{s\in[0,t]} \gamma(|d(s)|)\right\} \qquad \forall t \geq 0 \; . \tag{6.3}$$

A function γ satisfying such an inequality is called a system gain.

Inequality (6.3) means:

- either the initial condition x is large in norm compared with the L^∞ norm of d and then, the solution starts by behaving as if there were no disturbance and converges towards a compact set whose diameter depends on this L^∞ norm.
- or the initial condition is small in norm, then the solution remains in this compact set.

Définition 12 *We say that the problem of disturbance attenuation on the output h is solvable if there exists an integer p, a neighborhood $\mathcal{V}$ of the origin in $\mathbb{R}^p$, two continuous functions $\varphi : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}^p$ and $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \times \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, satisfying :*

$$\phi(t,0,0) \;=\; 0 \qquad \forall t \; ,$$

[1] sup is to be understood as the L^∞ norm.

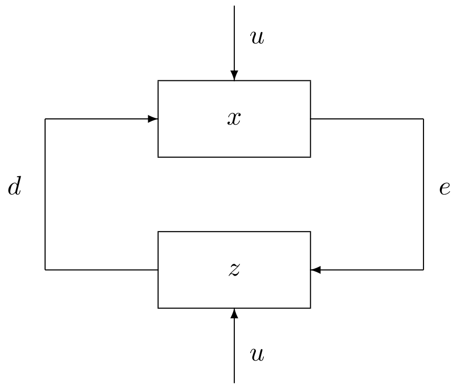

Figure 6.1: Interconnected system (6.5)

a class $\mathcal{KL}$ function β and a class $\mathcal{K}^\infty$ function γ such that, for any function d in $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^p)$, all the solutions $(X((x,\varkappa),t;d),\mathcal{X}((x,\varkappa),t;d)$ in $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ of the closed loop system (6.1), (5.2) are right maximally defined on $[0,+\infty[$, bounded and satisfy :

$$|h(X((x,\varkappa),t;d),d(t))| \\ \leq \max\left\{\beta\left(|(X((x,\varkappa),s;d),\mathcal{X}((x,\varkappa),s;d))|\,,t-s\right)\,,\ \sup_{r\in[s,t]}\gamma(|d(r)|)\right\} \qquad \text{ppt } t\geq s\geq 0\ . \tag{6.4}$$

The expression "disturbance attenuation" makes full sense when we aim at having γ as small as possible. A motivation for studying this problem comes from considering the following so called interconnected system[2] (see figure 6.1) :

$$\dot z\ =\ g(z,e,u(t))\ ,\ d\ =\ k(z,e,u(t))\quad ,\qquad \dot x\ =\ f(x,d,u(t))\ ,\ e\ =\ h(x,u(t))\ , \tag{6.5}$$

where now u represents the variables exogenous to this interconnection. The functions h and k in (6.5) are called interconnection functions and are assumed continuous and satisfying :

$$h(0,0)\ =\ 0\quad ,\qquad k(0,0)\ =\ 0\ .$$

Proposition 22 ([20]) *Assume the systems given in (6.5) are input-to-state stable and therefore that there exist class $\mathcal{KL}$ functions β_d and β_e and class $\mathcal{K}$ functions γ_{de}, γ_{du}, γ_{ed} and γ_{eu} such that, for each of their solutions, we have, for almost all t larger or equal to s,*

$$|k(Z(z,t;(e,u)),e(t),u(t))|\ \leq\ \max\left\{\beta_d(|Z(z,s;(e,u))|,t-s),\ \sup_{\tau\in[s,t]}\gamma_{de}(|e(\tau)|),\ \sup_{\tau\in[s,t]}\gamma_{du}(|u(\tau)|)\right\}\ , \tag{6.6}$$

$$|h(X(x,t;(d,u)),u(t))|\ \leq\ \max\left\{\beta_e(|X(x,s;(d,u))|,t-s),\ \sup_{\tau\in[0,t]}\gamma_{ed}(|d(\tau)|),\ \sup_{\tau\in[s,t]}\gamma_{eu}(|u(\tau)|)\right\}\ . \tag{6.7}$$

Under this condition, if the following, called small gain condition,

$$\gamma_{de}\circ\gamma_{ed}(s)\ <\ s\qquad \forall s>0 \tag{6.8}$$

holds, the system (6.5) is input-to-state stable.

Proof : See the chapter 10.1 or [20].

This results is one possible formulation of what is called small gain theorem. Another formulation which turns out to be more useful for control design follows.

[2]We could allow h to depend also on d, but then we get what is called an algebraic loop. Indeed it leads to an implicit definition of e and d as $e=h(x,k(z,e,u),u)$ and $d=k(z,h(x,d,u),u)$. By writing that h does not depend on d, we mean that the first equation has been solved in e.

Proposition 23 ([23]) *Assume :*

1. *the z-system in (6.5) is input-to-state stable and its output $d = k(z, u, e(t))$ satisfies (6.6).*
2. *the x-system in (6.5) is input-to-state stable and more specifically there exist a Lyapunov function V_x on $\mathbb{R}^n$, class $\mathcal{K}$ functions γ_{xd} and γ_{xu} and a strictly positive real number λ such that we have :*

$$\overset{\cdot}{\overbrace{V(x)}} \leq -\lambda V_x(x) + \gamma_{xd}(|d|) + \gamma_{xu}(|u|) \qquad \forall (x, d, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m . \tag{6.9}$$

Under this condition, if there exist a strictly positive real number ε and a class $\mathcal{K}$ function μ satisfying :

$$\gamma_{xd} \circ \gamma_{de}(|h(x, u)|) \leq (1 - \varepsilon) \lambda V_x(x) + \mu(|u|) \qquad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m , \tag{6.10}$$

then the system (6.5) is input-to-state stable.

Proof : See the chapter 10.2 or [23].

Condition (6.10) is another small gain condition. It means that the composition :
– of a gain, coming from input-to-state stability expressed in terms of a Lyapunov function for the x-system,
– with a gain, coming from input-to-state stability expressed in terms of class $\mathcal{KL}$ and class $\mathcal{K}$ functions,
is sufficiently small.

Bibliographical Notes

The notion of input-to-state stability has been introduced by [(Sontag [c])] and deeply studied for instance by [(Sontag [f])]. It relies on the L^∞ norm. Variations have been proposed with using other norms. See [(Sontag [e]), (Sontag [f])] for instance.

The small gain condition as sufficient condition to obtain stability has a long history in particular in the case where the gains are linear functions. For the non linear case, it starts with the work of [(Mareels et Hill)]. Since then many other versions have been proposed as, for instance, by [(Teel [b]), (Jiang, Mareels et Wang), (Dashkovskiy, Rüffer et Wirth)].

6.2 Disturbance attenuation

Consider the system

$$\dot{x} = a(x) + b(x) u + p(x, d) , \tag{6.11}$$

where the functions $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{nm}$ and $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ are continuous, d is in $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$ and we have :

$$p(x, 0) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

In [14], we have shown that what can be obtained in the set $\{x \in \mathbb{R}^n : L_b V(x) = 0\}$ can be extended to the whole space. In clear, this means that sufficient conditions for being able to control the gain can be restricted to this set.

Proposition 24 ([14]) *Assume there exist a Control Lyapunov Function V on $\mathbb{R}^n$ satisfying the small control property for the system :*

$$\dot{x} = a(x) + b(x) u \tag{6.12}$$

and a class $\mathcal{K}^\infty$ function $\varkappa$ such that the function $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ defined as :

$$A(x) = \max_{d:\, \varkappa(|d|) \leq (|x|)} \frac{\partial V}{\partial x}(x) \left(a(x) + p(x, d)\right)$$

satisfies :

$$A(x) < 0 \quad \forall x \neq 0, :\ L_b V(x) = 0 \quad , \qquad \limsup_{\substack{|x| \to 0 \\ L_b V(x) \neq 0}} \frac{A(x)}{|L_b V(x)|} \leq 0 .$$

Under this condition, there exists a continuous feedback ϕ which makes the system (6.11) input-to-state stable with gain :

$$\gamma \;=\; \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \chi^{-1} \;.$$

where α_1 and α_2 are class $\mathcal{K}^\infty$ functions satisfying :

$$\alpha_1(|x|) \;\leq\; V(x) \;\leq\; \alpha_2(|x|) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \;.$$

Proof : See the chapter 10.3 or [14].

With this result, we guess that it is possible to assign any gain in the case where $\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, p(x,d)$ is zero when $L_b V(x)$ is zero. Such a condition is satisfied when we have the factorization :

$$p(x,d) \;=\; b(x)\, q(x,d) \;.$$

This condition is a "matching condition" .

Proposition 25 ([18]) *Assume there exist a Control Lyapunov Function V on $\mathbb{R}^n$ satisfying the small control property for the system (6.12), a continuous function $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ and a continuous function $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ which is zero at zero such that the function p satisfies :*

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, p(x,d)\right| \;\leq\; |L_b V(x)|\, \sigma(V(x))\, \rho(|d|) \qquad \forall (x,d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \;. \tag{6.13}$$

Under this condition, for any class $\mathcal{K}^\infty$ functions γ_{ud} and γ_{xd}, there exist a continuous function $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ and class $\mathcal{KL}$ functions β_u and β_x such that, for each function d in $L^\infty_{loc}([0,\infty[, \mathbb{R}^p)$ and each point x in $\mathbb{R}^n$, all the solutions $X(x,t;d)$ of the closed-loop system :

$$\dot{x} \;=\; a(x) \;+\; b(x)\, \phi(x) \;+\; p(x,d)$$

are defined on $[0,\infty[$ and satisfy :

$$|X(x,t;d)| \;\leq\; \max\left\{\beta_x(|x|,t)\,,\, \gamma_{xd}\left(\sup_{s\in[0,t]} |d(s)|\right)\right\} \qquad \forall t \geq 0 \;. \tag{6.14}$$

Moreover, when σ takes its values in $[0, \frac{1}{m}]$, we have also :

$$|\phi(X(x,t;d))| \;\leq\; \max\left\{\beta_u(|x|,t)\,,\, (\mathtt{Id} + \gamma_{ud})\left(\sup_{s\in[0,t]} \rho(|d(s)|)\right)\right\} \qquad \forall t \geq 0 \;.$$

Proof : See paragraph 10.4 or [18].

The gain γ_{xd} being arbitrary, inequality (6.14) shows the action of d on the state can be arbitrarily attenuated as we were expecting. Moreover, when σ takes its values in $[0, \frac{1}{m}]$, this attenuation can be achieved with a feedback whose evaluation along the solutions has, asymptotically, an L^∞ norm as close as we want to the one of $\rho(|d|)$.

With the backstepping technique, we can extend the above result to some cases where the disturbance does not act in the image of the control. To study this point, we assume the system admits the following specific form :

$$\dot{x} \;=\; a(x) \;+\; b(x)\,(y + c(x) d_x) \quad , \qquad \dot{y} \;=\; u \;+\; f(x,y) \;+\; g(x,y) d_y \;, \tag{6.15}$$

with x in $\mathbb{R}^n$, y and u in $\mathbb{R}^l$, d_x and d_y in $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, the functions a, b, c, f and g are C^q and satisfy :

$$a(0) \;=\; 0 \quad , \qquad f(0,0) \;=\; 0 \;.$$

We want to design a feedback such that the closed loop system is input-to-state stable with a given gain between (d_x, d_y) and x.

Proposition 26 ([23]) *Assume we have a C^{q+1} feedback ϕ_x, and a C^{q+2} Lyapunov function V_x on $\mathbb{R}^{n_x}$ satisfying :*

$$L_a V_x(x) \;+\; L_b V_x(x)\,\phi_x(x) \;\leq\; -\lambda\, V_x(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \;, \tag{6.16}$$

where λ is a strictly positive real number. Under this condition, there exists a C^q feedback ϕ such that, with $u = \phi(x, y)$, the system (6.15) is input-to-state stable with (d_x, d_y) as input. Moreover, for any continuous function γ_d such that we can find strictly positive real numbers s_0 and μ satisfying :

$$\gamma_d \circ \alpha_1^{-1}(s^2) \;\leq\; \mu\, s \qquad \forall s \in [0, s_0] \;, \tag{6.17}$$

where α_1 is a class $\mathcal{K}^\infty$ function satisfying :

$$\alpha_1(|x|) \;\leq\; V_x(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \;, \tag{6.18}$$

the feedback ϕ can be chosen so that there exist a strictly positive real number ε and a C^{q+1} Lyapunov function V on $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}$ satisfying :

$$\overbrace{V(x, y)}^{\cdot} \;\leq\; -\lambda\, V(x, y) \;+\; |(d_x, d_y)|^2 \qquad \forall (x, y, d_x, d_y) \;. \tag{6.19}$$

$$\gamma_d(|x|)^2 \;\leq\; (1 - \varepsilon)\, \lambda\, V(x, y) \qquad \forall (x, y) \;, \tag{6.20}$$

Proof : See the chapter 10.5 or [23].

Remarque 6.21

1. Inequalities (6.19) and (6.20) are exactly the ones we need to meet the condition written in Proposition 23. In particular, the fact that, for any function γ_d, we can satisfy inequality (6.20) shows that we do are able to assign a gain although the disturbance does not act in the control image. Note however that this function γ_d is constained in a neighborhood of zero by the condition (6.17). If V_x is lower bounded by a quadratic form on a neighborhood of the origin, this condition imposes that γ_d be linearly dominated close to zero.

2. Since the conclusion of Proposition 26 is the same as its assumption but for the extended system, we can apply this result recursively but by loosing each time one degree of smoothness. In particular, in this way, it is possible to prove that, for the system :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & a(x) \;+\; b(x)\,(y_1 + c(x) d_0) \;, \\ \dot{y}_1 & = & y_2 \;+\; f_1(x, y_1) \;+\; g_1(x, y_1)\, d_1 \;, \\ & \vdots & \\ \dot{y}_m & = & u \;+\; f_m(x, y_1, \dots, y_m) \;+\; g_m(x, y_1, \dots, y_m)\, d_m \;, \end{array} \right.$$

   given a triplet (ϕ_x, V_x, γ_d) satisfying (6.16) and (6.17), there exists a continuous feedback ϕ, a Lyapunov function V on $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^m$ and a strictly positive real number λ such that, with :

$$u \;=\; \phi(x, y_1, \dots, y_m) \;,$$

   we have :

$$\overbrace{V(x, y_1, \dots, y_m)}^{\cdot} \;\leq\; -\lambda\, V(x, y_1, \dots, y_m) \;+\; \sum_{i=0}^{m} |d_i|^2 \qquad \forall (x, y_1, \dots, y_m, d_0, \dots, d_m) \;,$$

$$\gamma_d(|x|)^2 \;\leq\; (1 - \varepsilon)\, \lambda\, V(x, y_1, \dots, y_m) \qquad \forall (x, y_1, \dots, y_m) \;.$$

   This result says that we have a full control on the gain we can assign between the disturbances and the state components we find after the disturbances when moving in the chain of integrators starting from the control.

Bibliographical Notes

Whereas input-to-state stability, its many variations and the small gain Theorems have received a lot of attention, results on gain assignment are fewer. They are often hidden in feedback designs and therefore not formalized explicitly.

The ability of rendering by feedback a disturbed system input-to-state stable has been studied for instance by [(Sontag et Wang [a])] and [(Freeman et Kokotovic [a])]. But the assumptions are such that it is impossible to control the gain.

The reader will find in [(Isidori [a]), paragraph 9.5] results on disturbance attenuation for the case where the L^2 norm is used.

Chapitre 7

Output feedback

7.1 The output feedback stabilization problem

Let $\mathcal{O}$ be a neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^n$ and $\mathcal{U}$ be a neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^m$. Let $f : \mathcal{O} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ and $h : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^l$ be functions which are sufficiently many times differentiable and satisfy :

$$f(0,0) \;=\; 0 \quad , \qquad h(0) \;=\; 0 \; .$$

We consider the system :

$$\dot{x} \;=\; f(x,u) \quad , \qquad y \;=\; h(x) \; , \tag{7.1}$$

where u is the control and y is the vector representing the information we have about the system at each time instant.

Définition 13 *We say that the origin is asymptotically stabilizable by an output feedback if there exist an integer p, a neighborhood $\mathcal{V}$ of the origin in $\mathbb{R}^p$ and two continuous functions $\varphi : \mathbb{R} \times h(\mathcal{O}) \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}^p$ and $\phi : \mathbb{R} \times h(\mathcal{O}) \times \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, satisfying :*

$$\phi(t,0,0) \;=\; 0 \qquad \forall t \; ,$$

so that the the origin in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ is an (uniformly) asymptotically stable equilibrium of the system (7.1) in closed loop with :

$$\dot{\chi} \;=\; \varphi(t, h(x), \chi) \quad , \qquad u \;=\; \phi(t, h(x), \chi) \; . \tag{7.2}$$

This system (7.2) which generates the control u from the information $h(x)$ we have about the system is called output feedback.

With Vincent Andrieu we have proposed in [1] an approach allowing us to introduce, classify and put in relation most of the many answers found in the literature to tis question of stabilization by output feedback. Because of the limited number of pages allowed for this memoir, I cannot here present all the elements of this approach. So I restrict myself here in writing that we have identified two ways of dealing with this problem.

A direct method in which the output feedback stabilization problem is addressed directly. Then, due to the fact the information we have on the system state for the feedback is not exact, we have to face an input disturbance. Typically (but not always) this state information is provided by an observer, i.e. a dynamic system with the pair (u, y) as input and a state estimation $\hat{x}$ as output. It is this approach which is behind the result summarized below in Proposition 27. It is in general a difficult road to follow and it has received little attention.

The indirect method, by far the most common one, involves also an observer. It consists in solving the stabilization problem not for the given system but for this observer, relying on the convergence of the estimation $\hat{x}$ towards the true value x to "transfer" this stabilization property to the given system. In this case, the disturbance we have to face is the correction term usually present in the observer and needed to obtain this convergence. It is this approach which is followed to established the Propositions 28, 29 and 30 below.

7.2 Separation "principle"

To solve the output feedback stabilization problem, what seems a "nominal" route to follow is on one hand to design a state feedback ϕ, on the other hand to design a state estimate $\hat{x}$ and to implement

$$u = \phi(\hat{x})$$

as control law. This route is known as "the separation principle". In the case of dynamics which are linear in the pair (x, u) and with an output function h also linear, this principle is fully justified and can be applied always when the problem has a solution.

Définition 14 ([(Gauthier et Bornard)]) *The system (7.1) is said uniformly (with respect to the control) observable if there exist two integers n_y and n_u and a locally Lipschitz function Φ such that, for any solution, denoted $x(t)$, $u_i(t)$ to simplify the notations, of :*

$$\dot{x} = f(x, u_0) \quad , \qquad \dot{u}_0 = u_1 \quad , \qquad \dots \quad , \qquad \dot{u}_{n_u} = v \ , \tag{7.3}$$

we have, for any t in the solution domain of definition,

$$x(t) = \Phi\left(y(t), \dots, y^{(n_y)}(t), u_0(t), \dots, u_{n_u}(t)\right) \tag{7.4}$$

where $y^{(i)}(t)$ is the ith derivative of $h(x(t))$ with respect to t.

Proposition 27 ([21]) *If there exists a $C^{\max\{nu+1,n_y\}}$ state feedback $\phi_e : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ which globally asymptotically stabilizes the origin of the system (7.1) and if this system is uniformly observable, then, for any compact set C_x, there exist continuous functions φ and ϕ and a compact set C_χ such that the origin is an asymptotically stable equilibrium of the closed loop system (7.1), (7.2) with a basin of attraction containing $C_x \times C_\chi$.*

Proof : The proof of this Proposition is given in [21]. It relies on backstepping to design a state feedback for the system (7.3) and involves a high gain observer to estimate the state x from (7.4) and the auxiliary system :

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad , \qquad \dots \quad , \qquad \dot{y}_{n_y} = \Psi_{n_y}(x, u_0, \dots, u_{n_y}) \quad , \qquad y = y_1 \ .$$

This result which has been extended by [(Atassi and Khalil)] and [(Shim and Teel)], is very satisfactory since it establishes the validity of the separation principle under quite reasonable assumptions. Nevertheless it gives only what is called semi-global stabilization since the basin of attraction is not the whole space but can contain any prescribed compact on which depends the output feedback. This restriction is not due to a technical weakness but to a true obstruction. For instance the output feedback stabilization problem can be solved semi-globally for the system :

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad , \qquad \dot{x}_2 = x_2^3 + u \quad , \qquad y = x_1 \ .$$

But we have proved in [22] that it cannot be solved globally. The missing property is what we have called the unboundedness property which says that, if, along a solution, the state x goes to infinity in norm in finite time, then it must be the same for the input-output pair (u, y). In the above example, this property does not hold since the component x_2 can escape along a solution so fast, that its time integral $y = x_1$ remains bounded. All the results dealing with the global case must have an assumption implying this property. It has been shown by [(Angeli et Sontag)] that it is related with the existence of a state norm observer. In [7], we have shown that with such an observer the result in Proposition 27 can be made global.

7.3 Case of input to state stable inverse dynamics

Let us assume that we can find coordinates $x = (z, x_1, \ldots, x_p)$ such that the dynamics of the system (7.1) take the form[1] :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z} &=& f_z(z, x_1)\ , \\ \dot{x}_1 &=& x_2 + a_1(x_1) + g_1(z, x_1)\ , \\ &\vdots& \\ \dot{x}_i &=& x_{i+1} + a_i(x_1, \ldots, x_i) + g_i(z, x_1)\ , \\ &\vdots& \\ \dot{x}_p &=& u + a_p(x_1, \ldots, x_p) + g_p(z, x_1)\ , \\ y &=& x_1\ , \end{array}\right. \tag{7.5}$$

where the x_i, u and y are in $\mathbb{R}$, z is in $\mathbb{R}^l$, the function $f_z : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ and the functions $g_i : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous, the functions a_i are C^{n+1-i} and we have :

$$a_i(0, \ldots, 0) = 0 \quad , \qquad g_i(0, 0) = 0\ .$$

In this system the dynamics of the z components are called inverse dynamics. They are the remaining dynamics when the behavior of the output y is imposed.

Proposition 28 ([23]) *We assume :*

- *the z sub-system in (7.5), with state z, input x_1, and output $g(z, x_1) = (g_i(z, x_1))$, is input-to-state stable and therefore there exist a class $\mathcal{KL}$ function β and a class $\mathcal{K}^\infty$ function γ_d such that, for any function x_1 in $L^\infty_{loc}([0, +\infty[)$, all the solutions $Z(z, t; x_1)$ satisfy :*

$$|g(Z(z, t; x_1), x_1(t))| \leq \max\left\{\beta(|Z(z, s; x_1)|, t - s)\ , \sup_{\tau \in [s,t]} \gamma_d(|x_1(\tau)|)\right\} \qquad \text{ppt } s \in [0, t)\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\ ; \tag{7.6}$$

- *there exist strictly positive real numbers s_0 and μ satisfying :*

$$\gamma_d(s) \leq \mu\, s \qquad \forall s \in [0, s_0]\ ; \tag{7.7}$$

- *there exists a real number L such that we have :*

$$|a_i(x_1, x_2 + \delta_2, \ldots, x_I + \delta_i) - a_i(x_1, x_2, \ldots, x_i)| \leq L \sum_{j=2}^{i} |\delta_j| \qquad \forall (x_1, \ldots, x_i, \delta_2, \ldots, \delta_i)\ . \tag{7.8}$$

Under this condition there exists a continuous stationary dynamic output feedback which stabilizes globally asymptotically the origin.

Proof : The proof of this Proposition can be found in the chapter 11.1 or [23]. It involves a high gain observer and relies on the design of an output feedback which exploits the assignation gain technique given in Proposition 26.

The result in this Proposition has been the starting point of two kinds of extensions.

On the one hand the unboundedness property is implied here by the Lipschitz condition (7.8). It still holds if L is allowed to depend on $y = x_1$. We have exploited this remark in [10]. This leads to have the observer gain not constant but following the evolution of $L(y)$ along the solution according to an update law of the form :

$$\dot{r} = a\, r\, [r - b - L(y)]\ ,$$

where a and b are strictly positive real numbers. This method called "dynamic scaling" has been used also by [8] and extended for instance by [(Krishnamurthy et Khorrami [a])] and [(Krishnamurthy et Khorrami [b])].

[1] A coordinate free condition implying the existence of such coordinates is given in [(Byrnes et Isidori), Corollary 5.7]. This form is mainly the only general form for which we know how to solve the output feedback global stabilization problem.

On the other hand Proposition 28 puts forward the fact that, to solve the output feedback stabilization[2], it is sufficient to work with bounds for some terms as here the functions g_i. This point of view is the one of what is called the domination techniques to which many authors have contributed. See for instance [16, (Jiang, Mareels, Hill et Huang), (Qian and Li), (Li, Qian et Frye), (Polendo et Qian)]. Along these lines [(Khalil et Saberi)] have shown that a linear output feedback designed for the chain of integrators :

$$\dot{\mathcal{X}}_1 = \mathcal{X}_2 \quad , \qquad \dots \quad , \qquad \dot{\mathcal{X}}_{p-1} = \mathcal{X}_p \quad , \qquad \dot{\mathcal{X}}_p = u \quad , \qquad y = \mathcal{X}_1 \ ,$$

actually allows us to solve, by using sufficiently high gains, the output feedback stabilization problem for any system whose dynamics are linear in the (state,control) pair, with a linear output function, a relative degree p and with input-to-state stable inverse dynamics.

To write an extension of this result to the nonlinear case, we adopt also the chain of integrators as simplified model for the system (7.5). This leads us to rewrite the dynamics of this system as :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z} & = & f_z(z, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_p) \ , \\ \dot{\mathcal{X}}_1 & = & \mathcal{X}_2 \ + \ g_1(z, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_p) \ , \\ & \vdots & \\ \dot{\mathcal{X}}_i & = & \mathcal{X}_{i+1} \ + \ g_i(z, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_p) \ , \\ & \vdots & \\ \dot{\mathcal{X}}_n & = & u \ + \ g_p(z, \mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_p) \ , \\ y & = & \mathcal{X}_1 \ , \end{array} \right. \tag{7.9}$$

where, again, $\mathcal{X}_i$, u and y are in $\mathbb{R}$, z is in $\mathbb{R}^l$, the function $f_z : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^l$ and the functions $g_i : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are continuous and we have :

$$g_i(0, 0, \dots, 0) \ = \ 0 \ .$$

Proposition 29 ([3]) *Assume the z sub-system in (7.9), with state z, input $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_i)$, and output $g(z, \mathcal{X}) = (g_i(z, \mathcal{X}))$, is input-to-state stable and therefore there exist a class $\mathcal{KL}$ function β and continuous functions $\gamma_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$, which are zero at the origin, such that, for any function $\mathcal{X}$ in $L^\infty_{loc}([0, +\infty[)$, all the solutions $Z(z, t; \mathcal{X})$ satisfy :*

$$|g_i(Z(z,t;\mathcal{X}), \mathcal{X}(t))| \ \leq \ \max \left\{ \beta(|Z(z,s;\mathcal{X})|, t-s) \, , \ \sup_{\tau \in [s,t]} \gamma_i(|\mathcal{X}(\tau)|) \right\} \qquad \text{ppt } s \in [0,t) \ , \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Under this condition, if there exist real numbers c_0, c_∞, d_0 and d_∞ satisfying :

$$-1 \ < \ d_0 \ \leq \ d_\infty \ < \ \frac{1}{p-1}$$

and :

$$\gamma_i(\mathcal{X}) \ \leq \ c_0 \sum_{j=1}^{i} |\mathcal{X}_j(\kappa)|^{\frac{1-d_0(n-i-1)}{1-0(n-j)}} \ + \ c_\infty \sum_{j=1}^{i} |\mathcal{X}_j(\kappa)|^{\frac{1-d_\infty(n-i-1)}{1-d_\infty(n-j)}} \qquad \forall i \in \{1, \dots, p\} \ , \tag{7.10}$$

or :

$$\gamma_i(\mathcal{X}) \ \leq \ c_0 \sum_{j=i+2}^{n} |\mathcal{X}_j(\kappa)|^{\frac{1-d_0(n-i-1)}{1-d_0(n-j)}} \ + \ c_\infty \sum_{j=i+2}^{n} |\mathcal{X}_j(\kappa)|^{\frac{1-d_\infty(n-i-1)}{1-d_\infty(n-j)}} \qquad \forall i \in \{1, \dots, p\} \ , \tag{7.11}$$

then there exists a continuous stationary dynamic output feedback which stabilizes globally asymptotically the origin.

We observe that in the right hand side of inequality (7.10), the components $\mathcal{X}_1$ to $\mathcal{X}_i$ only are allowed to be present. This a feedback-like form as discussed in paragraph 5.3. Instead in (7.11), it is the components $\mathcal{X}_{i+2}$ to $\mathcal{X}_p$ only, à la feedfoward form of paragraph 5.4.

Proof : The Proof of this Proposition is given in [3]. It relies on the notion of homogeneity in the bi-limit which, for a continuous function ψ, says that

[2]This is not true for tracking.

1. there exists a $n+1$-uplet $(r_{0,1},\dots,r_{0,n},d_0)$ of strictly positive real numbers and a continuous function ψ_0 not identically zero such that, for any compact set C of $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ and any strictly positive real number ε, there exists a strictly positive real number λ_0 such that we have :

$$\max_{x\in C}\left|\frac{\psi(\lambda^{r_{0,1}}x_1,\dots,\lambda^{r_{0,n}}x_n)}{\lambda^{d_0}}-\psi_0(x)\right| \le \varepsilon \quad , \qquad \forall \quad \lambda \in]0,\lambda_0] \ ;$$

2. there exists a $n+1$-uplet $(r_{\infty,1},\dots,r_{\infty,n},d_\infty)$ of strictly positive real numbers and a continuous function ψ_∞ not identically zero such that, for any compact set C of $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ and any strictly positive real number ε, there exists a strictly positive real number λ_∞ such that we have :

$$\max_{x\in C}\left|\frac{\psi(\lambda^{r_{\infty,1}}x_1,\dots,\lambda^{r_{\infty,n}}x_n)}{\lambda^{d_\infty}}-\psi_\infty(x)\right| \le \varepsilon \quad , \qquad \forall \quad \lambda \ge \lambda_\infty \ .$$

We have established in [3] some results which allow us to work with systems defined by vector fields which are homogeneous in the bi-limit and in particular we have given feedback and observer designs.

7.4 Case of stabilizable inverse dynamics

The assumptions on the z sub-system mentioned in the previous paragraph allow us to use domination techniques and in particular to ignore simply this z component. When these assumptions do not hold, this component has to be taken into account in the feedback design also.

We assume that the dynamics can be decomposed as :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot z &=& f_z(z,x_1)\ , \\ \dot x_1 &=& a_1(z,x_1)\,x_2 \ +\ b_1(z,x_1)\ , \\ &\vdots& \\ \dot x_i &=& a_i(z,x_1,\dots,x_i)\,x_{i+1} \ +\ b_i(z,x_1,\dots,x_i)\ , \\ &\vdots& \\ \dot x_p &=& a_p(x_1)\,u \ +\ b_p(z,x_1,\dots,x_p)\ , \\ y &=& x_1\ , \end{array}\right. \tag{7.12}$$

where the functions a_i and b_i are sufficiently many times differentiable, the a_i taking strictly positive values. We observe that, by modifying the coordinates x_i, we can change arbitrarily the functions a_1 to a_{p-1} and b_1 to b_{p-1}. To simplify the notations, by denoting $\xi=(z,x_1,\dots,x_p)$, we rewrite the above equations in the more compact form[3] :

$$\dot\xi \ =\ A(\xi,y)\,\xi \ +\ B(y)\,u \quad , \qquad \dot y \ =\ C(\xi,y)\ .$$

Proposition 30 ([4]) *If :*

1. *there exist functions a_1 to a_{p-1}, with strictly positive values, functions b_1 to b_{p-1}, C^p functions $y\mapsto K(y):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n-1}$ and $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{+*}$ and a positive definite matrix P satisfying :*

$$P\,\frac{\partial(A-KC)}{\partial\xi}(\xi,y) \ +\ \frac{\partial(A-KC)}{\partial\xi}(\xi,y)^T P \ <\ -k(y)^2\,\frac{\partial C}{\partial\xi}(\xi,y)^T\,\frac{\partial C}{\partial\xi}(\xi,y) \qquad \forall(\xi,y)\ ; \tag{7.13}$$

2. *the system :*

$$\dot\xi \ =\ A(\xi,0)$$

is zero-state detectable on $\mathbb{R}^{n-1}$ with the function $\xi\mapsto C(\xi,0)$;

[3] This compact form puts forward why a_p is allowed to depend on $x_1=y$ only. There is no loss of generality since we can always extend the dynamic to satisfy it.

3. there exist a C^{p+1} function ϕ_z, a C^{p+1} Lyapunov function V_z, a positive definite function α_z and a class $\mathcal{K}^\infty$ function γ_z such that we have :

$$\limsup_{s\to+\infty} \frac{\gamma_z(s)}{s^2} > 0 \quad , \quad \frac{\partial V_z}{\partial z}(z)\left[f_z(z,\phi_z(z)) + K_z(\phi_z(z))\, d\right] \le -\alpha_z(z) + \gamma_z(|d|) \ , \tag{7.14}$$

where K_z is the z-component of K above,

then there exists a continuous stationary dynamic output feedback which stabilizes globally asymptotically the origin.

Proof : See the chapter 11.2 or [4].

Bibliographical Notes

In this chapter I have presented a part only of the results I have obtained on the output feedback stabilization problem, and this part represents itself nearly nothing compared to all what has been published on this topic. See the references in [1]. However, most of all these many results are not satisfactory when dealing with applications. They ask for the knowledge of the dynamics in the forms (7.5), (7.9) or (7.12) which are usually difficult to write when they are known to exist. And more importantly they do not take into account typical constraints on the input.

The results reported here rely on the existence of an observer, a high gain observer in Propositions 27 and 28, an extension of high gain observer via homogeneity in the bi-limit in Proposition 29 and a reduced order observer in Proposition 30. To obtain less restrictive statements, we need to make progress in observer theory which remains rudimentary. This motivated me to devote part of my research work to this theme. See for instance [2, 5, 6].

Chapitre 8

Conclusion

The results I have summarized in this memoir make a small extract, which I hope representative enough, of what has been produced by the nonlinear control community during these twenty last years on the themes of stabilization and disturbance attenuation. Once "digested" and organized, this production makes something coherent and consistent and gives answers to many questions of mathematical nature.

But, in this way, are we better equipped to deal with applications ? "Applications" or more exactly "applicability" is the key word in this field of mathematics applied to automatic control. Answers to mathematical questions are not sufficient. We must address also the specific aspects coming from applications.

As already written about output feedback, I consider that only a few of the Propositions stated in this memoir has a direct interest for applications. Both the assumptions and the answers may be too far away from "reality" and its constraints. Nevertheless, from my experience, I can claim that the steps in their proofs, the way to approach the problems they propose, the design they include are all very useful to have in our "wallet" when we face applications.

Also all these results are presented as existence results although most of them give expressions for the feedbacks. But the qualitative aspect only is dealt with. The quantitative one, though the most important, is not addressed.

In conclusion, there is still a lot to do.

Appendix : Sketch of proof of Theorem 16.

8.1 Proof of 1 ⇔ 2

The implication 2 ⇒ 1 is trivial; just pick $f = f_\delta$.

To prove the converse, we start by observing that the basin of attraction $\mathcal{A}$ is an open set and that there exists a class $\mathcal{KL}$ function β such that, for any x in $\mathcal{A}$, each solution solution $X(x,t)$ is defined at least on $[0,+\infty[$ and satisfies :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)) \;\leq\; \beta(\varpi_{\mathcal{A}}(x),t) \qquad \forall t\in[0,+\infty[\;. \tag{8.1}$$

From this point, the function δ can be constructed on the following sequence C_i of compacts sets contained in $\mathcal{A}$:

$$C_i \;=\; \{x\,:\, r_i \leq \varpi_{\mathcal{A}}(x) \leq r_{i+1}\} \qquad i=0,\pm1,\pm2,\dots$$

by invoking sequential compactness of the solutions of (5.3). See [(Filippov), Theorems 5, §1] for instance.

8.2 Proof of 1 ⇔ 3

The implication 3 ⇒ 1 is a direct consequence of the properties of the function V and the results known on differential inequalities.

To prove the converse, the starting point is to use the property that the function β in (8.1) satisfies (see [(Sontag [e]), Proposition 7]) :

$$\alpha_1(\beta(r,s)) \;\leq\; \alpha_2(r)\,\exp(-2\lambda s) \qquad \forall(r,s)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\;.$$

where λ is a positive real number and α_1 and α_2 are class $\mathcal{K}^\infty$ functions, α_1 being also C^1. Then, by following for instance [(Yoshizawa), (19.9)] or [15], the idea is to pick :

$$V(x) \;=\; \sup_{t\geq 0}\left\{\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)))\exp\left(\lambda t\right)\right\}\;. \tag{8.2}$$

since, when the derivative makes sense, this leads to :

$$\dot{\overbrace{V(x)}} \;\leq\; -\lambda\,V(x)\;.$$

This choice for V is not convenient since solutions may not be unique. To round this difficulty, we take advantage of point 2 in the Theorem. It allows us to approximate f by a locally Lipschitz function f_a while preserving asymptotic stability of the origin. So, in (8.2), we can replace the solution $X(x,t)$ of (5.3) by the one, unique, $X_a(x,t)$ of :

$$\dot{x} \;=\; f_a(x)\;.$$

In this way, we get :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\,f_a(x) \;\leq\; -\lambda\,V(x)\;.$$

But we are interested in $\frac{\partial V}{\partial x}f$ and not in $\frac{\partial V}{\partial x}f_a$. So we have to be careful in our way of selecting f_a in order to get possibly :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\,f(x) \;\leq\; \frac{\partial V}{\partial x}(x)\,f_a(x)\;.$$

This leads us to use actually not one but $2n$ approximations, each one being defined as :

$$f_j(x) \;=\; f(x) \;+\; \frac{n}{n+1}\delta(x)e_j \;+\; \frac{1}{n+1}\delta(x)u_j(x) \;, \tag{8.3}$$

where δ is the function given in point 2 of the Theorem, the e_1 to e_n are the vectors of an orthonormal basis of $\mathbb{R}^n$ and the e_{n+1} to e_{2n} are simply the $-e_1$ to $-e_n$. The interest of these expressions (8.3) is that they satisfy (5.4) and so all the solutions $X_j(x,t)$ of :

$$\dot{x} \;=\; f_j(x) \tag{8.4}$$

satisfy also (8.1). Moreover, we can show that if we have a C^1 function $V : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ satisfying :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f_j(x) \;\leq\; -\lambda\, V(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A} \;, \quad \forall j \in \{1, \ldots, 2n\} \;,$$

with λ a strictly positive real number, then we have also :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x) \;\leq\; -\lambda V(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A} \;.$$

But then, we are facing another difficulty. Now, at each point x in $\mathcal{A}$, we do not have a single value $f_a(x)$ for $\dot{x}$, but this whole finite set $f_j(x)$. So we must replace the ordinary differential equation :

$$\dot{x} \;=\; f_a(x) \;,$$

by the differential inclusion :

$$\dot{x} \;\in\; \{f_1(x), \ldots, f_{2n}(x)\} \;. \tag{8.5}$$

From this point, we could go on with invoking what is known for differential inclusions whose right hand side is upper semi continuous and with non empty, compact and convex values. A more elementary and self contained way of proceeding consists in defining a solution $\mathfrak{X}(x,t)$ of (8.5) as a concatenation of pieces of solutions $X_j(x,t)$ of (8.4). In particular this allows us to take advantage from all what we know on these X_j directly.

With this idea in mind, the proof is made in the chapter 9.1 in 4 steps :

1. Properties of the solutions $\mathfrak{X}(x,t)$ of (8.5) and asymptotic stability of the origin for the system (8.5).
2. Explicit construction of the f_j and local Lipschitzness of the $\mathfrak{X}$.
3. Proof that the function $V_0 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ defined as :

$$V_0(x) \;=\; \sup_{\mathfrak{X}, t\geq 0} \left\{ \alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(x,t)))\, \exp(\lambda t) \right\}$$

is locally Lipschitz on $\mathcal{A} \setminus \{0\}$, positive definite and proper on $\mathcal{A}$ and satisfies :

$$\limsup_{h\to 0_+} \frac{V_0\left(x + hf_j(x)\right) - V_0(x)}{h} \;\leq\; -\lambda\, V_0(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A} \;, \quad \forall j \in \{1, \ldots, 2n\} \;.$$

4. Regularization of V_0 following [(Wilson), Theorem 1.3] and [(Lin, Sontag et Wang), Lemma 4.3].

Démonstrations

Cette partie contient les démonstrations des résultats énoncés dans le texte ci-dessus sauf celles des Propositions 12 et 14,

Chapitre 9

Démonstrations des résultats sur "Fonctions de Lyapunov assignables et Stabilisation"

9.1 Preuve du Théorème 1

9.1.1 Preuve de 1 $\Leftrightarrow$ 2

Le propriété 2 $\Rightarrow$ 1 est une trivialité puisqu'il suffit de prendre $f = f_\delta$.

Nous concentrons donc notre attention sur la démonstration de la réciproque qui, notons le, est déjà démontrée dans [(Krasovskii)], [(Clarke, Ledyaev et Stern), Proposition 3.1] et [15, §5.3.2].

L'origine étant asymptotiquement stable de bassin d'attraction $\mathcal{A}$, il existe une fonction β, de classe $\mathcal{KL}$ telle que, pour tout x dans $\mathcal{A}$, chaque solution $X(x,t)$ est définie au moins sur $[0,+\infty[$ et vérifie :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)) \;\leq\; \beta(\varpi_{\mathcal{A}}(x),t) \qquad \forall t\in[0,+\infty[\ . \tag{9.1}$$

Définissons alors, comme suit, un ensemble de triplets de réels strictement positifs $(r_i, \varepsilon_i, T_i)$ indexés par les nombres entiers positifs et négatifs $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Nous prenons :

$$r_0 \;=\; 1 \quad , \qquad r_{i+1} \;=\; 2\,\beta(r_i,0)\ . \tag{9.2}$$

Puisque la fonction $s \mapsto \beta(s,0)$ est de classe $\mathcal{K}^\infty$ satisfaisant, d'après l'inégalité (9.1),

$$s \;\leq\; \beta(s,0) \qquad \forall s\geq 0\ ,$$

les r_i sont bien définis et donnent une double suite croissante satisfaisant :

$$\begin{aligned} r_i \;&\geq\; 2^i \qquad && \forall i\geq 0\ ,\\ &\leq\; 2^i && \forall i\leq 0\ . \end{aligned}$$

Les intervalles $[r_i, r_{i+1}[$ couvrent donc $\mathbb{R}_{+*}$. Nous prenons alors les ε_i comme :

$$\varepsilon_i \;=\; \frac{r_{i-1}}{2}\ . \tag{9.3}$$

Enfin nous prenons les T_i assez grands pour vérifier :

$$\beta(r_{i+1},T_i) \;\leq\; \frac{r_{i-1}}{2}\ . \tag{9.4}$$

Nous appelons C_i les compacts suivants inclus dans $\mathcal{A}$:

$$C_i \;=\; \{x\,:\, r_i\leq \varpi_{\mathcal{A}}(x)\leq r_{i+1}\}\,.$$

Avec notre construction, le fait que $\mathcal{A}$ est ouvert et que la fonction $\varpi_{\mathcal{A}}$ est définie positive et propre sur $\mathcal{A}$ implique que tout point x quelconque de $\mathbb{R}^n$:

– soit est dans $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}$,
– soit est l'origine,
– soit est dans un des compacts C_i.

D'après (9.1), pour tout x dans C_i, chaque solution associée $X(x,t)$ vérifie :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)) \;\leq\; \beta(r_{i+1},0) \;=\; \frac{r_{i+2}}{2} \tag{9.5}$$

et :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,T_i)) \;\leq\; \frac{r_{i-1}}{2}\ . \tag{9.6}$$

En conséquence de la compacité séquentielle des solutions de

$$\dot{x} \;=\; f(x)\ , \tag{9.7}$$

(voir [(Filippov), Theorems 5, §1] par exemple) et avec la continuité de la fonction $\varpi_{\mathcal{A}}$, pour chaque i, nous pouvons trouver un réel strictement positif δ_{0i} tel que, pour tout point $x_{i\delta}$ dans C_i et toute fonction $f_{i\delta} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ continue vérifiant :

$$\forall\, y \in \mathcal{O}\ ,\ \exists\, z \in \mathcal{O}\ :\ |z-y| + |f_{i\delta}(y) - f(z)| \;\leq\; \delta_{0i}\ , \tag{9.8}$$

chaque solution $X_{i\delta}(x_{i\delta},t)$ de :

$$\dot{x} \;=\; f_{i\delta}(x) \tag{9.9}$$

est définie au moins sur $[0,T_i]$ et nous pouvons lui associer une condition initiale x dans C_i et une solution $X(x,t)$ de (9.7) satisfaisant :

$$|\varpi_{\mathcal{A}}(X_{i\delta}(x_{i\delta},t)) - \varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t))| \;\leq\; \varepsilon_i \qquad \forall t \in [0,T_i]\ .$$

Avec (9.5) et la définition (9.3) de ε_i, ceci implique, pour tout t de $[0,T_i]$,

$$\begin{aligned} \varpi_{\mathcal{A}}(X_{i\delta}(x_{i\delta},t)) \;&\leq\; \frac{r_{i+2}}{2} + \varepsilon_i\ , \\ &\leq\; r_{i+2}\ . \end{aligned} \tag{9.10}$$

Aussi, avec (9.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \varpi_{\mathcal{A}}(X_{i\delta}(x_{i\delta},T_i)) \;&\leq\; \frac{r_{i-1}}{2} + \varepsilon_i\ , \\ &\leq\; r_{i-1}\ . \end{aligned} \tag{9.11}$$

Ainsi, toute solution de (9.9), issue d'un point de C_i et observée sur l'intervalle $[0,T_i]$, entre dans C_{i-1}, peut-être après être passée dans C_{i+1}.

Définissons la fonction $\widetilde{\delta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}(x) \;&=\; 0 && \text{si } x = 0\ , \\ &=\; \min\{\delta_{0(i-1)}, \delta_{0i}, \delta_{0(i+1)}\} && \text{si } x \in C_i\ , \\ &=\; 0 && \text{si } x \notin \mathcal{A}\ . \end{aligned}$$

Observons que, si x est un point de $\mathcal{A} \setminus \{0\}$, il est dans un compact C_i et donc, puisque la fonction $\varpi_{\mathcal{A}}$ est continue, dans l'ouvert $\{y : r_{i-1} < \varpi_{\mathcal{A}}(y) < r_{i+2}\}$. Ainsi, pour toute suite x_k convergeant vers x, il existe un entier K tel que, pour tous les $k \geq K$, $\widetilde{\delta}(x_k)$ est dans l'ensemble $\{\delta_{0(i-2)}, \delta_{0(i-1)}, \delta_{0i}, \delta_{0(i+1)}, \delta_{0(i+2)}\}$ et donc non nul. Nous pouvons alors définir la fonction $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ cherchée comme l'inf convolution :

$$\delta(x) \;=\; \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ \widetilde{\delta}(y) + |y-x| \right\}\ . \tag{9.12}$$

Cette fonction a les propriétés suivantes :

- Elle est Lipschitzienne, de constante de Lipschitz égale à 1. En effet, soient x_1 et x_2 deux points de $\mathbb{R}^n$ tel que $\delta(x_1)$ est plus grand que $\delta(x_2)$. Du fait de la présence du inf dans la définition de la fonction δ, pour tout réel η strictement positif, nous pouvons trouver $x_{2\eta}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}(x_{2\eta}) + |x_{2\eta} - x_2| \;&\leq\; \delta(x_2) \;+\; \eta \;, \\ \delta(x_1) \;&\leq\; \widetilde{\delta}(x_{2\eta}) + |x_{2\eta} - x_1| \end{aligned}$$

  et donc :

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; \delta(x_1) \;-\; \delta(x_2) \;&\leq\; \left(\widetilde{\delta}(x_{2\eta}) + |x_{2\eta} - x_1|\right) \;-\; \left(\widetilde{\delta}(x_{2\eta}) + |x_{2\eta} - x_2|\right) \;+\; \eta \;, \\ &\leq\; |x_1 - x_2| \;+\; \eta \;. \end{aligned}$$

  Ceci étant vrai pour tout η, nous avons :

$$0 \;\leq\; \delta(x_1) \;-\; \delta(x_2) \;\leq\; |x_1 - x_2| \;.$$

- Elle est définie positive sur $\mathcal{A}$. En effet $\delta(0)$ est nul puisque nous avons :

$$\delta(0) \;\leq\; \widetilde{\delta}(0) \;=\; 0 \;.$$

  De plus, si, pour x dans $\mathcal{A} \setminus \{0\}$, $\delta(x)$ est nul, alors, d'après la définition (9.12), il existe une suite x_k dans $\mathbb{R}^n$ convergeant vers x telle que $\widetilde{\delta}(x_k)$ converge vers 0. Mais nous avons vu que ceci est impossible.

- Pour x dans C_i, nous avons :

$$\delta(x) \;\leq\; \widetilde{\delta}(x) \;=\; \min\{\delta_{0(i-1)}, \delta_{0i}, \delta_{0(i+1)}\} \;. \tag{9.13}$$

Montrons que cette fonction δ répond bien à notre question. Soit donc $f_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue satisfaisant :

$$\forall y \in \mathcal{A} \,,\; \exists z \;:\; |y - z| \;+\; |f_\delta(y) - f(z)| \;\leq\; \delta(y) \;. \tag{9.14}$$

Puisque la fonction δ s'annule à l'origine, nous avons :

$$f_\delta(0) \;=\; f(0) \;=\; 0 \;.$$

L'origine est donc une solution de

$$\dot{x} \;=\; f_\delta(x) \;. \tag{9.15}$$

Soit x un point quelconque de $\mathcal{A} \setminus \{0\}$. Il existe un entier i tel que nous avons :

$$r_i \;\leq\; \varpi_{\mathcal{A}}(x) \;<\; r_{i+1} \;.$$

Or, d'après (9.13), pour tous les points y de $C_{i-1} \bigcup C_i \bigcup C_{i+1}$, nous avons :

$$\delta(y) \;\leq\; \delta_{0i} \;.$$

Donc, d'après (9.14), (9.8) est satisfait pour tout y de $C_{i-1} \bigcup C_i \bigcup C_{i+1}$. Ceci établit que la fonction f_δ coïncide avec une fonction $f_{i\delta}$ quand elle est restreinte à[1] $C_{i-1} \bigcup C_i \bigcup C_{i+1}$. Soit $X_\delta(x,t)$ une solution de (9.15). Elle est définie au moins sur $[0, T_i]$ et, d'après (9.10), nous avons :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X_\delta(x,t)) \;\leq\; r_{i+2} \qquad \forall t \in [0, T_i] \;. \tag{9.16}$$

Aussi, d'après (9.11) et la continuité de la fonction $t \mapsto X_\delta(x,t)$, il existe un temps $T_{xi} \leq T_i$ satisfaisant :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X_\delta(x, T_{xi})) \;=\; r_{i-1} \tag{9.17}$$

et donc :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X_\delta(x, T_{xi})) \;<\; r_i \;.$$

[1]Mais comme nous ne nous intéressons pour le moment aux solutions que tant qu'elles restent dans cet ensemble, le comportement de f à l'extérieur ne nous préoccupe pas.

Observons que, pour tout $t \geq T_{xi}$, $X_\delta(x,t)$ est aussi une solution de (9.15) au temps $t - T_{xi}$ de condition initiale $X_\delta(x, T_{xi})$. Donc, au temps T_{xi}, nous nous retrouvons exactement dans la même situation qu'au temps 0 sauf que nous avons une condition initiale dans C_{i-1} au lieu de C_i. Nous pouvons donc répéter l'argument ci-dessus pour montrer que nous avons :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X_\delta(x,t)) \ \leq \ r_{i+1} \qquad \forall t \in [T_{xi}, T_{xi} + T_{i-1}] \tag{9.18}$$

et :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X_\delta(x, T_{xi} + T_{x(i-1)})) \ = \ r_{i-2} \tag{9.19}$$

pour un temps $T_{x(i-1)} \leq T_{i-1}$. Et ainsi de suite ... Nous en déduisons que, pour tout $j < i$, il existe un temps τ_{xj},

$$\tau_{xj} \ = \ \sum_{k=i}^{j+1} T_{xk} \ \leq \ \sum_{k=i}^{j+1} T_k$$

tel que nous avons, d'après (9.17) et (9.19),

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X_\delta(x, \tau_{xj})) \ = \ r_j$$

et, d'après (9.16) et (9.18),

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X_\delta(x,t)) \ \leq \ r_{j+2} \qquad \forall t \in [\tau_{xj}, \tau_{xj} + T_j] \ . \tag{9.20}$$

Soit alors (r, ε) est une paire de réels strictement positifs. Nous pouvons trouver i et j satisfaisant :

$$r_{i+1} \ > \ r \ \geq \ r_i \quad , \qquad \varepsilon \ \geq \ r_{j+2} \ .$$

Avec la définition (9.2) des r_i et le fait que β est de classe $\mathcal{KL}$, ceci implique successivement :

$$\begin{array}{rcl} 2\,\beta(r,0) & \geq & 2\,\beta(r_i, 0) = r_{i+1} \ , \\ 2\,\beta\left(2\beta(r,0)\,,\,0\right) & \geq & 2\,\beta(r_{i+1}, 0) = r_{i+2} \ . \end{array} \tag{9.21}$$

Le raisonnement ci-dessus montre que, pour chaque condition initiale x vérifiant :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(x) \ \leq \ r \ ,$$

chaque solution $X_\delta(x,t)$ de (9.15) est définie sur $[0, +\infty[$ et nous avons[2] :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)) \ \leq \ 2\,\beta\left(2\beta(\varpi_{\mathcal{A}}(x), 0)\,,\,0\right) \qquad \forall t \in [0, +\infty[\tag{9.22}$$

et, pour T donné par :

$$T \ = \ \sum_{k=i}^{j+1} T_k \ ,$$

nous avons, d'après (9.20),

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)) \ \leq \ \varepsilon \qquad \forall t \in [T, \infty[\ . \tag{9.23}$$

L'inégalité (9.22) est équivalente à la propriété de stabilité. En notant ici que nous avons une uniformité par rapport aux fonctions f_δ puisque rien dans cette inégalité ne dépend de ces fonctions. De même (9.23) est équivalente à la propriété d'équi-attractivité avec T dépendant de la paire (r, ε), mais pas de f_δ. Nous pouvons donc conclure en reprenant les arguments de la démonstration de [(Lin, Sontag et Wang), Proposition 2.5] (voir aussi [15, Proposition 1]). La fonction $\beta_{\varpi_{\mathcal{A}},\delta}$ alors obtenue est bien indépendante de f_δ.

9.1.2 Preuve de 1 ⇔ 3

Le fait que 3 ⇒ 1 est une conséquence des propriétés de la fonction V et des solutions des inégalités différentielles. Nous concentrons donc notre attention sur la démonstration de la réciproque. Pour cela nous pouvons nous appuyer sur l'équivalence 1 ⇔ 2 démontrée ci-dessus.

[2] En prenant $r = \varpi_{\mathcal{A}}(x)$ dans (9.21).

Introduction

À partir de ceci, une première idée, due à [(Massera)], pour exhiber la fonction V est de la prendre comme une norme de la solution passant par x, par exemple la norme L^p :

$$V(x) \;=\; \left(\int_0^\infty |X(x,t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \;. \tag{9.24}$$

En effet, dans ce cas, nous obtenons simplement, au moins formellement à ce stade :

$$\dot{\overbrace{V(x)}} \;=\; -\frac{|x|^p}{pV(x)^{p-1}} \;.$$

Malheureusement, en procédant ainsi, nous nous heurtons à deux difficultés :

1. Nous ne sommes pas garantis de la convergence de l'intégrale dans (9.24). Pour contourner cette difficulté, nous pouvons tirer profit de (9.1). En effet, la fonction β dans cette inégalité étant de classe $\mathcal{KL}$, pour tout réel λ strictement positif, il existe deux fonctions α_1 et α_2 de classe $\mathcal{K}^\infty$, α_1 étant aussi de classe C^1, satisfaisant :
$$\alpha_1(\beta(r,s)) \;\leq\; \alpha_2(r)\exp(-2\lambda s) \qquad \forall (r,s)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ \;. \tag{9.25}$$
Voir [(Sontag [e]), Proposition 7]. Il s'en suit que $\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)))$ décroît vers 0 comme $\exp(-2\lambda t)$ lorsque t tend vers l'infini. Ceci nous conduit à modifier (9.24) en :
$$V(x) \;=\; \left(\int_0^\infty \alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \;,$$
où l'intégrande est maintenant exponentiellement convergeant vers 0. Nous pouvons même prendre :
$$V(x) \;=\; \left(\int_0^\infty \alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)))^p \exp(p\lambda t) dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
avec pour objectif d'obtenir :
$$\begin{aligned}\dot{\overbrace{V(x)}} \;&=\; -\lambda V(x) \;-\; \frac{\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(x))^p}{pV(x)^{p-1}} \;,\\ &\leq\; -\lambda V(x) \;.\end{aligned}$$
Dans la suite, comme dans par exemple [(Yoshizawa), (19.9)] ou [15], nous prenons pour simplifier $p=\infty$, et donc :
$$V(x) \;=\; \sup_{t\geq 0}\left\{\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)))\exp(\lambda t)\right\} \;. \tag{9.26}$$
Nous espérons avoir ainsi :
$$\dot{\overbrace{V(x)}} \;\leq\; -\lambda V(x) \;.$$

2. S'il n'y a pas unicité des solutions, ce qui peut être le cas vu que la fonction f n'est que continue, laquelle devons-nous choisir dans la définition (9.26) pour être sûrs d'obtenir ainsi une fonction V au moins de classe C^1? Pour répondre à cette question, nous tirons profit du fait (point 2 de l'énoncé du Théorème) que nous pouvons approximer la fonction f par une fonction localement Lipschitzienne f_δ tout en préservant la stabilité asymptotique de l'origine. Ainsi, dans (9.26), nous pouvons remplacer la solution $X(x,t)$ de (9.7) par celle, unique, $X_\delta(x,t)$ de :
$$\dot{x} \;=\; f_\delta(x) \;.$$
Mais en procédant ainsi, nous obtenons l'inégalité :
$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f_\delta(x) \;\leq\; -\lambda V(x) \;. \tag{9.27}$$

Or ce qui nous intéresse est le signe du produit $\frac{\partial V}{\partial x} f$ et non pas celui du produit $\frac{\partial V}{\partial x} f_\delta$. Nous devons donc faire attention dans notre choix de l'approximation f_δ pour que nous ayons :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x) \;\leq\; \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f_\delta(x)\ . \tag{9.28}$$

Nous ne connaissons aujourd'hui aucune méthode simple pour construire une telle approximation. La solution que nous proposons consiste en la construction d'une famille d'approximations, chacune satisfaisant (9.27) avec la même fonction V, et telle que, pour chaque x, au moins une des fonctions de la famille satisfasse (9.28).

Après une remarque préliminaire, notre démonstration est donc faite en trois étapes :

1. Construction de la famille des approximations.
2. Étude des propriétés de la fonction V définie selon le principe de (9.26).
3. Régularisation de cette fonction qui s'avère n'être que localement Lipschitzienne.

Remarque préliminaire

Pour faire ces trois étapes, il est utile de ne pas travailler avec la fonction f elle-même mais avec une fonction modifiée de telle sorte que les solutions associées ne convergent vers l'origine qu'en temps infini. Pour cela, soit $\widetilde{f} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par :

$$\widetilde{f}(y) \;=\; \frac{f(y)\,|y|}{1 + |y| + |f(y)|}\ .$$

Elle est continue comme f et satisfait :

$$\widetilde{f}(y) \;\leq\; |y| \qquad \forall y \in \mathcal{O}\ .$$

Aussi, la fonction ℓ donnée par :

$$\ell(y) \;=\; \frac{|y|}{1 + |y| + |f(y)|}$$

est continue et définie positive sur $\mathcal{O}$. Alors, comme pour le système (9.7), l'origine est une solution asymptotiquement stable de :

$$\dot{y} \;=\; \widetilde{f}(y) \tag{9.29}$$

avec $\mathcal{A}$ comme bassin d'attraction. Définissons l'opérateur $\mathfrak{D}^+_{\cdot}\cdot$ comme, lorsque cela a un sens :

$$\mathfrak{D}^+_f \phi(x) \;=\; \limsup_{h \to 0_+} \frac{\phi\,(x + h f(x)) - \phi(x)}{h}\ . \tag{9.30}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}^+_{\widetilde{f}}(-|y|) \;&=\; \limsup_{h \to 0_+} \frac{-|y + h\widetilde{f}(y)| + |y|}{h}\ , \\
&\leq\; |\widetilde{f}(y)| \;\leq\; -(-|y|)\ .
\end{aligned}$$

Avec par exemple [(Szarski), Theorem 16.1], nous en déduisons que, pour tout y dans $\mathcal{A}$, toutes les solutions $Y(y,t)$ de (9.29) sont à valeurs dans $\mathcal{A}$ maximalement à droite sur $[0, +\infty[$ et satisfont :

$$-|Y(y,t)| \;\leq\; -|y|\, \exp(-t) \qquad \forall t \geq 0$$

ou encore :

$$|Y(y,t)| \;\geq\; |y|\, \exp(-t) \qquad \forall t \geq 0\ .$$

Enfin, si $V : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ est une fonction localement Lipschitzienne telle que $\mathfrak{D}^+_{\widetilde{f}} V$ ne prend que des valeurs non positives, nous avons :

$$\mathfrak{D}^+_f V(x) \;=\; \frac{1 + |x| + |f(x)|}{|x|}\, \mathfrak{D}^+_{\widetilde{f}} V(x) \;\leq\; \mathfrak{D}^+_{\widetilde{f}} V(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}\ .$$

Nous concluons de cette remarque que, pour les besoins de notre démonstration et sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la fonction f satisfait l'inégalité :

$$|f(x)| \;\leq\; |x| \qquad \forall x \in \mathcal{A} \tag{9.31}$$

et que donc les solutions de (9.7) satisfont (9.1) et :

$$|X(x,t)| \;\geq\; |x| \,\exp(-t) \qquad \forall (x,t) \in \mathcal{A} \times [0,+\infty[\;.$$

Famille d'approximations

Mise en route Notons e_j les vecteurs d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Soit $V : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 quelconque. En posant :

$$v_j(x) \;=\; \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, e_j \;,$$

nous avons :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) \;=\; \sum_j v_j(x)\, e_j^T \;.$$

Observons que, quitte à doubler la base en associant à chaque vecteur e_j son opposé en direction, i.e. à considérer la famille $\{e_1, -e_1, \ldots, e_j, -e_j, \ldots\}$ que nous re-notons $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$, nous pouvons associer à chaque x un ensemble $J(x)$ de n indices tel que nous avons :

$$v_j(x) \;\geq\; 0 \qquad \forall j \in J(x) \qquad , \qquad \frac{\partial V}{\partial x}(x) \;=\; \sum_{j \in J(x)} v_j(x)\, e_j^T \tag{9.32}$$

et :

$$\sum_{j \in J(x)} v_j(x) \;>\; 0 \qquad \forall x \in \mathcal{A} : \left|\frac{\partial V}{\partial x}(x)\right| \neq 0 \;. \tag{9.33}$$

L'idée consiste alors à prendre $2n$ vecteurs pour la famille des approximations, chacun défini par :

$$f_j(x) \;=\; f(x) \;+\; \frac{n}{n+1}\delta(x) e_j \;+\; \frac{1}{n+1}\delta(x) u_j(x) \;, \tag{9.34}$$

où δ est la fonction localement Lipschitzienne donnée par le point 2 de l'énoncé du Théorème et $u_j(x)$ est un vecteur quelconque de norme inférieure à 1. L'intérêt de cette expression est qu'elle nous donne :

$$|f_j(x) - f(x)| \;\leq\; \delta(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A} \;. \tag{9.35}$$

Donc toutes les solutions $X_j(x,t)$ de :

$$\dot{x} \;=\; f_j(x) \tag{9.36}$$

satisfont aussi (9.1).

Montrons maintenant que, si nous avons :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f_j(x) \;\leq\; -\lambda\, V(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A} \;, \quad \forall j \in \{1, \ldots, 2n\} \;, \tag{9.37}$$

avec λ positif, alors nous avons aussi :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x) \;\leq\; -\lambda V(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A} \;. \tag{9.38}$$

De la décomposition (9.32) et de l'identité :

$$\sum_{j \in J(x)} v_j(x) f_j(x)$$
$$= \; f(x) \sum_{j \in J(x)} v_j(x) \;+\; \frac{n}{n+1}\delta(x) \sum_{j \in J(x)} v_j(x) e_j \;+\; \frac{1}{n+1}\delta(x) \sum_{j \in J(x)} v_j(x) u_j(x) \;,$$

nous déduisons, pour tout x de $\mathcal{A} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x) \sum_{j\in J(x)} v_j(x) & \\
&= \sum_{j\in J(x)} v_j(x) \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f_j(x) \\
&\qquad - \frac{n}{n+1}\,\delta(x) \sum_{j\in J(x)} v_j(x) \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, e_j \;-\; \frac{1}{n+1}\,\delta(x) \frac{\partial V}{\partial x}(x) \sum_{j\in J(x)} v_j(x) u_j(x)\ , \\
&\leq - \sum_{j\in J(x)} v_j(x)\, \lambda\, V(x) \\
&\qquad - \frac{n}{n+1}\,\delta(x) \sum_{j\in J(x)} v_j(x)^2 \;+\; \frac{1}{n+1}\,\delta(x) \left| \sum_{j\in J(x)} v_j(x) e_j^T \right| \left| \sum_{j\in J(x)} v_j(x) u_j(x) \right|\ , \\
&\leq - \sum_{j\in J(x)} v_j(x)\, \lambda\, V(x) \;-\; \frac{n}{n+1}\,\delta(x) \sum_{j\in J(x)} v_j(x)^2 \;+\; \frac{1}{n+1}\,\delta(x) \sum_{j\in J(x)} v_j(x) \sum_{j\in J(x)} v_j(x)\ , \\
&\leq - \sum_{j\in J(x)} v_j(x)\, \lambda\, V(x) \;-\; \frac{n}{n+1}\,\delta(x) \sum_{j\in J(x)} v_j(x)^2 \;+\; \frac{1}{n+1}\,\delta(x)\, n \sum_{j\in J(x)} v_j(x)^2\ , \\
&\leq - \sum_{j\in J(x)} v_j(x)\, \lambda\, V(x)\ . \qquad (9.39)
\end{aligned}$$

Comme, d'après (9.37), $\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|$ est non nul si $V(x)$ est non nul, (9.38) résulte de (9.33).

Il ne nous reste donc qu'à choisir les fonctions u_j pour obtenir par (9.34) des fonctions f_j localement Lipschitziennes de sorte que les solutions $X_j(x,t)$ de (9.36) sont uniques sur $\mathcal{A}$. Nous verrons plus loin comment faire ce choix.

Pour le moment, nous faisons face à une nouvelle difficulté. En effet nous avons maintenant, en chaque point x de $\mathcal{A}$, non pas une seule valeur possible $f_\delta(x)$ pour $\dot{x}$, mais toute cette famille finie $f_j(x)$. Ceci nous conduit à considérer non plus l'équation différentielle :

$$\dot{x} \;=\; f_\delta(x)\ ,$$

mais l'inclusion différentielle :

$$\dot{x} \;\in\; \{f_1(x), \ldots, f_{2n}(x)\}\ . \qquad (9.40)$$

À partir de ce point, nous pourrions faire appel à la théorie des inclusions différentielles à second membre semi continue supérieurement et à valeurs des ensembles non vides, compacts et convexes. Mais, dans un souci de simplification et de complétude, nous préférons développer une théorie adaptée à nos besoins très particuliers.

La façon la plus simple de définir une solution pour (9.40) est de concaténer des morceaux de solutions où chaque morceau est donné par une solution $X_j(x,t)$ de (9.36). Rappelons que, si les fonctions f_j satisfont (9.35) avec la fonction δ donnée par le point 2 de l'énoncé du Théorème, pour tout x dans $\mathcal{A}$, toutes les solutions $X_j(x,t)$ sont définies et à valeurs dans $\mathcal{A}$ pour tout t positif. Pour ce faire,

1. nous divisons l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des temps non négatifs en morceaux. Soit donc une suite de temps t_e, strictement croissante et tendant vers l'infini avec l'entier e :

$$0 \;=\; t_0 \;<\; t_1 \;<\; \ldots \;<\; t_e \;<\; \ldots$$

2. nous définissons une fonction de sélection d'indice $S : \mathbb{R}_+ \to \{1, \ldots, 2n\}$ à valeurs constantes sur chaque intervalle $[t_e, t_{e+1})$ et telle que, à l'instant t, $S(t)$ est l'indice de la fonction prise dans la famille $\{f_1(x), \ldots, f_{2n}(x)\}$.

Avec ces définitions, nous pouvons définir une solution par morceaux $\mathfrak{X}(x,t)$ récursivement comme suit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathfrak{X}(x,0) & = & x \ , \\ \mathfrak{X}(x,t) & = & X_{S(t)}(x,t) \qquad \forall t\in[0,t_1[\ , \\ \mathfrak{X}(x,t_1) & = & X_{S(0)}(x,t_1) \ , \\ & \vdots & \\ \mathfrak{X}(x,t) & = & X_{S(t)}(\mathfrak{X}(x,t_e),t-t_e) \qquad \forall t\in[t_e,t_{e+1}[\ , \\ \mathfrak{X}(x,t_{e+1}) & = & X_{S(t_e)}(x,t_{e+1}-t_e) \ . \end{array}\right. \tag{9.41}$$

Chaque morceau $X_{S(t)}(\mathfrak{X}(x,t_e),t-t_e)$ étant bien défini et à valeurs dans $\mathcal{A}$, cette construction peut être continuée indéfiniment.

Définition 15 *Une fonction $\mathfrak{X}:\mathcal{A}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^n$ est dite solution issue de x du système (9.40) si c'est une solution par morceaux comme introduite ci-dessus.*

De cette définition et puisque S est une fonction constante par morceaux, nous déduisons directement qu'une solution $\mathfrak{X}(x,t)$ de (9.40) vérifie, pour t dans $[t_e,t_{e+1}]$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(x,t) &= X_{S(t_e)}(\mathfrak{X}(x,t_e),t-t_e) \ , \\ &= \mathfrak{X}(x,t_e) + \int_{t_e}^{t} f_{S(t_e)}(X_{S(t_e)}(\mathfrak{X}(x,t_e),s-t_e))\,ds \ , \\ &= \mathfrak{X}(x,t_e) + \int_{t_e}^{t} f_{S(t_e)}(\mathfrak{X}(x,s))\,ds \ , \\ &= \mathfrak{X}(x,t_e) + \int_{t_e}^{t} f_{S(s)}(\mathfrak{X}(x,s))\,ds \ . \end{aligned}$$

Il s'en suit que, pour tout réels non négatifs $t_1\leq t_2$, nous avons :

$$\mathfrak{X}(x,t_2) = \mathfrak{X}(x,t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f_{S(s)}(\mathfrak{X}(x,s)ds \ . \tag{9.42}$$

Remarque 9.43

1. Si $\mathfrak{X}(x,t)$ est une solution de (9.40) issue de x et si, pour un certain j, $X_j(y,t)$ est une solution de (9.36) à valeurs dans $\mathcal{A}$ passant par x à l'instant T, i.e. $x=X_j(y,T)$ alors $\mathfrak{X}(y,t)$ définie comme :

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(y,t) &= X_j(y,t) && \text{si} \quad t\in[0,T[\ , \\ &= \mathfrak{X}(x,t-T) && \text{si} \quad t\in[T,+\infty[\end{aligned}$$

   est une solution de (9.40). En d'autres termes la concaténation d'une solution de (9.36) avec une solution de (9.40) donne une solution de (9.40).

2. Si $\mathfrak{X}(x,t)$ est une solution de (9.40) issue de x, alors, pour tout s dans $[0,+\infty[$, la fonction $\mathfrak{Y}(t)$ définie par :

$$\mathfrak{Y}(t) = \mathfrak{X}(x,t+s)$$

   est aussi une solution de (9.40) mais issue de $\mathfrak{X}(x,s)$.

3. Si, il existe un réel positif F tel que chaque f_j satisfait :

$$|f_j(x)| \leq F\,|x| \qquad \forall x\in\mathcal{A} \ ,$$

   alors comme nous l'avons vu pour f, chaque solution solutions $X_j(x,t)$ satisfait,

$$|X_j(x,t)| \geq |x|\,\exp(-Ft) \quad \forall t\geq 0 \ .$$

Ainsi, pour toute solution $\mathfrak{X}(x,t)$ de (9.40), et tout t dans $[0,+\infty)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}|\mathfrak{X}(x,t)| &\geq |\mathfrak{X}(x,t_e)| \exp(F[t_e-t]) ,\\ &\geq |\mathfrak{X}(x,t_{e-1})| \exp(F[t_{e-1}-t_e]) \exp(F[t_e-t]) ,\\ &\vdots\\ &\geq |x| \exp(-Ft) .\end{aligned}$$

Stabilité asymptotique de l'origine pour (9.40)

Proposition 31 *Sous les conditions du point 1 du Théorème 1, il existe une fonction $\widetilde{\delta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, Lipschitzienne, de constante de Lipschitz égale à 1, et définie positive sur $\mathcal{A}$ et une fonction $\widetilde{\beta}$ de classe $\mathcal{KL}$ telles que, si les fonctions $f_j : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ sont continues et satisfont :*

$$|f_j(y) - f(y)| \leq \widetilde{\delta}(y) \qquad \forall j \in \{1,\dots,2n\} ,\ \forall y \in \mathcal{A} , \tag{9.44}$$

$$|f_j(y)| \leq F\,|y| \qquad \forall y \in \mathcal{A} , \tag{9.45}$$

alors, pour tout x dans $\mathcal{A}$, toutes les solutions $\mathfrak{X}(x,t)$ de (9.40) sont définies sur $[0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathcal{A}$ et satisfont :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(x,t)) \leq \widetilde{\beta}(\varpi_{\mathcal{A}}(x),t) \qquad \forall t \in [0,+\infty[\tag{9.46}$$

et :

$$\mathfrak{X}(x,t) \geq |x| \exp(-Ft) \qquad \forall t \in [0,+\infty[\ .$$

Cette Proposition n'est qu'une variante du point 2 de l'énoncé du Théorème 1. En effet, si la fonction $\widetilde{\delta}$ est prise inférieure à la fonction δ donnée par ce Théorème, alors pour tout x de $\mathcal{A}$, toutes les solutions $X_j(x,t)$ sont définies sur $[0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathcal{A}$. Donc, d'après ce qui précède, il en est de même des solutions $\mathfrak{X}(x,t)$ de (9.40). Aussi, pour établir (9.46), il nous suffit de démontrer le Lemme qui suit. Pout l'énoncer, partons de (9.1) et reprenons les triplets de réels strictement positifs $(r_i, \varepsilon_i, T_i)$ introduits dans la démonstration de 1 $\Rightarrow$ 2. Il nous permettent de définir les compacts :

$$\mathcal{C}_i = \{x : \varpi_{\mathcal{A}}(x) \leq r_{i+2}\} \ . \tag{9.47}$$

Lemme 9.48 *Il existe un réel strictement positif $\delta_{3,i}$ tel que si les fonctions f_j satisfont :*

$$|f_j(y) - f(y)| \leq \delta_{3,i} \qquad \forall j \in \{1,\dots,2n\} ,\ \forall y \in \mathcal{C}_i ,$$

alors, pour tout x dans $\mathcal{C}_{i-1}$, toute solution $\mathfrak{X}(x,t)$ de (9.40) prend, sur $[0,T_i]$, ses valeurs dans $\mathcal{C}_i$ et $\mathfrak{X}(x,T_i)$ est dans $\mathcal{C}_{i-3}$.

Ainsi, puisque $\mathfrak{X}(x,T_i)$ est dans $\mathcal{C}_{i-3}$, $\mathfrak{X}(x,T_i+t)$ restera dans $\mathcal{C}_{i-2}$ et $\mathfrak{X}(x,T_i+T_{i-2})$ sera dans $\mathcal{C}_{i-5}$, et ainsi de suite. À partir de là, nous pouvons terminer la démonstration de la Proposition 31 en construisant les fonctions $\widetilde{\delta}$ et $\widetilde{\beta}$ de la même façon que les fonctions δ et β_δ de l'énoncé du point 2 du Théorème.

Démonstration du Lemme 9.48 :

Rappelons que, si, pour un entier i positif ou négatif, x vérifie :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(x) \leq r_{i+1} ,$$

alors toutes les solutions $X(x,t)$ de (9.7) satisfont :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,t)) \leq \frac{r_{i+2}}{2} \quad \forall t \geq 0 \tag{9.49}$$

et :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(X(x,T_i)) \leq \frac{r_{i-1}}{2} \ . \tag{9.50}$$

Supposons que le résultat énoncé dans le Lemme 9.48 n'est pas vrai. Dans ce cas, il existe un entier i tel que, pour chaque entier k, nous pouvons trouver :

1. $2n$ fonctions $f_{j,k}$ satisfaisant[3] :

$$|f_{j,k}(y) - f(y)| \leq \frac{1}{k} \qquad \forall j \in \{1, \dots, 2n\} \ , \ \forall y \in \mathcal{C}_{i+1} \ , \tag{9.51}$$
$$|f_{j,k}(y) - f(y)| \leq \delta(y) \qquad \forall y \in \mathcal{A} \ , \tag{9.52}$$

où δ est la fonction donnée par le point 2 de l'énoncé du Théorème,

2. une condition initiale x_k dans $\mathcal{C}_{i-1}$ et une solution $\mathfrak{X}_k(x_k, t)$ telles que :
   - soit il existe un réel t_k dans $[0, T_i]$ tel que $\mathfrak{X}_k(x_k, t_k)$ n'est pas dans $\mathcal{C}_i$,
   - soit $\mathfrak{X}_k(x_k, T_i)$ n'est pas dans $\mathcal{C}_{i-3}$.

Dénotons par S_k la fonction de sélection d'indice associée à $\mathfrak{X}_k$.

Pour simplifier l'argumentation qui suit, modifions les fonctions $f_{j,k}$ pour nous assurer que les solutions associées $X_{j,k}(x,t)$ issues de $\mathcal{C}_i$ ne quitte pas $\mathcal{C}_{i+1}$. Pour obtenir cette propriété, il suffit par exemple de les "arrêter" à l'extérieur de $\mathcal{C}_{i+1}$. Pour réaliser ceci, nous associons au compact $\mathcal{C}_i$, une fonction localement Lipschitzienne $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ satisfaisant[4] :

$$\begin{array}{rcll} \varphi_i(x) & = & 1 & \text{si} \quad x \in \mathcal{C}_i \ , \\ & \in & [0,1] & \text{si} \quad r_{i+2} \leq \varpi_{\mathcal{A}}(x) \leq r_{i+3} \ , \\ & = & 0 & \text{si} \quad x \notin \mathcal{C}_{i+1} \ . \end{array} \tag{9.53}$$

Nous définissons des modifications $f^m_{j,k}$ des fonctions $f_{j,k}$ comme :

$$f^m_{j,i}(x) = \varphi_i(x)\, f_{j,k}(x) \tag{9.54}$$

Puisque ces fonctions $f^m_{j,k}$ sont identiquement nulle à l'extérieur de $\mathcal{C}_{i+1}$ et héritent des propriétés des f_j sur $\mathcal{C}_{i+1}$, les solutions, notées $X^m_{j,k}(x,t)$, de :

$$\dot{x} = f^m_{j,k}(x)$$

sont définies sur $[0, +\infty[$, constantes si x n'est pas dans $\mathcal{C}_{i+1}$ et ne quittent pas $\mathcal{C}_{i+1}$ si x est dans cet ensemble. Aussi, tant qu'une solution $X_{j,k}(x,t)$ est dans $\mathcal{C}_i$, elle est aussi une solution de :

$$\dot{x} = f^m_{j,k}(x) \ .$$

Ces solutions $X^m_{j,k}$ nous permettent de définir des solutions $\mathfrak{X}^m_k(x,t)$ de :

$$\dot{x} \in \left\{ f^m_{1,k}(x), \dots, f^m_{2n,k}(x) \right\} \ . \tag{9.55}$$

D'après le point 2 ci-dessus et puisque rien n'est modifié dans C_i, il existe une condition initiale x_k dans $\mathcal{C}_{i-1}$ et une solution $\mathfrak{X}^m_k(x_k, t)$ telles que :

- soit il existe un réel t_k dans $[0, T_i]$ tel que $\mathfrak{X}^m_k(x_k, t_k)$ n'est pas dans $\mathcal{C}_i$,
- soit $\mathfrak{X}_k(x_k, T_i)$ n'est pas dans $\mathcal{C}_{i-2}$.

Pour simplifier les notations, posons :

$$\mathfrak{Y}_k(t) = \mathfrak{X}^m_k(x_k, t)$$

[3] L'inégalité (9.52) n'est introduite que pour faciliter la lecture de cette démonstration. En effet, nous avons vu qu'elle garantie l'existence des solutions $\mathfrak{X}(x,t)$. Mais en fait cette existence sera de toute façon assurée par la modification (9.54) des fonctions $f_{j,k}$. Ceci fait que la connaissance de l'existence de la fonction δ n'est en fait pas requise pour cette démonstration du Théorème 1.

[4] Par exemple, nous pouvons prendre :

$$\varphi_i(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}_{i+1})}{d(x, \mathcal{C}_i) + d(x, \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}_{i+1})} \ .$$

et considérons ces fonctions sur le compact $[0, T_i]$. Elles prennent toutes leurs valeurs dans C_{i+1}. Et, d'après (9.42), elle vérifient :

$$\mathfrak{Y}_k(t_2) \;=\; \mathfrak{Y}_k(t_1) \;+\; \int_{t_1}^{t_2} f^m_{S_k(s)}(\mathfrak{Y}_k(s))\, ds \qquad \forall (t_1, t_2) \in [0, T_i]^2 \;. \tag{9.56}$$

Soit alors M_i le réel défini par :

$$M_i \;=\; \max_{x \in \mathcal{C}_{i+1}} \left\{ |f(x)|, \max_{j,k} \left\{ |f^m_{j,k}(x)| \right\} \right\} \;\leq\; 1 \;+\; \max_{x \in \mathcal{C}_{i+1}} |f(x)| \;,$$

où l'inégalité vient de (9.51). Nous obtenons :

$$|\mathfrak{Y}_k(t_2) - \mathfrak{Y}_k(t_1)| \;\leq\; M_i(t_2 - t_1) \;.$$

La suite des $\mathfrak{Y}_k$ est donc bornée indépendamment de k et équicontinue sur $\mathbb{R}_+$. Avec le Théorème d'Ascoli-Arzela, nous en déduisons qu'il existe une sous-suite des $\mathfrak{Y}_k$ convergeant uniformément sur $[0, T_i]$ vers une fonction $\mathfrak{Y}^*$.

Montrons que, en posant :

$$y^* \;=\; \mathfrak{Y}^*(0) \;,$$

$\mathfrak{Y}^*$ est une solution de :

$$\dot{x} \;=\; \varphi_i(x) f(x) \;=\; f^m(x) \tag{9.57}$$

issue de y^*. Pour établir ceci, observons que :

1. d'après la continuité uniforme de f sur $\mathcal{C}_{i+1}$, pour tout réel strictement positif ε, il existe un réel strictement positif η satisfaisant :
$$|f(y) - f(z)| \leq \varepsilon \qquad \forall\, (y, z) \in \mathcal{C}^2_{i+1} \;:\; |y - z| \leq \eta \;,$$
2. d'après (9.51), pour ce couple (ε, η), il existe un entier K tel que, pour tout entier $k \geq K$, nous avons :
$$\left| f^m(y) - f^m_{j,k}(y) \right| \;\leq\; \varepsilon \qquad \forall j \in \{1, \ldots, 2n\} \;,\; \forall y \in \mathcal{C}_{i+1} \;,$$
3. d'après la convergence uniforme de la sous-suite des $\mathfrak{Y}_k$, pour ce triplet (ε, η, K), il existe un entier $k \geq K$, tel que, pour tout t, nous avons :
$$|\mathfrak{Y}^*(t) - \mathfrak{Y}_k(t)| \;\leq\; \min\{\eta, \varepsilon\} \quad \forall t \in [0, T_i] \;. \tag{9.58}$$

Avec ces données et (9.53), nous obtenons pour t dans $[0, T_i]$,

$$\begin{aligned}
&\left| \mathfrak{Y}^*(t) - y^* - \int_0^t \varphi_i(\mathfrak{Y}^*(s)) f(\mathfrak{Y}^*(s)) ds \right| \\
&\qquad \leq\; |\mathfrak{Y}^*(t) - \mathfrak{Y}_k(t)| \;+\; |\mathfrak{Y}_k(0) - y^*| \\
&\qquad\qquad + \left| \mathfrak{Y}_k(t) - \mathfrak{Y}_k(0) - \int_0^t \varphi_i(\mathfrak{Y}^*(s)) f(\mathfrak{Y}_k(s)) ds \right| \\
&\qquad\qquad + \int_0^t |f(\mathfrak{Y}_k(s)) - f(\mathfrak{Y}^*(s))|\, ds \;, \\
&\qquad \leq\; 2\varepsilon \;+\; T_i \varepsilon \;+\; \left| \mathfrak{Y}_k(t) - \mathfrak{Y}_k(0) - \int_0^t \varphi_i(\mathfrak{Y}^*(s)) f(\mathfrak{Y}_k(s)) ds \right| \;.
\end{aligned}$$

Mais, avec (9.56), nous obtenons, toujours pour t dans $[0, T_i]$,

$$\begin{aligned}
&\left| \mathfrak{Y}_k(t) - \mathfrak{Y}_k(0) - \int_0^t \varphi_i(\mathfrak{Y}^*(s)) f(\mathfrak{Y}_k(s)) ds \right| \\
&\qquad \leq\; \int_0^t \left| f^m_{S_k(s)}(\mathfrak{Y}_k(s)) - f^m(\mathfrak{Y}_k(s)) \right| ds \\
&\qquad\qquad + \int_0^t |\varphi_i(\mathfrak{Y}_k(s)) - \varphi_i(\mathfrak{Y}^*(s))|\, |f(\mathfrak{Y}_k(s))|\, ds \;, \\
&\qquad \leq\; T_i\, \varepsilon \;+\; T_i\, M_i\, \Phi_i\, \varepsilon \;,
\end{aligned}$$

où Φ_i est la constante de Lipschitz de φ_i sur le compact $\mathcal{C}_{i+1}$. Donc finalement, nous obtenons, pour tout t dans $[0, T_i]$,

$$\left|\mathfrak{Y}^*(t) - y^* - \int_0^t \varphi_i(\mathfrak{Y}^*(s)) f(\mathfrak{Y}^*(s)) ds\right| \leq 2\varepsilon + 2T_i\varepsilon + T_i M_i \Phi_i \varepsilon .$$

Puisque $\mathfrak{Y}^*$ ne dépend pas de ε et que ε est arbitraire, nous avons bien que $\mathfrak{Y}^*$ est une solution de (9.57) sur $[0, T_i]$.

Montrons que c'est aussi une solution de (9.7) sur $[0, T_i]$. Pour cela nous observons que $\mathfrak{Y}_k(0) = x_k$ étant dans le compact $\mathcal{C}_{i-1}$, il en est de même de y^*. Donc, d'après la définition (9.47), nous avons :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(y^*) \leq r_{i+1} . \tag{9.59}$$

Or, tant que $\mathfrak{Y}^*(t)$ reste dans $\mathcal{C}_i$, i.e. $\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{Y}^*(t))$ est inférieur à r_{i+2}, nous avons $\varphi_i(\mathfrak{Y}^*(t))$ égal à 1 et donc aussi :

$$\dot{\overbrace{\mathfrak{Y}^*(t)}} = \varphi_i(\mathfrak{Y}^*(t))\, f(\mathfrak{Y}^*(t)) = f(\mathfrak{Y}^*(t)) .$$

Ainsi :

1. soit $\mathfrak{Y}^*(t)$ est dans $\mathcal{C}_i$ pour tout t dans $[0, T_i]$ et est une solution de (9.7) sur $[0, T_i]$, issue de y^*.
2. soit, du fait de la continuité de $\mathfrak{Y}^*$, il existe un instant t_0 dans $]0, T_i]$ tel que nous avons :

   $$\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{Y}(t)) < r_{i+2} \quad \forall t \in [0, t_0[$$

   et :

   $$\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{Y}(t_0)) = r_{i+2} . \tag{9.60}$$

   Dans ce dernier cas, $\mathfrak{Y}^*(t)$ est une solution au moins sur $[0, t_0]$ de (9.7) issue de y^* qui satisfait (9.59). Mais d'après (9.49), nous avons alors :

   $$\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{Y}^*(t)) \leq \frac{r_{i+2}}{2} \quad \forall t \geq t_0 . \tag{9.61}$$

   Ceci contredit (9.60).

Sachant maintenant que $\mathfrak{Y}^*$ est une solution de (9.7) sur $[0, T_i]$, nous avons d'après (9.50) :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{Y}^*(T_i)) \leq \frac{r_{i-1}}{2} . \tag{9.62}$$

Nous pouvons alors choisir ε ci-dessus pour que, avec la continuité de la fonction $\varpi_{\mathcal{A}}$, la propriété (9.58) implique :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{Y}_k(t)) \leq \varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{Y}^*(t))) + \frac{r_{i-1}}{4} \quad \forall t \in [0, T_i] ,$$

Avec (9.61) et (9.62), nous en déduisons :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{Y}_k(t)) \leq \frac{3r_{i+2}}{4} \quad \forall t \in [0, T_i]$$

et :

$$\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{Y}_k(T_i)) \leq \frac{3r_{i-1}}{4} < r_{i-1} .$$

Ceci signifie que la restriction de $\mathfrak{Y}_k$ à $[0, T_i]$ est dans $\mathcal{C}_i$ et que $\mathfrak{Y}_k(T_i)$ est dans $\mathcal{C}_{i-3}$. Nous avons ainsi une contradiction.

Construction des fj et locale Lipschitzianité des solutions Pour obtenir effectivement les fonctions f_j, étant donnée la fonction $\widetilde{\delta}$ de la Proposition 31, posons (voir (9.34)) :

$$\widetilde{f}_j(x) = f(x) + \frac{n}{n+1} \widetilde{\delta}(x) e_j .$$

Avec (9.31) et le fait que $\widetilde{\delta}$ est une fonction nulle à l'origine et Lipschitzienne de constante de Lipschitz égale à 1, nous avons :

$$\left|\widetilde{f}_j(x)\right| \;\leq\; |x| \;+\; \frac{n}{n+1}\,|x| \;\leq\; \frac{2n+1}{n+1}\,|x| \qquad \forall x \in \mathcal{A}\ .$$

En utilisant une partition de l'unité il est possible de montrer qu'il existe des fonctions $f_j : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ continues et localement Lipschitziennes sur $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ satisfaisant :

$$|f_j(x) - \widetilde{f}_j(x)| \;\leq\; \frac{1}{2(n+1)}\,\widetilde{\delta}(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}$$

et :

$$|f_j(x)| \;\leq\; \frac{3}{2}\,\frac{2n+1}{n+1}|x| \qquad \forall x \in \mathcal{A}\ .$$

Ainsi la fonction u_j dans (9.34) est donnée par :

$$u_j(x) \;=\; \frac{f_j(x) - \widetilde{f}_j(x)}{\widetilde{\delta}(x)}\,(n+1)\ .$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} |f(x) - f_j(x)| \;&\leq\; \frac{1}{2(n+1)}\,\widetilde{\delta}(x) \;+\; \frac{n}{n+1}\widetilde{\delta}(x)\ , \\ &\leq\; \widetilde{\delta}(x)\ . \end{aligned}$$

Les fonctions $f_j : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, ainsi obtenues,

- sont continues et localement Lipschitziennes sur $\mathcal{A} \setminus \{0\}$,
- satisfont (9.45) avec $F = \frac{3}{2}\,\frac{2n+1}{n+1}$,
- satisfont (9.44),
- la fonction u_j qui leur est associée dans (9.34) est de norme inférieure à $\frac{1}{2}$.

Ceci implique en particulier que l'origine est une solution asymptotiquement stable pour le système (9.36) et que les solutions $X_j(x,t)$ sont uniques sur $\mathcal{A}$. Elles nous donnent aussi une propriété de Lipschitz pour les solutions $\mathfrak{X}(x,t)$ de (9.40). Précisément, nous avons :

Proposition 32 *Étant données des fonctions f_j satisfaisant les propriétés indiquées ci-dessus, pour tout x de $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ et pour tout intervalle compact $[0,T]$, il existe un voisinage $\mathfrak{V}_x$ de x et un réel L_x tels que, pour tout points y et z dans $\mathfrak{V}_x$, nous pouvons associer à chaque solution $\mathfrak{X}(y,t)$ de (9.40), une solution $\mathfrak{X}(z,t)$ de (9.40) vérifiant :*

$$|\mathfrak{X}(y,t) - \mathfrak{X}(z,t)| \;\leq\; L_x\,|y - z| \qquad \forall t \in [0,T]\ .$$

Démonstration :

D'après la Proposition 31, pour tout y de $\mathcal{A} \setminus \{0\}$, toutes les solutions $\mathfrak{X}(y,t)$ de (9.40) satisfont, pour tout t de $[0,T]$,

$$\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(y,t)) \;\leq\; \widetilde{\beta}(\varpi_{\mathcal{A}}(y), 0) \tag{9.63}$$

et :

$$|\mathfrak{X}(y,t)| \;\geq\; |y|\,\exp(-FT)\ . \tag{9.64}$$

Soit x fixé arbitrairement dans $\mathcal{A} \setminus \{0\}$. Nous lui associons le compact C_x inclus dans $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ et défini par :

$$C_x \;=\; \left\{ y \in \mathcal{A} \;:\; \frac{|x|}{2}\exp(-FT) \leq |y|\ ,\ \varpi_{\mathcal{A}}(y) \leq \widetilde{\beta}(\varpi_{\mathcal{A}}(x) + 1, 0) \right\}\ .$$

Soit $\eta \leq \frac{|x|}{2}$ un réel positif tel que tout y satisfaisant :

$$|x - y| \;\leq\; \eta$$

est dans $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ et nous avons :
$$\varpi_{\mathcal{A}}(y) \;\leq\; \varpi_{\mathcal{A}}(x) \;+\; 1 \;.$$
Notons $\mathfrak{V}_x$ l'ouvert donné par :
$$\mathfrak{V}_x \;=\; \{y \,:\, |x-y| < \eta\} \;.$$
Alors, d'après (9.63) et (9.64), pour tout y de $\mathfrak{V}_x$, toutes les solutions $\mathfrak{X}(y,t)$ de (9.40) associées vérifient :
$$\mathfrak{X}(y,t) \;\in\; C_x \quad t \in [0,T] \;.$$
Les fonctions f_j étant localement Lipschitzienne sur $\mathcal{A} \setminus \{0\}$, il existe un réel L tel que, pour toute paire (y,z) de points de C_x et pour tout j de $\{1,\ldots,2n\}$, nous avons :
$$|f_j(y) - f_j(z)| \;\leq\; L\,|y-z| \;.$$
Maintenant soit y un point quelconque de $\mathfrak{V}_x$. Soit $\mathfrak{X}(y,t)$ une solution quelconque de (9.40) correspondante. À cette solution est associée une fonction de sélection d'indice S. Soit alors z un autre point de $\mathfrak{V}_x$. Nous construisons une solution $\mathfrak{X}(z,t)$, en reprenant la même fonction de sélection d'indice S que pour $\mathfrak{X}(y,t)$. C'est bien une solution de (9.40). Puisque z est dans $\mathfrak{V}_x$, nous venons de voir que nous avons :
$$\mathfrak{X}(z,t) \;\in\; C_x \quad t \in [0,T] \;.$$
Avec l'inégalité de Grönwall, nous obtenons récursivement, pour tout t de $[0,T]$, et notant t_e le plus grand instant de saut de S, plus petit que t,
$$\begin{aligned}
|\mathfrak{X}(y,0) - \mathfrak{X}(z,0)| \;&=\; |y-z| \;, \\
|\mathfrak{X}(y,t) - \mathfrak{X}(z,t)| \;&\leq\; |\mathfrak{X}\,(y,t_e) - \mathfrak{X}\,(z,t_e)| \;+\; \int_{t_e}^{t} \left|f_{S(s)}(\mathfrak{X}(y,s)) - f_{S(s)}(\mathfrak{X}(z,s))\right| ds \\
&\leq\; |\mathfrak{X}\,(y,t_e) - \mathfrak{X}\,(z,t_e)| \;+\; L\int_{t_e}^{t} |\mathfrak{X}(y,s) - \mathfrak{X}(z,s)|\, ds \\
&\leq\; \exp(L(t-t_e))\; |\mathfrak{X}\,(y,t_e) - \mathfrak{X}\,(z,t_e)| \;, \\
&\leq\; \exp(LT)\, |y-z| \;.
\end{aligned}$$

Construction et étude des propriétés de V_0

Soit $\widetilde{\beta}$ la fonction donnée par la Proposition 31. Nous avons déjà vu en (9.25) que, étant donné un réel λ strictement positif, il existe deux fonctions α_1 et α_2 de classe $\mathcal{K}^\infty$, α_1 étant aussi de classe C^1, telles que, pour tout x de $\mathcal{A}$ et toute solution $\mathfrak{X}(x,t)$ de (9.40), nous avons :
$$\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(x,t)))\,\exp(\lambda t) \;\leq\; \alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(x))\,\exp(-\lambda t) \qquad \forall t \geq 0 \;. \tag{9.65}$$
Nous définissons alors une fonction $V_0 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ comme :
$$\begin{aligned}
V_0(x) \;&=\; \sup_{\mathfrak{X},t\geq 0} \alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(x,t)))\,\exp(\lambda t) \quad \text{si} \quad x \in \mathcal{A}\setminus\{0\} \;, \\
&=\; 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si} \quad x = 0 \;,
\end{aligned}$$
où $\sup\limits_{\mathfrak{X}}$ désigne le supremum sur toutes les solutions $\mathfrak{X}(x,t)$ de (9.40) issues de x. Ceci signifie qu'il existe au moins une suite $\mathfrak{X}_k(x,t)$ de solutions maximisantes, i.e. pour tout entier k, il existe une solution $\mathfrak{X}_k(x,t)$ satisfaisant :
$$V_0(x) \;\leq\; \frac{1}{k} \;+\; \sup_{t\geq 0} \alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}_k(x,t)))\,\exp(\lambda t) \;.$$
Proposition 33 *La fonction $V_0 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ définie ci-dessus est localement Lipschitzienne sur $\mathcal{A}\setminus\{0\}$, définie positive et propre sur $\mathcal{A}$ et satisfait précisément :*
$$\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(x)) \;\leq\; V_0(x) \;\leq\; \alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(x)) \;. \tag{9.66}$$

De plus, pour tout réel positif h, tout entier j de $\{1,\dots,2n\}$, tout point x de $\mathcal{A}$ et toute solution $X_j(x,t)$ de (9.36), nous avons :

$$\mathfrak{D}^+_{f_j} V_0(x) \;\leq\; -\lambda\, V_0(x) \qquad \forall x\in\mathcal{A}\ ,\quad \forall j\in\{1,\dots,2n\}\ . \tag{9.67}$$

Démonstration :

<u>V_0 est définie positive et propre sur $\mathcal{A}$</u> : De (9.65), nous déduisons :

$$\begin{aligned} V_0(x) &= \sup_{\mathfrak{X},t\geq 0} \alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(x,t)))\exp(\lambda t)\ ,\\ &\leq \sup_{t\geq 0}\alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(x))\exp(-\lambda t) \;=\; \alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(x))\ . \end{aligned}$$

Puisque, nous avons :

$$\mathfrak{X}(x,0) \;=\; x\ ,$$

nous obtenons de façon similaire :

$$\begin{aligned} V_0(x) &= \sup_{\mathfrak{X},t\geq 0} \alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(x,t)))\exp(\lambda t)\ ,\\ &\geq \sup_{\mathfrak{X}}\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(x,0))) \;=\; \alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(x))\ . \end{aligned} \tag{9.68}$$

<u>$\mathfrak{D}^+_f V_0(x)\leq -V_0(x)$</u> : Étant donnés un réel positif h, un entier j de $\{1,\dots,2n\}$, un point x de $\mathcal{A}$ et une solution $X_j(x,t)$ de (9.36), cherchons un majorant de $V_0(X_j(x,h))$. Soit $\mathfrak{X}_k(X_j(x,h),t)$ une suite de solutions maximisantes associée à $V_0(X_j(x,h))$. Nous avons vu dans le point 1 de la Remarque 9.43 que la fonction $\mathfrak{X}(x,t)$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(x,t) &= X_j(x,t) & \text{si}\quad & t\in[0,h[\ ,\\ &= \mathfrak{X}_k(X_j(x,h),t-h) & \text{si}\quad & t\in[h,+\infty[\ . \end{aligned}$$

est une solution de (9.40). Nous avons donc :

$$\sup_{t\geq 0}\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}_k(x,t)))\exp(\lambda t) \;\leq\; V_0(x)\ .$$

Nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} V_0(x) &\geq \sup_{t\geq h}\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}_k(x,t)))\exp(\lambda t)\ ,\\ &\geq \sup_{t\geq h}\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}_k(X_j(x,h),t-h)))\exp(\lambda t)\ ,\\ &\geq \exp(\lambda h)\sup_{t\geq 0}\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}_k(X_j(x,h),t)))\exp(\lambda t)\ ,\\ &\geq \exp(\lambda h)\left[V_0(X_j(x,h)) - \frac{1}{k}\right]\ . \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout entier positif k, nous avons :

$$V_0(X_j(x,h)) \;\leq\; V_0(x)\exp(-\lambda h)\ .$$

Comme nous le verrons dans le point suivant de cette démonstration, la V_0 est localement Lipschitzienne sur $\mathcal{A}$. Ceci implique (voir la définition (9.30)) :

$$\mathfrak{D}^+_{f_j}V_0(x) \;=\; \limsup_{h\to 0_+}\frac{V_0(X_j(x,h))-V_0(x)}{h}$$

et donc :

$$\mathfrak{D}^+_{f_j}V_0(x) \;\leq\; V_0(x)\lim_{h\to 0}\frac{\exp(-\lambda h)-1}{h} \;=\; -\lambda\,V_0(x) \qquad \forall x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}\ .$$

Cette inégalité est aussi vraie à l'origine puisque f_j et V_0 s'y annulent.

V_0 est localement Lipschitzienne : À tout x de $\mathcal{A}\setminus\{0\}$, nous associons le réel T_x défini par :

$$\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(x)) \;=\; \alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(x))\,\exp(-\lambda T_x)\;.$$

Il existe et est positif puisque nous avons :

$$\alpha_1(s) \;\leq\; \alpha_2(s) \qquad \forall s\geq 0\;.$$

Nous déduisons de (9.65) et (9.68) :

$$\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(x,t)))\,\exp(\lambda t) \;\leq\; \alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(x)) \;\leq\; V_0(x) \qquad \forall t\geq T_x\;.$$

Donc, dans la définition de V_0, nous pouvons nous contenter de prendre le supremum en t sur l'intervalle compact $[0,T_x]$.

Soient, donnés par la Proposition 32, $\mathfrak{V}_x$ et L_x le voisinage et la constante de Lipschitz associés au point x dans $\mathcal{A}\setminus\{0\}$ et l'intervalle $[0,2T_x]$. Soit $\mathcal{U}_x$ le voisinage de x défini par :

$$\mathcal{U}_x \;=\; \left\{y\in\mathcal{A}\,:\,\alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(y)) < \alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(x))+1\,,\;\frac{\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(y))}{\alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(y))} > \exp(-2\lambda T_x)\right\}\;.$$

Enfin soit M_x la constante de Lipschitz sur le compact :

$$C_x \;=\; \{y\in\mathcal{A}\,:\,\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(y)) \leq \alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(x))+1\}\;,$$

inclus dans $\mathcal{A}$, de la composition $\alpha_1\circ\varpi_{\mathcal{A}}$ des fonctions localement Lipschitziennes α_1 et $\varpi_{\mathcal{A}}$. D'après (9.65) et les définitions ci-dessus, pour tout point y de $\mathfrak{V}_x\bigcap\mathcal{U}_x$, toutes les solutions $\mathfrak{X}(y,t)$ de (9.40) satisfont :

$$\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(y,t))) \;\leq\; \alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(y)) \;<\; \alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(x))+1 \qquad \forall t\geq 0\;.$$

Elles restent donc dans ce compact C_x. Aussi, puisque nous avons :

$$T_y \;<\; 2\,T_x\;,$$

elles satisfont :

$$\sup_{t\geq 0}\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(y,t)))\,\exp(\lambda t) \;=\; \sup_{t\in[0,2T_x]}\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}(y,t)))\,\exp(\lambda t)\;.$$

Soit alors y un point quelconque de $\mathfrak{V}_x\bigcap\mathcal{U}_x$ et $\mathfrak{X}_k(y,t)$ une suite de solutions maximisantes de $V_0(y)$. Avec ce qui précède et la Proposition 32, pour tout autre point quelconque z de $\mathfrak{V}_x\bigcap\mathcal{U}_x$, nous pouvons trouver une solution $\mathfrak{X}_k(z,t)$ de (9.40) satisfaisant :

$$\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}_k(y,t))) \;-\; \alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}_k(z,t))) \;\leq\; M_x\,L_x\,|y-z| \quad \forall t\in[0,2T_x]\;.$$

Nous en déduisons, pour tout entier k,

$$\begin{aligned}
V_0(y) \;&\leq\; \frac{1}{k} \;+\; \sup_{t\geq 0}\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}_k(y,t)))\,\exp(\lambda t)\;,\\
&\leq\; \frac{1}{k} \;+\; \sup_{t\in[0,2T_x]}\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}_k(y,t)))\,\exp(\lambda t)\;,\\
&\leq\; \frac{1}{k} \;+\; \sup_{t\in[0,2T_x]}\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(\mathfrak{X}_k(z,t)))\,\exp(\lambda t) \;+\; M_x\,L_x\,|y-z|\,\exp(2\lambda T_x)\;,\\
&\leq\; \frac{1}{k} \;+\; V_0(z) \;+\; M_x\,L_x\,|y-z|\,\exp(2\lambda T_x)\;.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout k, nous obtenons :

$$V_0(y) \;\leq\; V_0(z) \;+\; M_x\,L_x\,|y-z|\,\exp(2\lambda T_x)\;.$$

Comme y et z sont des points quelconques de $\mathfrak{V}_x\bigcap\mathcal{U}_x$, ceci établit que V_0 est localement Lipschitzienne en x.

Régularisation de V_0

Régularisation sur $\mathcal{A}\setminus\{0\}$ Ayant établi que (9.38) est une conséquence de (9.37), il nou suffit pour conclure notre démonstration de trouver une régularisation de classe C^∞ de la fonction V_0 satisfaisant (9.37). Pour cela nous allons tirer profit des résultats suivants.

Lemme 9.69 ([(Wilson), Theorem 1.3], [(Kurzweil), Theorem 3]) *Soient $\mathfrak{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V : \mathfrak{V} \to \mathbb{R}$ et $f_j : \mathfrak{V} \to \mathbb{R}^n$, $j = 1,\dots,m$, des fonctions localement Lipschitziennes, et $W_j : \mathfrak{V} \to \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,m$, des fonctions continues, tels que nous avons :*

$$\mathfrak{D}^+_{f_j} V(x) \;\leq\; W_j(x) \qquad \forall x \in \mathfrak{V}\,, \quad \forall j \in \{1,\dots,m\}\,.$$

Sous ces conditions, pour toute paire de fonctions continues $\delta_V : \mathfrak{V} \to \mathbb{R}_{+*}$ et $\delta_W : \mathfrak{V} \to \mathbb{R}_{+*}$, il existe une fonction $V_a : \mathfrak{V} \to \mathbb{R}$ qui est de classe C^∞ et satisfait :

$$|V(x) - V_a(x)| \;\leq\; \delta_V(x) \quad , \qquad L_{f_i} V_a(x) \;\leq\; W_i(x) \;+\; \delta_W(x) \qquad \forall x \in \mathfrak{V}\,, \quad \forall j \in \{1,\dots,m\}\,.$$

Lemme 9.70 ([(Lin, Sontag et Wang), Lemma 4.3], [(Kurzweil), Theorem 6])
Soient $\mathfrak{V}$ un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ et $V : \mathfrak{V} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, définie positive sur $\mathfrak{V}$ et dont la restriction à $\mathfrak{V} \setminus \{0\}$ est de classe C^∞. Sous ces conditions, il existe une fonction $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{K}^\infty$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_{+*}$, satisfait :

$$b(s) \;\leq\; s\, b'(s) \qquad \forall s > 0$$

et telle que la fonction $b \circ V$ est de classe C^∞ sur $\mathfrak{V}$.

Avec ceci, nous avons :

Proposition 34 *Sous les conditions du point 1 du Théorème 1, il existe une fonction $V : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ qui est de classe C^∞, définie positive et propre sur $\mathcal{A}$ et satisfait :*

$$\overset{\cdot}{\widehat{V(x)}} \;\leq\; -\lambda\, V(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A}\,. \tag{9.71}$$

Démonstration :
La fonction V_0 satisfait les hypothèses du Lemme 9.69 avec :

$$\mathfrak{V} \;=\; \mathcal{A} \setminus \{0\} \quad , \qquad W_j \;=\; -\lambda\, V_0 \quad \forall j \in \{1,\dots,2n\}\,.$$

Alors, en choisissant :

$$\delta_V \;=\; \frac{V_0}{2} \quad , \qquad \delta_W \;=\; \frac{\lambda V_0}{4}\,,$$

nous obtenons donc une fonction $V_1 : \mathcal{A}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ qui est de classe C^∞ et qui, avec (9.66) et (9.67), satisfait :

$$\frac{1}{2}\,\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(x)) \;\leq\; \frac{1}{2}\,V_0(x) \;\leq\; V_1(x) \;\leq\; \frac{3}{2}\,V_0(x) \;\leq\; \frac{3}{2}\,\alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(x)) \qquad \forall x \in \mathcal{A}\,,$$
$$L_{f_j} V_1(x) \;\leq\; -\frac{3}{4}\,\lambda\, V_0(x) \;\leq\; -\frac{\lambda}{2}\, V_1(x) \qquad \forall x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}\,, \quad \forall j \in \{1,\dots,2n\}\,.$$

Ainsi, puisque V_0 s'annule à l'origine, nous pouvons prolonger par continuité la fonction V_1 à tout $\mathcal{A}$ en posant :

$$V_1(0) \;=\; 0\,.$$

Cette extension est continue, définie positive et propre sur $\mathcal{A}$ et de classe C^∞ sur $\mathcal{A}\setminus\{0\}$. Elle satisfait donc les hypothèses du Lemme 9.70. En conséquence il existe une fonction $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{K}^\infty$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_{+*}$, satisfait :

$$b(s) \;\leq\; s\, b'(s) \qquad \forall s > 0$$

et telle que la fonction V définie par :

$$V(x) \;=\; b(V_1(x))^2$$

est de classe C^∞ sur $\mathcal{A}$ et satisfait :

$$b\left(\frac{1}{2}\,\alpha_1(\varpi_{\mathcal{A}}(x))\right)^2 \;\leq\; V(x) \;\leq\; b\left(\frac{3}{2}\,\alpha_2(\varpi_{\mathcal{A}}(x))\right)^2 \qquad \forall x\in\mathcal{A}\;.$$

Aussi nous obtenons, pour tout x de $\mathcal{A}\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned} L_{f_j}V(x) &= 2\,b'(V_1(x))\,b(V_1(x))\,L_{f_j}V_1(x)\;,\\ &\leq -\lambda\,V_1(x)\,b'(V_1(x))\,b(V_1(x)) \;\leq\; -\lambda\,b(V_1(x))^2\;,\\ &\leq -\lambda\,V(x) \qquad \forall x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}\;,\quad \forall j\in\{1,\ldots,2n\}\;. \end{aligned}$$

L'inégalité (9.71) résulte alors de (9.38).

9.2 Preuve de la Proposition 2

Une fonction de Lyapunov V sur $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle qu'il existe une fonction continue $l:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ et une fonction continue $R:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$ dont les valeurs $R(x)$ sont des matrices symétriques définies positives, satisfaisant l'équation de HJB (1.10) est dite fonction valeur de Bellman stricte.

<u>$3\Rightarrow 2$:</u> Si V est assignée continûment strictement par le bouclage donné par (1.12), alors bien sûr V est strictement assignable point par point. De plus la fonction :

$$U(x) \;=\; -L_aV(x)+\Theta'(V(x))\,|L_bV(x)|^2$$

est définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Nous avons donc :

$$\frac{L_aV(x)}{|L_bV(x)|^2} \;\leq\; \Theta'(V(x)) \qquad \forall x\;:\;L_bV(x)\neq 0\;.$$

La continuité de $\Theta'(V(x))$ implique donc (1.11).

<u>$2\Rightarrow 3$:</u> Soit, pour chaque entier relatif n, le compact

$$C_n \;=\; \left\{x:\;2^n\leq V(x)\leq 2^{n+1}\right\} \quad,\qquad n\;=\;0\,,\,\pm1\,,\,\pm2\,,\,\ldots$$

Montrons par contradiction qu'il existe un réel strictement positif k_n tel que nous avons :

$$L_aV(x)\;-\;k_n|L_bV(x)|^2\;<\;0 \qquad \forall x\in C_n\;.$$

Si ce n'est pas le cas, il existe une suite x_m dans C_n satisfaisant :

$$L_aV(x_m)\;\geq\;m\,|L_bV(x_m)|^2\;<\;0\;.$$

Puisque C_n est compact, x_m a un point d'accumulation $x^\star$ dans C_n. Puisque les fonctions L_aV et L_bV sont continues, la suite $L_aV(x_m)$ est bornée et donc :

$$L_bV(x^\star)\;=\;0 \quad,\qquad L_aV(x^\star)\;\geq\;0\;.$$

Puisque V est strictement assignable point par point et que l'origine n'est pas dans C_m, nous avons :

$$L_bV(x^\star)\;=\;0 \qquad\Longrightarrow\qquad L_aV(x^\star)\;<\;0$$

et donc une contradiction.

D'après (1.11), il existe des réels strictement positifs η et ℓ satisfaisant :

$$\frac{L_aV(x)}{|L_bV(x)|^2}\;<\;\ell \qquad \forall x\;:\;|x|\;\leq\;\eta\;,\quad L_bV(x)\neq 0\;.$$

Puisque V est définie positive sur $\mathbb{R}^n$, il existe un entier relatif n_0 vérifiant :

$$|x|\;\leq\;\eta \qquad \forall x\;:\;V(x)\;\leq\;2^{n_0}\;.$$

Nous définissons alors la dérivée Θ' de la fonction recherchée comme n'importe quelle fonction de classe C^1 à valeurs strictement positives et vérifiant :

$$\begin{array}{rcl} \Theta'(v) \ \geq \ \ell & \text{si} & v \ \leq \ 2^{n_0} \ , \\ \Theta'(v) \ \geq \ k_n & \text{si} & 2^n \leq v \leq 2^{n+1} \ , \ n \geq n_0 \ . \end{array}$$

Nous avons ainsi obtenu :

$$L_aV(x) \ - \ \Theta'(V(x))\, L_bV(x)) \ < \ 0 \qquad \forall x \neq 0 \ .$$

<u>1 ⇒ 2 :</u> L'assignabilité stricte point par point de V est une conséquence directe l'équation HJB (1.10). En effet, en prenant :

$$\phi(x) \ = \ -\frac{1}{2}\, R(x)^{-1}\, L_bV(x)^T \ ,$$

nous obtenons :

$$\overbrace{V(x)}^{\cdot} \ = \ L_aV(x) \ + \ L_bV(x)\, \phi(x) \ = \ -l(x) \ - \ \frac{1}{4}\, L_bV(x)\, R(x)^{-1} L_bV(x)^T \ ,$$

où ℓ est définie positive sur $\mathbb{R}^n$ par hypothèse.

Pour établir (1.11), notons que, encore d'après l'équation HJB (1.10), nous avons :

$$\frac{L_aV(x)}{|L_bV(x)|^2} \ = \ -\frac{l(x)}{|L_bV(x)|^2} \ + \ \frac{1}{4}\, \frac{L_bV(x)R(x)^{-1}L_bV(x)^T}{|L_bV(x)|^2} \qquad \forall x \ : \ L_bV(x) \neq 0 \ .$$

Puisque la matrice $R(x)$ est symétrique définie positive, la fonction R est continue, la fonction $\frac{L_bVR^{-1}L_bV^T}{|L_bV|^2}$ est bornée sur tout compact et la fonction l est non négative, nous en déduisons :

$$\limsup_{\substack{|x|\to 0 \\ L_bV(x)\neq 0}} \ \frac{L_aV(x)}{|L_bV(x)|^2} \ \leq \ \frac{1}{4} \sup_{|x|\leq 1} \left\{ \frac{L_bV(x)R(x)^{-1}L_bV(x)^T}{|L_bV(x)|^2} \right\} \ < \ +\infty \ .$$

<u>3 ⇒ 1 :</u> D'après la propriété 3, la fonction l définie par :

$$l(x) \ = \ -L_aV(x) \ + \ \Theta'(V(x))\, |L_bV(x)|^2$$

est définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Soit aussi R la fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ donnée par :

$$R(x) \ = \ \frac{1}{4\Theta'(V(x))}\, I \ .$$

La matrice $R(x)$ est symétrique définie positive et l'équation HJB (1.10) est satisfaite par définition. Ceci établit que V est une fonction valeur de Bellman stricte.

9.3 Preuve de la Propositions 3

Nous devons démontrer que la fonction V_y définie par (1.19) est de classe C^1, définie positive, radialement non bornée et vérifie :

$$\frac{\partial V_y}{\partial x}(x,y)\, f(x,y) \ < \ 0 \qquad \forall (x,y) \neq 0 \ : \ \frac{\partial V_y}{\partial y}(x,y) \ = \ 0 \ . \tag{9.72}$$

<u>V_y est de classe C^1 :</u> Pour la dérivée partielle par rapport à y, nous avons directement:

$$\frac{\partial V_y}{\partial y}(x,y) \ = \ \psi(x,y) \ . \tag{9.73}$$

Ainsi, $\frac{\partial V_y}{\partial y}$ est comme ψ une fonction bien définie et continue.

Pour la dérivée partielle par rapport à x, puisque $\ell(V_x)$ est une fonction de classe C^1, il nous suffit de montrer que la fonction Ψ est continûment différentiable en x. Nous avons, pour tout vecteur unitaire w dans $\mathbb{R}^n$ et tout réel strictement positif h,

$$\begin{aligned}
&\Psi(x+hw,y)-\Psi(x,y)\\
&\qquad = \int_{\phi_x(x+hw)}^{y} \psi(x+hw,s)\,ds \;-\; \int_{\phi_x(x)}^{y} \psi(x,s)\,ds\ ,\\
&\qquad = \int_{\phi_x(x+hw)}^{y} [\psi(x+hw,s)-\psi(x,s)]\,ds \;-\; \int_{\phi_x(x)}^{\phi_x(x+hw)} \psi(x,s)\,ds\ ,\\
&\qquad = \int_{\phi_x(x+hw)}^{y} \left(\int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x}(x+thw,s)dt\right) hw\,ds \;-\; \int_{\phi_x(x)}^{\phi_x(x+hw)} \psi(x,s)\,ds\ .
\end{aligned}$$

Mais, avec :

$$\psi(x,\phi_x(x)) \;=\; 0\ ,$$

nous obtenons :

$$\psi(x,s) \;=\; \left(\int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,\phi_x(x)+t[s-\phi_x(x)])\,dt\right)[s-\phi_x(x)]$$

et donc :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\phi_x(x)}^{\phi_x(x+hw)} \psi(x,s)\,ds\right|\\
&\qquad = \left|\int_{\phi_x(x)}^{\phi_x(x+hw)} \left(\int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,\phi_x(x)+t[s-\phi_x(x)])\,dt\right)[s-\phi_x(x)]\,ds\right|\ ,\\
&\qquad \le \left|\int_{\phi_x(x)}^{\phi_x(x+hw)} \left(\int_0^1 \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,\phi_x(x)+t[s-\phi_x(x)])\right| dt\right)|s-\phi_x(x)|\,ds\right|\ .
\end{aligned}$$

Puisque ϕ_x est localement Hölderienne d'ordre strictement plus grand que $\frac{1}{2}$, nous pouvons trouver des réels strictement positifs h_0, k, H_x et ε tels que nous avons :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\phi_x(x)}^{\phi_x(x+hw)} \psi(x,s)\,ds\right| &\le k\left|\int_{\phi_x(x)}^{\phi_x(x+hw)} |s-\phi_x(x)|\,ds\right|\ ,\\
&\le \frac{k}{2}\,|\phi_x(x+hw)-\phi_x(x)|^2\ ,\\
&\le \frac{kH_x}{2}\,h^{1+2\varepsilon} \qquad \forall h\le h_0\ .
\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\phi_x(x)}^{\phi_x(x+hw)} \psi(x,s)\,ds \;=\; 0\ .$$

Nous avons ainsi :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Psi(x+hw,y)-\Psi(x,y)}{h} \;=\; \int_{\phi_x(x)}^{y}\left(\int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,s)dt\right) w\,ds$$

et donc :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,y) \;=\; \int_{\phi_x(x)}^{y} \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,s)\,ds\ . \tag{9.74}$$

Ψ est donc bien différentiable en x et, du fait de son expression, cette différentielle est continue.

V_y est définie positive : D'après (1.16) et la continuité de ψ, $\psi(x,y)$ garde le même signe lorsque y varie dans l'intervalle $(\phi_x(x),+\infty)$ (respectivement dans $(-\infty,\phi_x(x))$. Donc, avec (1.17), (1.18) implique :

$$\psi(x,y)\,[y-\phi_x(x)] \;>\; 0 \qquad \forall\,(x,y)\;:\; y\ne\phi_x(x)\ . \tag{9.75}$$

Ceci implique aussi que $\Psi(x,y)$ est nul si et seulement si $y=\phi_x(x)$ et strictement positif sinon. Puisque les fonctions ℓ et V_x sont définies positives et la fonction ϕ_x est nulle à l'origine, nous concluons que V_y est définie positive.

<u>V_y est radialement non bornée :</u> Il faut montrer que, si v est un réel positif, l'ensemble des paires (x,y) vérifiant :

$$0 \;\leq\; V_y(x,y) \;\leq\; v$$

est borné. Cette inégalité implique :

$$0 \;\leq\; V_x(x) \;\leq\; \ell^{-1}(v) \quad , \qquad 0 \;\leq\; \int_{\phi_x(x)}^{y} \psi(x,s)\,ds \;\leq\; v\ .$$

Puisque V_x est radialement non bornée, nous en déduisons que x est borné. Et, d'après (1.18), il en est de même de y.

<u>V_y vérifie (9.72) :</u> Ceci est une conséquence directe de (9.73) et (1.16), du fait que la fonction ℓ' est positive sur $\mathbb{R}_{+*}$, que V_x est continûment strictement assignée par ϕ_x et de l'égalité :

$$\frac{\partial V_y}{\partial x}(x,\phi_x(x)) \;=\; \ell'(V(x))\,\frac{\partial V_x}{\partial x}(x)\ .$$

Enfin, pour démontrer que V_y strictement assignable continûment à l'origine, il suffit d'exhiber un bouclage ϕ_y, continu à l'origine, qui rend sa dérivée négative et qui vérifie :

$$\phi_y(0,0) \;=\; 0\ .$$

Avec (9.74), nous obtenons :

$$\overbrace{\dot{V_y(x,y)}} \;=\; \left[\ell'(V_x(x))\,\frac{\partial V_x}{\partial x}(x) + \int_{\phi_x(x)}^{y}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,s)\,ds\right] f(x,y) \;+\; \psi(x,y)\,u\ .$$

Mais, puisque ψ est de classe C^1 et vérifie (1.16), nous avons :

$$\begin{aligned}\psi(x,y) \;&=\; \left[\int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,\phi_x(x)+s(y-\phi_x(x))\,ds\right][y-\phi_x(x)]\ ,\\ &=\; \Upsilon_1(x,y)\,[y-\phi_x(x)]\ ,\end{aligned}$$

où Υ_1 est une fonction continue qui, avec (9.75) et (1.20), satisfait :

$$\Upsilon_1(x,y) \;\geq\; \eta \qquad \forall (x,y)\,:\,|x|+|y|\leq\varepsilon\ . \tag{9.76}$$

où ε et η sont des réels strictement positifs.

Par ailleurs, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{\phi_x(x)}^{y}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,s)\,ds \;&=\; \left[\int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\phi_x(x)+s(y-\phi_x(x)))\,ds\right][y-\phi_x(x)]\ ,\\ &=\; \Upsilon_2(x,y)\,[y-\phi_x(x)]\ ,\\ f(x,y) \;-\; f(x,\phi_x(x)) \;&=\; \left[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,\phi_x(x)+s(y-\phi_x(x))\,ds\right][y-\phi_x(x)]\ ,\\ &=\; \Upsilon_3(x,y)\,[y-\phi_x(x)]\ ,\end{aligned}$$

où Υ_2 et Υ_3 sont des fonctions continues. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}\overbrace{\dot{V_y(x,y)}} \;=\; &\ell'(V_x(x))\,\tfrac{\partial V_x}{\partial x}(x)\,f(x,\phi_x(x)) \\ &+\;[y-\phi_x(x)]\left[\ell'(V_x(x))\,\tfrac{\partial V_x}{\partial x}(x)\,\Upsilon_3(x,y)+\Upsilon_2(x,y)\,f(x,y)+\Upsilon_1(x,y)\,u\right]\ .\end{aligned} \tag{9.77}$$

Avec (9.76), pour $|x|+|y|\leq\varepsilon$, la dérivée $\overbrace{\dot{V_y(x,y)}}$ est rendue définie négative par :

$$\phi_y(x,y) \;=\; -\frac{1}{\Upsilon_1(x,y)}\left[(y-\phi_x(x))+\ell'(V_x(x))\,\frac{\partial V_x}{\partial x}(x)\,\Upsilon_3(x,y)+\Upsilon_2(x,y)\,f(x,y)\right]\ .$$

Cette fonction étant continue au voisinage de l'origine et satisfaisant :

$$\phi_y(0,0) \;=\; 0\ ,$$

ceci démontre que V_y est strictement assignable continûment à l'origine.

9.4 Preuve de la Proposition 4

Considérons la fonction V_y définie par :

$$V_y(x,y) \;=\; V_x(x)) \;+\; U_y(\Psi(x,y)) \;.$$

C'est une fonction de classe C^1. Elle est définie positive puisque nous avons la suite d'implications suivante :

$$V_y(x,y) \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} V_x(x)) \;=\; 0 & \Rightarrow & x \;=\; 0 \\ U_y(\Psi(x,y)) \;=\; 0 & \Rightarrow & \Psi(x,y) \;=\; 0 \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \Psi(0,y) \;=\; y \;=\; 0 \;.$$

Elle est aussi propre puisque, les fonctions V_x et U_y étant propres, pour tout réel c positif, il existe des réels positifs c_x et c_y satisfaisant :

$$\{(x,y) \,:\, V_y(x,y) \leq c\} \quad \subset \quad \{(x,y) \,:\, |x| \leq c_x \,,\, |\Psi(x,y)| \leq c_y\}$$

où ce dernier ensemble est borné d'après la propriété $\mathcal{P}2$.

Par ailleurs, avec la propriété $\mathcal{P}3$ et la notation :

$$G(x,y,u) \;=\; \frac{\partial V_x}{\partial x}(x) g(x,y,u) \;+\; \frac{\partial U_y}{\partial y}(\Psi(x,y)) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,y) g(x,y,u) + \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y) h_u(x,y,u) \right) \;,$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \overbrace{V_y(x,y)}^{\cdot} \;&=\; \frac{\partial V_x}{\partial x}(x)\, f(x) \;+\; \frac{\partial U_y}{\partial y}(\Psi(x,y)) h_y(\Psi(x,y)) \;+\; G(x,y,u)\, u \;, \\ &=\; -W_x(x) \;-\; W_y(\Psi(x,y)) \;+\; G(x,y,u)\, u \end{aligned}$$

Il est alors possible de montrer l'existence d'une fonction continue ϕ_y satisfaisant :

$$|\phi_y(x,y)| \;<\; u_b \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^{n_y} \;, \tag{9.78}$$

$$G(x, y\phi_y(x,y))\, \phi_y(x,y) \;<\; 0 \qquad \forall (x,y) \neq 0 \,:\, |G(x,y,0)| \;\neq\; 0 \;. \tag{9.79}$$

Avec ce bouclage et la propriété $\mathcal{P}1$ et puisque la fonction W_x est définie positive, nous obtenons :

$$(x \;=\; 0 \,,\; W_y(y) \;=\; |G(0,y,0)|) \qquad \forall (x,y) \,:\, \overbrace{V_y(x,y)}^{\cdot} \;=\; 0 \;.$$

La propriété de stabilité asymptotique résulte donc de la propriété de état-zéro détectabilité et du Théorème de LaSalle.

Observons que, au lieu de chercher le bouclage ϕ_y satisfaisant (9.78) et (9.79), nous pouvons utiliser un bouclage bouclage dynamique. Nous cherchons alors deux fonctions ϕ et φ telles que le bouclage est donné par :

$$\dot{\varkappa} \;=\; \left[1 - \frac{|\varkappa|^2}{u_b^2} \right] G(x,\varkappa)^\top \;-\; \varkappa \quad , \qquad u \;=\; \varkappa \;.$$

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} &\overbrace{V_y(x,y) \;-\; \frac{u_b^2}{2} \log\left(1 - \frac{|\varkappa|^2}{u_b^2} \right)}^{\cdot} \\ &\qquad\qquad =\; -W_x(x) \;-\; W_y(\Psi(x,y)) \;+\; G(x,y,\varkappa)\, \varkappa \;+\; \frac{u_b^2 \varkappa^\top \dot{\varkappa}}{u_b^2 - |\varkappa|^2} \;, \\ &\qquad\qquad =\; -W_x(x) \;-\; W_y(\Psi(x,y)) \;-\; \frac{|\varkappa|^2}{u_b^2 - |\varkappa|^2} \;. \end{aligned}$$

9.5 Démonstration de la Proposition 5

9.5.1 Résultats préliminaires

La condition (1.30) et le fait que, d'après l'hypothèse H2, la fonction $t \mapsto |\exp(Ht)|$ est bornée sur $[0,+\infty[$ impliquent qu'il existe un réel strictement positif λ tel que nous avons :

$$\max\left\{\text{Ré}\left(\text{valeur propre}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0)\right)\right)\right\} \;<\; -\lambda \;,$$
$$-\frac{\lambda}{2} \;<\; \min\left\{\text{Ré}\left(\text{valeur propre}\left(H\right)\right)\right\} \;\leq\; \max\left\{\text{Ré}\left(\text{valeur propre}\left(H\right)\right)\right\} \;<\; \frac{\lambda}{2} \;. \tag{9.80}$$

La fonction $t \mapsto |\exp(-[\frac{\lambda}{2} + H]t)|$ est donc bornée sur $[0,+\infty[$ et il existe une matrice symétrique définie positive P satisfaisant :

$$P[H - \tfrac{\lambda}{2}I] \;+\; [H - \tfrac{\lambda}{2}I]^T P \;=\; -2\,I \;. \tag{9.81}$$

Enfin, avec $H1$ et (1.30), il existe une fonction α de classe $\mathcal{K}$ et un réel μ tels que toute solution $X(x,t)$ de (1.3) est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{n_x} \times [0,+\infty[$ et satisfait, pour tout $t \geq 0$,

$$|X(x,t)| \;\;\leq\;\; \alpha(|x|)\,\exp(-\lambda t)\;, \tag{9.82}$$
$$\left|\frac{\partial X}{\partial x}(x,t)\right| \;\;\leq\;\; (\mu + \alpha(|x|))\exp(-\lambda t)\;. \tag{9.83}$$

9.5.2 Ψ est bien définie et de classe C^1

Commençons par observer, avec H2, (1.29) et (9.82), que toute composante $Y(x,y,t)$ de solution de (1.21) avec u nul satisfait :

$$\overbrace{1 + U_y(Y(x,y,t))}^{\cdot} \;\leq\; \gamma(\alpha(|x|))\,(1 + U_y(Y(x,y,t)))\;\alpha(|x|)\,\exp(-\lambda t) \qquad \forall t \geq 0\;. \tag{9.84}$$

Nous en déduisons :

$$U_y(Y(x,y,t)) \;\leq\; \exp\left(\gamma(\alpha(|x|))\,\alpha(|x|)\frac{1-\exp(-\lambda t)}{\lambda}\right)(1 + U_y(y)) \;-\; 1\;.$$

Comme U_y est une fonction de Lyapunov sur $\mathbb{R}^{n_y}$, nous déduisons de cette inégalité l'existence d'une fonction β de classe $\mathcal{K}^\infty$ telle que nous avons :

$$|Y(x,y,t)| \;\leq\; \beta(|x| + |y|) \qquad \forall t \geq 0\;. \tag{9.85}$$

Par ailleurs, la fonction h_x étant continue, il existe une fonction continue croissante ρ satisfaisant :

$$|h_x(x,y)| \;\leq\; \rho(|x| + |y|)\;.$$

Nous avons donc :

$$|h_x(X(x,t),Y(x,y,t))| \;\leq\; \rho\,(\alpha(|x|),\beta(|x|+|y|)) \qquad \forall t \geq 0\;.$$

Avec (9.82), nous en déduisons que, pour toute paire (x,y) dans $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y}$, la fonction $s \mapsto \exp(-[\frac{\lambda}{2} + H]s)\,h_x(X(x,s),Y(x,y,s))\,\left[\exp(\frac{\lambda}{2}s)X(x,s)\right]$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La fonction Ψ est donc bien définie.

À partir de ce point, pour montrer que Ψ est une fonction de classe C^1, il suffit de montrer que les hypothèses de [(Deheuvels), Théorème 3.150] (par exemple) sont satisfaites :

1. Pour tout s de $\mathbb{R}_+$, la fonction $\omega_s : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \to \mathbb{R}^{n_y}$ donnée par :

$$\omega_s(x,y) \;=\; \exp(-Hs)\,h_x(X(x,s),Y(x,y,s))\,X(x,s)$$

   est de classe C^1.

2. Pour toute paire (x,y) de $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y}$, les fonctions $s \mapsto \frac{\partial \omega_s}{\partial x}(x,y)$ et $s \mapsto \frac{\partial \omega_s}{\partial y}(x,y)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_s}{\partial x} &= \exp(-[\tfrac{\lambda}{2}+H]s) \times \\
&\qquad \times \left[\frac{\partial h_x}{\partial x}(X(x,s),Y(x,y,s))\frac{\partial X}{\partial x}(x,s)\left(\exp(\tfrac{\lambda}{2}s)X(x,s)\right)\right. \\
&\qquad\qquad +h_x(X(x,s),Y(x,y,s))\left(\exp(\tfrac{\lambda}{2}s)\tfrac{\partial X}{\partial x}(x,s)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \left.+\frac{\partial h_x}{\partial y}(X(x,s),Y(x,y,s))\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y,s)\left(\exp(\tfrac{\lambda}{2}s)X(x,s)\right)\right] , \\
\frac{\partial \omega_s}{\partial y} &= \exp(-[\tfrac{\lambda}{2}+H]s)\,\frac{\partial h_x}{\partial y}(X(x,s),Y(x,y,s))\frac{\partial Y}{\partial y}(x,y,s)\left(\exp(\tfrac{\lambda}{2}s)X(x,s)\right) .
\end{aligned}$$

La fonction h_x étant de classe C^1, avec (9.82), (9.83) et (9.85), nous concluons que les fonctions

$$\begin{aligned}
s \ \mapsto\ & \exp(-[\tfrac{\lambda}{2}+H]s) \\
& \times \left(\frac{\partial h_x}{\partial x}(X(x,s),Y(x,y,s))\frac{\partial X}{\partial x}(x,s)\,,\, h_x(X(x,s),Y(x,y,s))\,,\, \frac{\partial h_x}{\partial y}(X(x,s),Y(x,y,s))\right)
\end{aligned}$$

et

$$s \ \mapsto\ \exp(\lambda s)\left(\frac{\partial X}{\partial x}(x,s)\,,\, X(x,s)\right)$$

sont bornées sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi il ne reste qu'à établir que la fonction

$$s \ \mapsto\ \exp(-\tfrac{\lambda}{2}s)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y,s)\,,\, \frac{\partial Y}{\partial y}(x,y,s)\right)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soient :

$$\psi_x(t) \ = \ \exp(-\tfrac{\lambda}{2}t)\,\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y,s) \quad , \qquad \psi_y(t) \ = \ \exp(-\tfrac{\lambda}{2}t)\,\frac{\partial Y}{\partial y}(x,y,s) \ .$$

Nous avons :

$$\dot{\psi}_x \ = \ [A+B(t)]\,\psi_x \ + \ \exp(-\tfrac{\lambda}{2}t)\,C(t) \quad , \qquad \psi_x(0) \ = \ 0$$

et :

$$\dot{\psi}_y \ = \ [A+B(t)]\,\psi_y \quad , \qquad \psi_y(0) \ = \ I \ ,$$

avec les notations :

$$\begin{aligned}
A &= H - \frac{\lambda}{2}I \ , \\
B(t) &= \frac{\partial h_x}{\partial y}(X(x,t),Y(x,y,t))\,X(x,t) \ , \\
C(t) &= \left[\frac{\partial h_x}{\partial x}(X(x,t),Y(x,y,t))\,X(x,t) + h_x(X(x,t),Y(x,y,t))\right]\frac{\partial X}{\partial x}(x,t) \ .
\end{aligned}$$

Comme ci-dessus, les inégalités (9.82), (9.83) et (9.85) nous permettent d'affirmer que la fonction $t \mapsto \exp(\lambda t)\,(B(t),C(t))$ est bornée en norme sur $\mathbb{R}_+$, disons par un réel c_1 qui dépend de la condition initiale (x,y).

Alors, avec P la matrice satisfaisant (9.81), considérons la fonction $U_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie comme :

$$U_x(t) \ = \ \mathrm{tr}\left(\psi_x(t)^T P \psi_x(t)\right) \ .$$

Avec les notations :

$$a \ = \ \frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)} \quad , \qquad b \ = \ \sqrt{\lambda_{\max}(P)} \ ,$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}\dot{U}_x &= -2\,\mathrm{tr}\left(\psi_x(t)^T\psi_x(t)\right) \;+\; 2\,\mathrm{tr}\left(\psi_x(t)^T P\left[B(t)\psi_x(t)+\exp(-\tfrac{\lambda}{2}t)C(t)\right]\right)\ ,\\ &\leq -2\left[a-\frac{c_1}{\sqrt{a}}\exp(-\lambda t)\right]U_x(t) \;+\; 2\,c_1\,b\sqrt{U_x(t)}\exp(-\tfrac{3\lambda}{2}t)t)\ .\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\sqrt{U_x(t)} \;\leq\; \exp\left(-at \;+\; \frac{c_1}{\lambda\sqrt{a}}\right)\sqrt{U_x(0)} \;+\; 4\,c_1\,b\,\frac{\exp(-\frac{3\lambda}{4}t)-\exp(-at)}{4a-3\lambda}\,\exp\left(\frac{c_1}{\lambda\sqrt{a}}\right)\ .$$

Nous pouvons en conclure que la fonction U_x et donc la fonction ψ_x sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. L'intégrabilité de la fonction ψ_y sur $\mathbb{R}_+$ peut être établie de la même façon.

9.5.3 Propriété $\mathcal{P}1$

Lorsque x est à l'origine, point d'équilibre de (1.3), (1.28) donne trivialement :

$$\Psi(0,y) \;=\; y\ .$$

9.5.4 Propriété $\mathcal{P}3$

Sans être trop rigoureux à propos des intégrales indéfinies pour ne pas aourduir les notations, nous avons :

$$\begin{aligned}&\Psi(X(x,\delta),Y(x,y,\delta))-\Psi(x,y)\\ &\quad= [Y(x,y,\delta)-y]\\ &\qquad+\left[\int_0^\infty \exp(-Hs)\,h_x(X(X(x,\delta),s),Y(X(x,\delta),Y(x,y,\delta),s))\,X(X(x,\delta),s)\,ds\right.\\ &\qquad\qquad\left.-\int_0^\infty \exp(-Hs)\,h_x(X(x,s),Y(x,y,s))\,X(x,s)\,ds\right]\ ,\\ &\quad= [Y(x,y,\delta)-y]\\ &\qquad+\left[\int_0^\infty \exp(-Hs)\,h_x(X(x,s+\delta),Y(x,y,s+\delta))\,X(x,s+\delta)\,ds\right.\\ &\qquad\qquad\left.-\int_0^\infty \exp(-Hs)\,h_x(X(x,s),Y(x,y,s))\,X(x,s)\,ds\right]\ ,\\ &\quad= [Y(x,y,\delta)-y]\\ &\qquad+\left[\int_\delta^\infty \exp(-H(r-\delta))\,h_x(X(x,r),Y(x,y,r))\,X(x,r)\,dr\right]\\ &\qquad\qquad-\int_0^\infty \exp(-Hs)\,h_x(X(x,s),Y(x,y,s))\,X(x,s)\,ds\ ,\\ &\quad= [Y(x,y,\delta)-y] \;+\; [\exp(H\delta)-I]\int_\delta^\infty \exp(-Hr)\,h_x(X(x,r),Y(x,y,r))\,X(x,r)\,dr\\ &\qquad\qquad-\int_0^\delta \exp(-Hr)\,h_x(X(x,r),Y(x,y,r))\,X(x,r)\,dr\ ,\\ &\quad= [Y(x,y,\delta)-y] \;+\; (\exp(H\delta)-I)\,(\Psi(x,y)-y)\\ &\qquad\qquad-\int_0^\delta \exp(-Hr)\,h_x(X(x,r),Y(x,y,r))\,X(x,r)\,dr\ .\end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\frac{\Psi(X(x,\delta),Y(x,y,\delta))-\Psi(x,y)}{\delta} &= [Hy+h_x(x,y)x] \;+\; [H\,(\Psi(x,y)-y)] \;-\; h_x(x,y)x\\ &= H\,\Psi(x,y)\end{aligned}$$

9.5.5 Propriété $\mathcal{P}2$

Sachant que l'intégrale dans (1.28) converge, il existe un réel $T(x,y)$ tel que nous avons :

$$\left|\Psi(x,y) - y - \int_0^t \exp(-Hs)\, h_x(X(x,s),Y(x,y,s))\, X(x,s)\, ds\right| \leq 1 \qquad \forall t \geq T(x,y) \ .$$

Puisque nous avons :

$$Y(x,y,t) \ = \ \exp(Ht)\, y \ + \ \int_0^t \exp(H(t-s))\, h_x(X(x,s),Y(x,y,s))\, X(x,s)\, ds$$

nous en déduisons :

$$|\exp(Ht)\Psi(x,y) - Y(x,y,t)| \ \leq \ |\exp(Ht)| \qquad \forall t \geq T(x,y) \ . \tag{9.86}$$

La fonction $t \mapsto |\exp(Ht)|$ étant bornée sur $\mathbb{R}_+$, disons par K, il s'en suit que nous avons :

$$|Y(x,y,t)| \ \leq \ K\,[|\Psi(x,y)| + 1] \qquad \forall t \geq T(x,y) \ . \tag{9.87}$$

Par ailleurs de H2, (1.29) et (9.82), nous obtenons, pour tout $t \geq 0$,

$$\overbrace{1 + U_y(Y(x,y,t))}^{\cdot} \ + \ W_y(Y(x,y,t)) \ \geq \ -\gamma(\alpha(|x|))\,\alpha(|x|)\ \exp(-\lambda t)\,(1 + U_y(Y(x,y,t))) \quad .$$

Donc si $W_y(y)$ est nul pour tout y, nous en déduisons :

$$\frac{\overbrace{1 + U_y(Y(x,y,t))}^{\cdot}}{1 + U_y(Y(x,y,t))} \ \geq \ -\gamma(\alpha(|x|))\,\alpha(|x|)\ \exp(-\lambda t)$$

et donc :

$$\log\left(1 + U_y(Y(x,y,t))\right) \ - \ \log(1 + U_y(y)) \ \geq \ -\frac{1}{\lambda}\,\gamma(\alpha(|x|))\,\alpha(|x|) \qquad \forall t \geq 0 \ .$$

Puisque U_y est une fonction de Lyapunov sur $\mathbb{R}^{n_y}$, il existe des fonctions α_1 et α_2 de classe $\mathcal{K}^\infty$ telles que nous avons :

$$\alpha_1(|y|) \ \leq \ U_y(y) \ \leq \ \alpha_2(|y|) \ .$$

Ceci donne :

$$1 + \alpha_1(|y|) \ \leq \ \exp\left(\frac{1}{\lambda}\,\gamma(\alpha(|x|))\,\alpha(|x|)\right)(1 + \alpha_2(|Y(x,y,t)|) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

et donc, avec (9.87),

$$1 + \alpha_1(|y|) \ \leq \ \exp\left(\frac{1}{\lambda}\,\gamma(\alpha(|x|))\,\alpha(|x|)\right)(1 + \alpha_2\left(K\,[|\Psi(x,y)| + 1]\right) \ .$$

La propriété $\mathcal{P}2$ est donc satisfaite.

9.6 Démonstration de la Proposition 6

Comme dans le chapitre 9.4, nous pouvons établir que du fait des propriétés des fonctions V_x, U_y et ℓ et de la propriété $\mathcal{P}2_a$, la fonction V_y définie en (1.32) est une fonction de Lyapunov sur $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y}$ de classe C^1. En posant :

$$\begin{aligned}
\Delta(x,y) \ &= \ \frac{\partial \Psi_a}{\partial x}(x,y)\, f(x) \ + \ \frac{\partial \Psi_a}{\partial y}(x,y)\,(h_y(y) + h_x(x,y)x) \ - \ h_y(\Psi_a(x,y)) \ , \\
G(x,y,u) \ &= \ \frac{\partial V_x}{\partial x}(x) g(x,y,u) \\
&\qquad\qquad + \ \frac{\frac{\partial U_y}{\partial y}(\Psi_a(x,y))}{1 + U_y(\Psi_a(x,y))}\left(\frac{\partial \Psi_a}{\partial x}(x,y) g(x,y,u) + \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x,y) h_u(x,y,u)\right) \ ,
\end{aligned}$$

et avec $\mathcal{P}3_a$, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\overbrace{V_y(x,y)}^{\cdot} \;&=\; \ell'(V_x(x))\,\frac{\partial V_x}{\partial x}(x)\,f(x) \;+\; \frac{\frac{\partial U_y}{\partial y}(\Psi_a(x,y))h_y(\Psi_a(x,y))}{1+U_y(\Psi_a(x,y))} \;+\; \frac{\frac{\partial U_y}{\partial y}(\Psi_a(x,y))\Delta(x,y)}{1+U_y(\Psi_a(x,y))} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + G(x,y,u)\,u \\
&\leq\; -\ell'(V_x(x))\,W_x(x) \;+\; |x|^2\,\gamma(|x|) \;-\; \frac{W_y(\Psi_a(x,y))}{1+U_y(\Psi_a(x,y))} \;+\; G(x,y,u)\,u
\end{aligned}
$$

Le résultat sera donc établi si nous trouvons une fonction ℓ ayant les propriétés requises et satisfaisant :

$$
|x|^2\,\gamma(|x|) \;\leq\; \frac{1}{2}\,\ell'(V_x(x))\,W_x(x) \qquad \forall\, x\ . \tag{9.88}
$$

Puisque la fonction γ est continue, la matrice $\frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2}(0)$ et la fonction $V_x(x)$ sont définies positives, il existe un réel strictement positif c_1 tel que nous avons :

$$
|x|^2\,\gamma(|x|) \;\leq\; c\,W_x(x) \qquad \forall x\,:\,V_x(x)\;\leq\;\frac{1}{c}\ .
$$

Nous pouvons alors définir une fonction $\widetilde{\ell}$ par :

$$
\widetilde{\ell}(v) \;=\; \sup_{\{x:V_x(x)\leq v\}}\left\{\max\left\{c,\frac{|x|^2\gamma(|x|)}{W_x(x)}\right\}\right\}\ .
$$

Cette fonction est positive, non décroissante et égale à c pour $v\leq\frac{1}{c}$. Ceci nous permet de définir ℓ comme l'intégrale de Riemann :

$$
\ell'(v) \;=\; 1 \;+\; \int_v^{v+1}\widetilde{\ell}(s)ds\ .
$$

Cette fonction est continue, définie positive, non intégrable et satisfait :

$$
\ell'(v) \;\geq\; \widetilde{\ell}(v) \qquad \forall v\geq 0
$$

et donc (9.88).

Chapitre 10

Démonstrations des résultats sur "Stabilité entrée-état et Atténuation de perturbations"

10.1 Démonstration de la Proposition 7

Nous commençons par établir le résultat technique suivant.

Lemme 10.1 *Soit a et b deux réels, et $\gamma_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\gamma_z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions non décroissantes. Supposons l'existence de s_0 $(\geq -\infty)$ et s_∞ $(\leq +\infty)$ satisfaisant :*

$$\gamma_x \circ \gamma_z(s) \;<\; s \qquad \forall s \in]s_0, s_\infty[\ , \tag{10.2}$$

$$\max\{a, \gamma_x(b)\} \;<\; s_\infty\ . \tag{10.3}$$

Sous ces conditions, toute paire de réels (x, z) satisfaisant les inégalités :

$$x \;\leq\; \max\{a, \gamma_x(z)\} \quad , \qquad x \;<\; s_\infty\ , \tag{10.4}$$

$$z \;\leq\; \max\{b, \gamma_z(x)\} \quad , \qquad z \;<\; \gamma_z(s_\infty)\ , \tag{10.5}$$

satisfait aussi :

$$x \;\leq\; \max\{s_0, a, \gamma_x(b)\}\ , \tag{10.6}$$

$$z \;\leq\; \max\{\gamma_z(s_0), \gamma_z(a), b\}\ . \tag{10.7}$$

Démonstration :

Supposons que nous avons :

$$s_\infty \;>\; x \;>\; \max\{s_0, a, \gamma_x(b)\} \tag{10.8}$$

et donc, en particulier, que x est dans l'intervalle $]s_0, s_\infty[$. D'après (10.2), nous avons dans ce cas :

$$\gamma_x \circ \gamma_z(x) \;<\; x\ .$$

Avec (10.5) et puisque γ_x est non décroissante, nous en déduisons :

$$\gamma_x(z) \;\leq\; \max\{\gamma_x(b), \gamma_x \circ \gamma_z(x)\} \;<\; x\ .$$

Alors (10.4) nous donne :

$$x \;\leq\; a\ ;$$

ce qui est une contradiction. Donc l'inégalité (10.6) est bien satisfaite.

Avec (10.5), nous en déduisons alors :

$$\begin{aligned} \gamma_z(x) &\leq \max\{\gamma_z(s_0), \gamma_z(a), \gamma_z \circ \gamma_x(b)\}\ , \\ z &\leq \max\left\{\gamma_z(s_0), \gamma_z(a), \max\{b, \gamma_z \circ \gamma_x(b)\}\right\}\ . \end{aligned}$$

Maintenant, soit $\gamma_x(b)$ est plus petit ou égal à s_0 et l'inégalité (10.7) est satisfaite puisque γ_z est non décroissante. Soit $\gamma_x(b)$ est strictement plus grand que s_0 et donc, avec (10.3), dans l'intervalle $]s_0, s_\infty[$. Nous avons alors :

$$\gamma_x \circ \gamma_z(\gamma_x(b)) \ < \ \gamma_x(b) \ .$$

γ_x étant non décroissante, ceci implique :

$$\gamma_z \circ \gamma_x(b) \ \leq \ b$$

et donc (10.12).

Passons maintenant à la démonstration de la Proposition 7.

Observons tout d'abord que (2.6) et (2.7) implique l'existence de fonctions a_x et a_z de classe $\mathcal{K}$ telles que nous avons :

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq t} |k(Z(z,t;(e,u)),e(t),u(t))| \\ &\qquad \leq \ \max\left\{a_z(|z|), \sup_{0\leq t}\gamma_{de}(|e(t)|), \sup_{0\leq t}\gamma_{du}(|u(t)|)\right\} \ ,\end{aligned} \tag{10.9}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty} \sup_{t\leq s} |k(Z(z,s;(e,u)),e(s),u(s))| \\ &\qquad \leq \ \lim_{t\to\infty} \max\left\{\sup_{t\leq s}\gamma_{de}(|e(s)|), \sup_{t\leq s}\gamma_{du}(|u(s)|)\right\} \ ,\end{aligned} \tag{10.10}$$

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq t} |h(X(x,t;(d,u)),u(t))| \\ &\qquad \leq \ \max\left\{a_x(|x|), \sup_{0\leq t}\gamma_{ed}(|d(t)|), \sup_{0\leq t}\gamma_{eu}(|u(t)|)\right\} \ ,\end{aligned} \tag{10.11}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty} \sup_{t\leq s} |h(X(x,s;(d,u)),u(s))| \\ &\qquad \leq \ \lim_{t\to\infty} \max\left\{\sup_{t\leq s}\gamma_{ed}(|d(s)|), \sup_{t\leq s}\gamma_{eu}(|u(s)|)\right\} \ .\end{aligned} \tag{10.12}$$

Pour toute condition initiale (x,z), soit $(X((x,z),t;u), Z((x,z),t;u))$ l'une quelconque des solutions correspondantes de (2.5) définie maximalement sur $[0,T[$. Pour simplifier les notations, nous posons :

$$\begin{array}{rclcrcl} \varkappa(t) & = & X((x,z),t;u) & , & \varepsilon_x(t) & = & h(\varkappa(t),u(t)) \ , \\ \zeta(t) & = & Z((x,z),t;u) & , & \delta_z(t) & = & k(\zeta(t),\varepsilon_x(t),u(t) \ . \end{array}$$

Pour tout réel τ arbitrairement fixé dans $[0,T[$, nous posons :

$$\begin{array}{rclcrclcrcll} \delta_{z\tau}(t) & = & \delta_z(t) & , & \varepsilon_{x\tau}(t) & = & \varepsilon_x(t) & , & u_\tau(t) & = & u(t) & \forall t\in[0,\tau] \ , \\ & = & 0 & , & & = & 0 & , & & = & 0 & \forall t\notin[0,\tau] \ . \end{array}$$

Alors $(X((x,z),t;u), Z((x,z),t;u))$ est solution au moins sur $[0,\tau]$ du système :

$$\dot z \ = \ g(z,\varepsilon_{x\tau}(t),u_\tau(t)) \quad , \qquad \dot x \ = \ f(x,\delta_{z\tau}(t),u_\tau(t)) \ . \tag{10.13}$$

Puisque la fonction $(\varepsilon_{x\tau}, \delta_{z\tau}, u_\tau)$ est dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{p_e+p_d+p_u})$ et que les deux-sous-systèmes de (10.13) sont stables entrée-état, cette solution peut être maximalement étendue à droite sur $[0,+\infty[$. Alors de (10.9) et (10.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,\tau])} |\delta_{z\tau}(t)| \ &\leq \ \max\left\{a_z(|z|), \gamma_{de}\left(\sup_{t\in[0,\tau]}|\varepsilon_{x\tau}(t)|\right), \sup_{t\in[0,\tau]}\gamma_{du}(|u_\tau(t)|)\right\} \ , \\ \sup_{t\in[0,\tau]} |\varepsilon_{x\tau}(t)| \ &\leq \ \max\left\{a_x(|x|), \gamma_{ed}\left(\sup_{t\in[0,\tau]}|\delta_{z\tau}(t)|\right), \sup_{t\in[0,\tau]}\gamma_{eu}(|u_\tau(t)|)\right\} \ . \end{aligned}$$

Donc, avec la condition de petit gain (2.8), le Lemme[1] 10.1 nous donne :

[1] avec $s_0 = 0$ et $s_\infty = +\infty$.

$$\sup_{t\in[0,\tau])} |\delta_z(t)| \;=\; \sup_{t\in[0,\tau])} |\delta_{z\tau}(t)| \;\leq\; \max\left\{ a_z(|z|), \gamma_{de}\circ a_x(|x|), \right.$$
$$\left. \sup_{t\in[0,\tau]} \gamma_{de}\circ\gamma_{eu}(|u_\tau(t)|),\ \sup_{t\in[0,\tau]} \gamma_{du}(|u_\tau(t)|) \right\} \;,$$

$$\sup_{t\in[0,\tau])} |\varepsilon_x(t)| \;=\; \sup_{t\in[0,\tau])} |\varepsilon_{x\tau}(t)| \;\leq\; \max\left\{ a_x(|x|), \gamma_{ed}\circ a_z(|z|), \right.$$
$$\left. \sup_{t\in[0,\tau]} \gamma_{ed}\circ\gamma_{du}(|u_\tau(t)|),\ \sup_{t\in[0,\tau]} \gamma_{eu}(|u_\tau(t)|) \right\} \;.$$

Si T est fini, alors les suprema sur $[0,\tau]$ des fonctions de $|u_\tau|$ peuvent être majorés par des suprema sur $[0,T]$ de fonction de $|u|$ qui sont finis puisque u est dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{p_u})$. Dans ce cas les majorants obtenus ci-dessus pour $\sup_{t\in[0,\tau])}|\delta_z(t)|$ et $\sup_{t\in[0,\tau])}|\varepsilon_x(t)|$ sont indépendants de τ. Les deux sous-systèmes en x et z étant stable entrée-état, le supremum sur $[0,\tau]$ de la norme de la solution $(X((x,z),t;u), Z((x,z),t;u))$ que nous considérons est aussi majorée par un terme indépendant de τ. Donc T ne peut qu'être infini et nous avons :

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq t}|\delta_z(t)| \;&\leq\; \max\left\{ a_z(|z|), \gamma_{de}\circ a_x(|x|), \sup_{0\leq t}\gamma_{de}\circ\gamma_{eu}(|u(t)|), \sup_{0\leq t}\gamma_{du}(|u(t)|)\right\} \;,\\
\sup_{0\leq t}|\varepsilon_x(t)| \;&\leq\; \max\left\{ a_x(|x|), \gamma_{ed}\circ a_z(|z|), \sup_{0\leq t}\gamma_{ed}\circ\gamma_{du}(|u(t)|), \sup_{0\leq t}\gamma_{eu}(|u(t)|)\right\} \;.
\end{aligned}$$

Et du fait de la stabilité entrée-état, le même type d'inégalités est valide pour $\sup_{0\leq t}|\zeta(t)|$ et $\sup_{0\leq t}|\varkappa(t)|$.

Maintenant si la norme L^∞ de u est infinie, il n'y a rien d'autre à démontrer. Supposons donc que cette norme est finie. Dans ce cas, d'après ce qui précède, les normes L^∞ de δ_z, ε_x, ζ et $\varkappa$ sont elles aussi finies. Alors (10.10) et (10.12) nous donne :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\sup_{t\leq s}|\delta_z(s)| \quad&\leq\quad \max\left\{ \lim_{t\to\infty}\gamma_{de}\left(\sup_{t\leq s}|\varepsilon_x(s)|\right), \lim_{t\to\infty}\sup_{t\leq s}\gamma_{du}(|u(s)|)\right\} \;,\\
\lim_{t\to\infty}\sup_{t\leq s}|\varepsilon_x(s)| \quad&\leq\quad \max\left\{ \lim_{t\to\infty}\gamma_{ed}\left(\sup_{t\leq s}|\delta_z(s)|\right), \lim_{t\to\infty}\sup_{t\leq s}\gamma_{eu}(|u(s)|)\right\} \;.
\end{aligned}$$

Avec le Lemme 10.1, nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\sup_{t\leq s}|\delta_z(s)| \quad&\leq\quad \max\left\{ \lim_{t\to\infty}\sup_{t\leq s}\gamma_{de}\circ\gamma_{eu}(|u(s)|), \lim_{t\to\infty}\sup_{t\leq s}\gamma_{du}(|u(s)|)\right\} \;,\\
\lim_{t\to\infty}\sup_{t\leq s}|\varepsilon_x(s)| \quad&\leq\quad \max\left\{ \lim_{t\to\infty}\sup_{t\leq s}\gamma_{ed}\circ\gamma_{du}(|u(s)|), \lim_{t\to\infty}\sup_{t\leq s}\gamma_{eu}(|u(s)|)\right\} \;.
\end{aligned}$$

Du fait de la stabilité entrée-état, le même type d'inégalités est valide pour $\lim_{t\to\infty}\sup_{t\leq s)}|\zeta(s)|$ et $\lim_{t\to\infty}\sup_{t\leq s)}|\varkappa(s)|$.

À partir d'ici, nous pouvons conclure en utilisant les résultats de [(Sontag et Wang [b])]

10.2 Démonstration de la Proposition 8

Commençons par établir le résultat suivant.

Lemme 10.14 *Pour tous réels ρ, λ et ε satisfaisant :*

$$\rho\in]0,1[\quad,\qquad \lambda\in]0,+\infty[\quad,\qquad \varepsilon\in[0,1[$$

et toute fonction β de classe $\mathcal{KL}$, il existe une fonction $\widetilde{\beta}$ de classe $\mathcal{KL}$ telle que, pour tous réels positifs ou nuls d et ς, toute fonction $y:[0,T[\to\mathbb{R}_+$, absolument continue, qui satisfait :

$$\dot{\overbrace{y(t)}} \;\leq\; -\lambda\, y(t) \;+\; (1-\varepsilon)\,\lambda \sup_{\rho t\leq\tau\leq t}\{y(\tau)\} \;+\; \beta(\varsigma,(1-\rho)t) \;+\; d \quad \text{ppt } t\in[0,T[\tag{10.15}$$

est bornée sur $[0,T[$ et vérifie :

$$y(t) \;\leq\; \widetilde{\beta}(y(0)+\varsigma,t) \;+\; \frac{d}{\lambda\varepsilon} \qquad \forall t\in[0,T[\;.$$

Démonstration :

Commençons par montrer que la fonction y est bornée sur $[0,T[$. Pour tout t dans $[0,T[$ et presque tout r dans $[0,t]$, nous avons :

$$\overset{\cdot}{\overbrace{y(r)}} \;\leq\; -\lambda\, y(r) \;+\; (1-\varepsilon)\,\lambda \sup_{0\leq\tau\leq t}\{y(\tau)\} \;+\; \beta(\varsigma,0) \;+\; d\ .$$

Nous en déduisons, pour tout r dans $[0,t]$ et tout t dans $[0,T[$,

$$y(r) \;\leq\; \exp(-\lambda r)\, y(0) \;+\; [1-\exp(-\lambda r)]\left[(1-\varepsilon)\sup_{0\leq\tau\leq t}\{y(\tau)\} + \frac{\beta(\varsigma,0)+d}{\lambda}\right]$$

et donc aussi :

$$\sup_{0\leq\tau\leq t}\{y(\tau)\} \;\leq\; y(0) \;+\; (1-\varepsilon)\sup_{0\leq\tau\leq t}\{y(\tau)\} \;+\; \frac{\beta(\varsigma,0)+d}{\lambda}\ .$$

Comme ε est strictement positif, nous en déduisons :

$$\sup_{0\leq\tau\leq t}\{y(\tau)\} \;\leq\; \frac{\lambda y(0)+\beta(\varsigma,0)+d}{\lambda\varepsilon}\ . \tag{10.16}$$

Le terme de droite étant indépendant de t, ceci établit bien la bornitude de y sur $[0,T[$.

Maintenant, pour tout entier n, définissons la fonction $z_n : \mathbb{R}_+ \to [-\frac{d}{\lambda\varepsilon}, +\infty[$ par :

$$\begin{array}{rcll} z_n(t) & = & y(t) \;-\; \frac{d}{\lambda\varepsilon} & \text{si } t\in[0,T-\frac{1}{n}[\ ,\\ & = & \big(y(T-\frac{1}{n}) - \frac{d}{\lambda\varepsilon}\big)\, \exp(-\lambda[t-(T-\frac{1}{n})]) & \text{si } t\in[T-\frac{1}{n},+\infty[\ , \end{array}$$

si T est fini et en remplaçant $T-\frac{1}{n}$ par n si T est infini. C'est une fonction absolument continue qui satisfait :

$$\overset{\cdot}{\overbrace{z_n(t)}} \;\leq\; -\lambda\, z(t) \;+\; (1-\varepsilon)\,\lambda \sup_{\rho t\leq\tau\leq t}\{z_n(\tau)\} \;+\; \beta(\varsigma,(1-\rho)t) \quad \text{ppt } t\in\mathbb{R}_+\ .$$

D'après ce qui précède nous savons aussi qu'elle est bornée. Nous pouvons donc définir une fonction $Z_n : [0,T[\to[-\frac{d}{\lambda\varepsilon}, +\infty[$ par :

$$Z_n(s) \;=\; \sup_{s\leq\tau}\{z_n(\tau)\}\ .$$

C'est une fonction non croissante et nous avons, pour tout s de $[0,\rho T[$,

$$\overset{\cdot}{\overbrace{z_n(t)}} \;\leq\; -\lambda\, z_n(t) \;+\; (1-\varepsilon)\,\lambda Z_n(s) \;+\; \beta(\varsigma,(1-\rho)t) \quad \text{ppt } t\geq\frac{s}{\rho}\ .$$

Comme ci-dessus, nous en déduisons, pour tout t dans $[\frac{s}{\rho},T[$,

$$\begin{array}{rcl} z_n(t) & \leq & \exp(-\lambda[t-\frac{s}{\rho}])\, z_n(\frac{s}{\rho}) \;+\; [1-\exp(-\lambda[t-\frac{s}{\rho}])]\left[(1-\varepsilon)\, Z_n(s) + \frac{\beta(\varsigma,\frac{1-\rho}{\rho}s)+d}{\lambda}\right]\ ,\\ & \leq & \left[\varepsilon\exp(-\lambda[t-\frac{s}{\rho}]) + (1-\varepsilon)\right] Z_n(s) \;+\; [1-\exp(-\lambda[t-\frac{s}{\rho}])]\, \frac{\beta(\varsigma,\frac{1-\rho}{\rho}s)+d}{\lambda}\ , \end{array}$$

et donc :

$$Z_n(t) \;\leq\; \left[\varepsilon\exp(-\lambda[t-\frac{s}{\rho}]) + (1-\varepsilon)\right] Z_n(s) \;+\; [1-\exp(-\lambda[t-\frac{s}{\rho}])]\, \frac{\beta(\varsigma,\frac{1-\rho}{\rho}s)+d}{\lambda}\ .$$

Soit alors la suite s_i définie par :

$$s_0 \;=\; 0 \quad , \qquad s_{i+1} \;=\; \frac{1}{\rho}\, s_i \;+\; \frac{\log(2)}{\lambda} \;=\; \left(\frac{1}{\rho^{i+1}} - 1\right) s_*\ ,$$

en posant :

$$s_* \;=\; \frac{\rho\log(2)}{\lambda(1-\rho)}\ .$$

Nous avons, pour t dans $[s_{i+1}, s_{i+2}[$,

$$\begin{aligned} z_n(t) \;\leq\; Z_n(s_{i+1}) \;&\leq\; (1-\tfrac{\varepsilon}{2})\, Z_n(s_i) \;+\; \tfrac{\beta(\varsigma, \frac{1-\rho}{\rho} s_i)+d}{2\lambda}\;, \\ &\leq\; (1-\tfrac{\varepsilon}{2})^i\, Z_n(0) \;+\; \sum_{j=0}^{i} (1-\tfrac{\varepsilon}{2})^{i-j} \tfrac{\beta(\varsigma, \frac{1-\rho}{\rho} s_i)+d}{2\lambda}\;, \end{aligned} \tag{10.17}$$

où, d'après (10.16),

$$Z_n(0) \;\leq\; \frac{\lambda y(0) + \beta(\varsigma, 0)}{\lambda \varepsilon}\;. \tag{10.18}$$

Dénotons par $[i/2]$ la partie entière de $\frac{i}{2}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{i} (1-\tfrac{\varepsilon}{2})^{i-j}\, \beta(\varsigma, \tfrac{1-\rho}{\rho} s_i) \;&=\; \sum_{j=0}^{[i/2]} (1-\tfrac{\varepsilon}{2})^{i-j}\, \beta(\varsigma, \tfrac{1-\rho}{\rho} s_i) \;+\; \sum_{j=[i/2]+1}^{i} (1-\tfrac{\varepsilon}{2})^{i-j}\, \beta(\varsigma, \tfrac{1-\rho}{\rho} s_i)\;, \\ &\leq\; \frac{(1-\frac{\varepsilon}{2})^{i-[i/2]}\, \beta(\varsigma, 0) + \beta(\varsigma, \frac{1-\rho}{\rho} s_{[i/2]+1})}{\frac{\varepsilon}{2}}\;, \\ &\leq\; \frac{(1-\frac{\varepsilon}{2})^{i-[i/2]}\, \beta(\varsigma, 0) + \beta\left(\varsigma\,,\, \left[\frac{1}{\rho^{[i/2]+1}} - 1\right] \frac{\log(2)}{\lambda}\right)}{\frac{\varepsilon}{2}}\;. \end{aligned} \tag{10.19}$$

Maintenant de :

$$\log\left(\frac{s_*}{s_* + s_i}\right) \;=\; i \log(\rho) \quad , \qquad \frac{i-1}{2} \;\leq\; [i/2] \;\leq\; \frac{i+1}{2}\;,$$

nous déduisons :

$$\rho^{[i/2]+1} \;\leq\; \sqrt{\frac{\rho s_*}{s_* + s_i}}\;, \quad (1-\tfrac{\varepsilon}{2})^{i-[i/2]} \;\leq\; \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \left(\frac{s_*}{s_* + s_i}\right)^{\frac{\log(\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}})}{\log(\rho)}}\;.$$

Aussi, de :

$$\frac{1}{\rho^2} s_i \;+\; \frac{\rho+1}{\rho} \frac{\log(2)}{\lambda} \;=\; s_{i+2} \;\geq\; t\;,$$

nous déduisons :

$$\frac{s_* + s_i}{s_*} \;=\; 1 \;+\; s_i \frac{\lambda(1-\rho)}{\rho \log(2)} \;\geq\; \rho \left(\frac{\lambda(1-\rho)}{\log(2)} t - 1\right)$$

et donc :

$$\frac{1}{\rho^{[i/2]+1}} \;\geq\; \sqrt{\frac{\lambda(1-\rho)}{\log(2)} t - 1}\;, \quad (1-\tfrac{\varepsilon}{2})^{i-[i/2]} \;\leq\; \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}} \left(\frac{1}{\frac{\lambda(1-\rho)}{\rho \log(2)} t - 1}\right)^{\frac{\log(\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}})}{\log(\rho)}}\;.$$

Avec (10.17) et (10.18) et (10.19), ces inégalités conduisent à :

$$\begin{aligned} z_n(t) \;\leq\; &\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}} \left(\frac{1}{\frac{\lambda(1-\rho)}{\rho \log(2)} t - 1}\right)^{\frac{\log(1-\frac{\varepsilon}{2})}{\log(\rho)}} \frac{\lambda y(0) + \beta(\varsigma, 0)}{\lambda \varepsilon} \\ &+ \frac{\frac{\beta(\varsigma, 0)}{1-\frac{\varepsilon}{2}} \left(\frac{1}{\frac{\lambda(1-\rho)}{\rho \log(2)} t - 1}\right)^{\frac{\log(\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}})}{\log(\rho)}} + \beta\left(\varsigma\,,\, \left[\sqrt{\frac{\lambda(1-\rho)}{\log(2)} t - 1} - 1\right] \frac{\log(2)}{\lambda}\right)}{\frac{\varepsilon}{2}} \qquad \forall t \geq s_1 \end{aligned}$$

Observons que le terme de droite définit une fonction de classe $\mathcal{KL}$ en $(y(0) + \varsigma, t)$ et ne dépend pas de n. Notre résultat est donc établi en passant à la limite pour n tendant vers l'infini, puisque nous avons aussi :

$$z_n(t) \;\leq\; \frac{\lambda y(0) + \beta(\varsigma, 0)}{\lambda \varepsilon} \qquad \forall t \geq 0$$

et :

$$\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\left(\frac{1}{\frac{\lambda(1-\rho)}{\rho\log(2)}t-1}\right)^{\frac{\log(1-\frac{\varepsilon}{2})}{\log(\rho)}} \geq 1 \qquad \forall t\in[0,s_1]\ .$$

Passons maintenant à la démontration de la Proposition 8.

Pour toute condition initiale (x,z), soit $(X((x,z),t;u),Z((x,z),t;u))$ l'une quelconque des solutions correspondantes de (2.5) définie maximalement sur $[0,T[$. Pour simplifier, les notations, nous posons :

$$\left\{\begin{array}{c} \varkappa(t) \;=\; X((x,z),t;u)\ , \quad \zeta(t) \;=\; Z((x,z),t;u) \quad , \\ \varepsilon_x(t) \;=\; h(\varkappa(t),u(t))\ , \quad \delta_z(t) \;=\; k(\zeta(t),\varepsilon_x(t),u(t))\ , \quad \mathcal{V}_x(t) \;=\; V_x(\varkappa(t))\ . \end{array}\right. \tag{10.20}$$

Observons que la fonction $t\mapsto \varkappa(t)$ est absolument continue sur $[0,T[$. La fonction V_x étant localement Lipschitzienne, la fonction $t\mapsto\mathcal{V}_x(t)$ est donc absolument continue sur $\mathbb{R}_+$. Aussi nous avons en particulier :

$$\zeta(0) \;=\; z \quad , \qquad \mathcal{V}_x(0) \;=\; V_x(x)\ .$$

Puisque γ_{xd} est de classe $\mathcal{K}$, nous déduisons de (2.6), pour tout s dans $[0,T[$ et presque tout t dans $[s,T[$,

$$\gamma_{xd}(|\delta_z(t)|)\leq \max\left\{\gamma_{xd}(\beta_d(|\zeta(s)|,t-s)),\ \sup_{r\in[s,t]}\gamma_{xd}\circ\gamma_{de}(|\varepsilon_x(r)|),\ \sup_{r\in[s,t]}\gamma_{xd}\circ\gamma_{du}(|u(r)|)\right\}\ .$$

Avec (2.9) et (2.10), nous en déduisons, pour tout s dans $[0,T[$, presque tout t dans $[s,T[$,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{V}_x}{dt}(t) \;\leq\; & -\lambda\,\mathcal{V}_x(t) \\ & + \max\left\{\gamma_{xd}(\beta_d(|\zeta(s)|,t-s)),(1-\varepsilon)\lambda\sup\nolimits_{r\in[s,t]}\mathcal{V}_x(r)\right\} \;+\; \sup\nolimits_{r\in[s,t]}\gamma_{Vu}(|u(r)|)\ ,\end{aligned} \tag{10.21}$$

où γ_{Vu} est la fonction de classe $\mathcal{K}$ définie par

$$\gamma_{Vu} \;=\; \gamma_{xu} \;+\; \mu \;+\; \gamma_{xd}\circ\gamma_{du}\ .$$

À partir de ce point, l'idée est d'utiliser le Lemme 10.14. Mais ceci nécessite la préparation qui suit. (10.21) nous donne, pour tout s dans $[0,T[$ et tout t dans $[s,T[$,

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_x(t) \;\leq\; & \exp(-\lambda(t-s))\,\mathcal{V}_x(s) \\ & + \int_s^t \exp(-\lambda(t-w))\max\left\{\gamma_{xd}(\beta_d(|\zeta(s)|,w-s)),(1-\varepsilon)\lambda\sup_{r\in[s,w]}\mathcal{V}_x(r)\right\}dw \\ & + \int_s^t \exp(-\lambda(t-w))\sup_{r\in[s,w]}\gamma_{Vu}(|u(r)|)dw\ .\end{aligned}$$

Puisque β_d est de classe $\mathcal{KL}$, γ_{xd} de classe $\mathcal{K}$ et que le supremum sous l'intégrale est pris sur un intervalle croissant en w, nous pouvons simplifier en :

$$\mathcal{V}_x(t) \;\leq\; \mathcal{V}_x(s) \;+\; \frac{1}{\lambda}\gamma_{xd}(\beta_d(|\zeta(s)|,0)) \;+\; (1-\varepsilon)\sup_{r\in[s,t]}\mathcal{V}_x(r) \;+\; \frac{1}{\lambda}\sup_{r\in[s,t]}\gamma_{Vu}(|u(r)|) \qquad \forall\, 0\leq s\leq t<T\ .$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned}\sup_{r\in[s,t]}\mathcal{V}_x(r) \;\leq\; & \mathcal{V}_x(s) \;+\; (1-\varepsilon)\sup_{r\in[s,t]}\mathcal{V}_x(r) \\ & + \frac{1}{\lambda}\gamma_{xd}(\beta_d(|\zeta(s)|,0)) \;+\; \frac{1}{\lambda}\sup_{r\in[s,t]}\gamma_{Vu}(|u(r)|) \qquad \forall\, 0\leq s\leq t<T\end{aligned}$$

et donc :

$$\varepsilon\,\mathcal{V}_x(t) \;\leq\; \varepsilon \sup_{r\in[s,t]} \mathcal{V}_x(r) \;\leq\; \mathcal{V}_x(s) \tag{10.22}$$

$$+\;\frac{1}{\lambda}\,\gamma_{xd}(\beta_d(|\zeta(s)|,0)) \;+\; \frac{1}{\lambda}\sup_{r\in[s,t]}\gamma_{Vu}(|u(r)|) \qquad \forall\, 0\leq s\leq t<T$$

Par ailleurs, nous savons qu'il existe une fonction β_z, de classe $\mathcal{KL}$, et une fonction γ_z de classe $\mathcal{K}$ telles que, pour tout t plus grand que s, nous avons :

$$|\zeta(t)| \;\leq\; \max\left\{\beta_z(|\zeta(s)|,t-s),\ \sup_{r\in[s,t]}\gamma_z(|\varepsilon_x(r)|+|u(r)|)\right\} \qquad \forall\, 0\leq s\leq t<T\ . \tag{10.23}$$

Rappelons ici qu'une fonction de classe $\mathcal{KL}$ est de classe $\mathcal{K}$ par rapport à son premier argument et observons que, pour toute fonction α de classe $\mathcal{K}$, nous avons l'inégalité :

$$\alpha(r+s) \;\leq\; \alpha(2r) \;+\; \alpha(2s)\ .$$

Alors, puisque h est continue et V est définie positive et radialement non bornée, de (10.22) et (10.23), nous obtenons, en prenant $s=0$,

$$\mathcal{V}_x(t) \quad\leq\quad M_V(x,z) \;+\; \frac{1}{\varepsilon\lambda}\sup_{r\in[0,t]}\gamma_{Vu}(|u(r)|) \qquad \forall\, t\in[0,T[\tag{10.24}$$

$$|\zeta(t)| \quad\leq\quad M_z(x,z) \;+\; \sup_{r\in[0,t]}\gamma_{zu}(|u(r)|) \qquad \forall\, t\in[0,T[\ , \tag{10.25}$$

où nous avons posé, en se rappelant les notations (10.20),

$$\begin{aligned} M_V(x,z) &= \frac{1}{\varepsilon}\,V_x(x) \;+\; \frac{1}{\varepsilon\lambda}\,\gamma(\beta_d(|z|,0))\ ,\\ M_z(x,z) &= \max\left\{\beta_z(|z|,0),\gamma_z\left(2\alpha_x(2M_V(x,z))\right)\right\} \end{aligned}$$

et :

$$\gamma_{zu}(r) \;=\; \gamma_z\left(2r+2\alpha_u(r)+2\alpha_x\left(\frac{2}{\varepsilon\lambda}\gamma_{Vu}(r)\right)\right)$$

et où α_x et α_u sont des fonctions de classe $\mathcal{K}$ satisfaisant :

$$|h(x,u)| \;\leq\; \alpha_x(V_x(x)) \;+\; \alpha_u(|u|) \qquad \forall (x,u)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{p_u} \tag{10.26}$$

et dont l'existence résulte des propriétés de V, la continuité de h et de :

$$h(0,0) \;=\; 0\ .$$

Puisque u est dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{p_u})$, (10.24) et (10.25) impliquent que la solution est bornée sur $[0,T[$ si T est fini. T ne peut donc être qu'infini. Alors, pour $s=\frac{t}{2}$, (10.21) et (10.25) nous donnent, pour presque tout t positif,

$$\frac{d\mathcal{V}_x}{dt}(t) \;\leq\; -\lambda\,\mathcal{V}_x(t) \;+\; \gamma_{xd}(\beta_d(2M_z(x,z),\tfrac{t}{2})) \;+\; (1-\varepsilon)\lambda\,\sup\nolimits_{r\in[\frac{t}{2},t]}\mathcal{V}_x(r) \tag{10.27}$$

$$+\;\sup\nolimits_{r\in[0,t]}\widetilde{\gamma}_{Vu}(|u(r)|)\ ,$$

où $\widetilde{\gamma}_{Vu}$ est la fonction de classe $\mathcal{K}$ définie par :

$$\widetilde{\gamma}_{Vu}(r) \;=\; \gamma_{Vu}(r) \;+\; \gamma_{xd}\left(\beta_d\left(2\gamma_{zu}(r,0)\right)\right.\ .$$

Maintenant, à chaque réel positif τ, nous associons la fonction $u_\tau:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{p_u}$ définie par :

$$\begin{aligned} u_\tau(t) &= u(t) \quad \forall\, t\in[0,\tau]\ ,\\ &= 0 \qquad \forall\, t\in]\tau,+\infty[\ . \end{aligned}$$

Elle est dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{p_u})$ et, en introduisant la notation U_t comme :

$$U_t \;=\; \sup_{r\in[0,t]} |u_\tau(r)| \ ,$$

nous avons :

$$U_t \;=\; \sup_{r\in[0,t]} |u(r)| \qquad \forall\, 0\leq t\leq \tau \ . \tag{10.28}$$

Clairement, $(X((x,z),t;u), Z((x,z),t;u))$ est solution au moins sur $[0,\tau]$ de :

$$\left\{\begin{array}{rclcrcl} \dot{z} &=& g(z,e,u_\tau(t))\ , & & e &=& h(x,u_\tau(t))\ , \\ \dot{x} &=& f(x,d,u_\tau(t))\ , & & d &=& k(z,e,u_\tau(t))\ . \end{array}\right.$$

Puisque u_τ est dans $L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{p_u})$, cette solution peut être maximalement étendue à droite sur $[0,+\infty[$ pour ce système. Dénotons par $\mathcal{V}_{x\tau}$ l'évaluation de la fonction V_x le long de cette extension. Nous avons évidemment :

$$\mathcal{V}_{x\tau}(t) \;=\; \mathcal{V}_x(t) \qquad \forall\, 0\leq t\leq\tau \ . \tag{10.29}$$

Mais aussi, ce qui précède étant indépendant de la solution et de u, nous avons (10.27) sous la forme :

$$\frac{d\mathcal{V}_{x\tau}}{dt}(t) \;\leq\; -\lambda\,\mathcal{V}_{x\tau}(t) \;+\; \gamma_{xd}(\beta_d(2M_z(x,z),\tfrac{t}{2})) \;+\; (1-\varepsilon)\lambda\,\sup\nolimits_{r\in[\frac{t}{2},t]}\mathcal{V}_{x\tau}(r) \;+\; \widetilde{\gamma}_{Vu}(U_t) \qquad \forall\, t\in[0,+\infty[\ ,$$

et donc, puisque la fonction $t\mapsto U_t$ est croissante,

$$\frac{d\mathcal{V}_{x\tau}}{dt}(t) \;\leq\; -\lambda\,\mathcal{V}_{x\tau}(t) \;+\; \gamma_{xd}(\beta_d(2M_z(x,z),\tfrac{t}{2})) \;+\; (1-\varepsilon)\lambda\,\sup\nolimits_{r\in[\frac{t}{2},t]}\mathcal{V}_{x\tau}(r) \;+\; \widetilde{\gamma}_{Vu}(U_\tau) \qquad \forall t\in[0,+\infty[\ .$$

D'après le Lemme 10.14, il existe une fonction β_V, de classe $\mathcal{KL}$ et indépendante de U_τ telle que nous avons :

$$\mathcal{V}_{x\tau}(t) \;\leq\; \beta_V(V_x(x)+M_z(x,z),t) \;+\; \frac{1}{\varepsilon\lambda}\widetilde{\gamma}_{Vu}(U_\tau) \qquad \forall\, t\geq 0$$

et donc, avec (10.29) et (10.28),

$$\mathcal{V}_x(t) \;\leq\; \beta_V(V_x(x)+M_z(x,z),t) \;+\; \frac{1}{\varepsilon\lambda}\sup_{r\in[0,\tau]}\widetilde{\gamma}_{Vu}(|u(r)| \qquad \forall\, 0\leq t\leq\tau\ ,$$

où rappelons-le τ est quelconque dans $\mathbb{R}_+$. Nous avons donc :

$$\mathcal{V}_x(t) \;\leq\; \beta_V(V_x(x)+M_z(x,z),t) \;+\; \frac{1}{\varepsilon\lambda}\sup_{r\in[0,t]}\widetilde{\gamma}_{Vu}(|u(r)|) \qquad \forall\, t\in[0,+\infty[\ . \tag{10.30}$$

Mais alors, avec (10.23) pour $s=\frac{t}{2}$, (10.25) et (10.26), nous obtenons aussi :

$$|\zeta(t)| \;\leq\; \beta_z(2M_z(x,z),\tfrac{t}{2}) + \gamma_z\left(2\alpha_x\left(2\beta_V(V_x(x)+M_z(x,z),\tfrac{t}{2})\right)\right) \;+\; \sup\nolimits_{r\in[0,t]}\varkappa_u(|u(r)|) \qquad \forall\, t\in[0,+\infty[\ , \tag{10.31}$$

où nous avons posé :

$$\varkappa_u(r) \;=\; \beta_z(2\gamma_{zu}(r),0) \;+\; \gamma_{zu}(r) \;+\; \gamma_z\left(2\alpha_x\left(\frac{2}{\varepsilon\lambda}\widetilde{\gamma}_{Vu}(s)\right)\right) \ .$$

(10.30) et (10.31) établissent la stabilité entrée-état.

10.3 Démonstration de la Proposition 9

Prenons le bouclage donné par la formule de Sontag [(Sontag [b])] :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= -\frac{A(x)+\sqrt{A(x)^2+|L_bV(x)|^4}}{|L_bV(x)|^2}\,L_bV(x)^\top && \text{si} \quad L_bV(x)\neq 0\ ,\\ &= 0 && \text{si} \quad L_bV(x)=0\ .\end{aligned}$$

En reprenant les arguments de [(Sontag [b])], nous pouvons montrer qu'il est continu. Pour établir la stabilité entrée-état, nous évaluons la dérivée de V le long des solutions de (2.11) avec $u=\phi$. Nous obtenons :

$$\dot{\overbrace{V(x)}} \;=\; -\sqrt{A(x)^2+|L_bV(x)|^4} \;+\; \left[\frac{\partial V}{\partial x}(x)\,(a(x)+p(x,d))-A(x)\right]\ .$$

Mais, avec la définition de A, nous pouvons en déduire :

$$\dot{\overbrace{V(x)}} \;\leq\; -\sqrt{A(x)^2+|L_bV(x)|^4} \qquad \forall (x,d)\ :\ \varkappa(|d|)\leq|x|\ , \tag{10.32}$$

où, d'après [(Sontag [b])], $A^2+|L_bV|^4$ est une fonction définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Le résultat est alors une conséquence de [(Sontag [c]), p.441].

10.4 Démonstration de la Proposition 10

Puisque V est définie positive sur $\mathbb{R}^n$ et radialement non bornée, il existe une fonction α_1 de classe $\mathcal{K}^\infty$ telle que :

$$\alpha_1(|x|) \;\leq\; V(x)\ . \tag{10.33}$$

Aussi, puisque V est une fonction de Lyapunov continûment strictement assignable pour le système (2.12), il existe un bouclage ϕ_s continu, vérifiant :

$$\phi_s(0) \;=\; 0$$

et telle que la fonction :

$$W(x) \;=\; -\left[L_aV(x)+L_bV(x)\phi_s(x)\right] \tag{10.34}$$

est définie positive sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout autre bouclage ϕ, nous obtenons :

$$\dot{\overbrace{V(x)}} \;=\; -W(x) \;+\; L_bV(x)\,\phi(x)-L_bV(x)\,\phi_s(x) \;+\; \frac{\partial V}{\partial x}(x)\,p(x,d)\ .$$

Restreignons notre attention à des bouclages ϕ dont la $i$ème composante est de la forme :

$$\phi_i(x) \;=-\mathrm{signe}(L_{b_i}V(x))\,\psi_i(x), \qquad \psi_i(x)\;\geq\;0\,, \quad i=1,2,\ldots,m,$$

où les fonctions ψ_i restent à définir. Avec (2.13), ceci nous conduit à :

$$\dot{\overbrace{V(x)}} \;\leq\; -W(x) \;-\; \sum_{i=1}^{m}|L_{b_i}V(x)|\Big(\psi_i(x)\;-\;|\phi_{si}(x)|\;-\;\sigma(V(x))\rho(|d|)\Big)\ . \tag{10.35}$$

Pour définir ψ_i à partir des fonctions γ_{xd} et γ_{ud} données dans l'énoncé, nous introduisons une fonction $\mathcal{S}$ de classe $\mathcal{K}^\infty$ et telle que, pour tout s et x, nous avons :

$$\gamma_{ud}^{-1}(|\phi_s(x)|) \;\leq\; \mathcal{S}(V(x)) \quad , \qquad \rho\circ\gamma_{xd}^{-1}\circ\alpha_1^{-1}(s) \;\leq\; \mathcal{S}(s)\ . \tag{10.36}$$

Une telle fonction $\mathcal{S}$ existe puisque V est définie positive sur $\mathbb{R}^n$ et radialement non bornée et que les fonctions ρ, γ_{xd} et α_1 sont continues et nulles en zéro. Alors, nous choisissons ψ_i comme :

$$\psi_i(x) \;=\; \theta_i(x)\,\omega_i(x)\ , \tag{10.37}$$

où :

$$\omega_i(x) \;=\; |\phi_{s_i}(x)| \;+\; \mathcal{S}(V(x))\,\sigma(V(x)) \tag{10.38}$$

et θ_i est une fonction introduite pour garantir la continuité et définie comme suit :
Pour chaque i, soit :

$$\mathcal{B}_{0i} \;=\; \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \;:\; L_{b_i}V(x) = 0\} \;,$$

et :

$$\mathcal{B}_{1i} \;=\; \left\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \;:\; |L_{b_i}V(x)|\Big(\mathcal{S}\big(V(x)\big)\sigma(V(x)) + |\phi_{s_i}(x)|\Big) \;\geq\; \frac{W(x)}{2m}\right\} \;. \tag{10.39}$$

Puisque W est une fonction définie positive sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_{0i}$ et $\mathcal{B}_{1i}$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, fermés et disjoints. Il s'en suit qu'il existe cette fonction : $\theta_i \,:\, \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to [0,1]$ qui est continue et satisfait :

$$\theta_i(x) \;=\; \left\{\begin{array}{lll} 1\;, & \text{si} & x \in \mathcal{B}_{1i}\;, \\ 0\;, & \text{si} & x \in \mathcal{B}_{0i}\;. \end{array}\right.$$

Avec cette définition, nous avons :

$$[1-\theta_i(x)]|L_{b_i}V(x)|\left[\mathcal{S}\big(V(x)\big)\sigma(V(x)) + |\phi_{s_i}(x)|\right] \;\leq\; \frac{W(x)}{2m} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \;. \tag{10.40}$$

Pour obtenir une expression explicite de θ_i, nous pouvons procéder comme suit :
Posons :

$$A(x) \;=\; -\frac{W(x)}{2m} \quad , \qquad B_i(x) \;=\; |L_{b_i}V(x)|\,\varphi_i(x)$$

avec :

$$\varphi_i(x) \;=\; \mathcal{S}(V(x))\,\sigma(V(x)) \;+\; |\phi_{s_i}(x)| \;.$$

Nous avons :

$$\begin{array}{rl} L_{b_i}V(x) \;=\; 0 & \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \;:\; B_i(x) \;=\; 0\;, \\ A(x) \;<\; 0 & \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \;:\; B_i(x) \;=\; 0\;. \end{array}$$

Alors, en nous inspirant de la formule de Sontag [(Sontag [b])], nous définissons une fonction ϑ_i :

$$\begin{array}{rcll} \vartheta_i(x) & = & \dfrac{A(x) + \sqrt{A(x)^2 + 3B_i(x)^2}}{|B_i(x)|} \;, & \text{si} \;\; |L_{b_i}V(x)| \neq 0\;, \\ & = & 0\;, & \text{si} \;\; |L_{b_i}V(x)| = 0\;. \end{array}$$

Comme dans [(Sontag [b])], nous pouvons montrer que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. De plus, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} A(x)^2 \;+\; 3B_i(x)^2 & = & \left(\dfrac{W(x)}{2m}\right)^2 + 3\left(|L_{b_i}V(x)|\,\varphi_i(x)\right)^2 \;, \\ & \geq & \left(\dfrac{W(x)}{2m} \;+\; |L_{b_i}V(x)|\,\varphi_i(x)\right)^2 \qquad \forall x \in \mathcal{B}_{1i}\;. \end{array}$$

Nous en déduisons que ϑ_i est plus grand que 1 sur $\mathcal{B}_{1i}$. Ceci nous permet de définir θ_i sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ comme :

$$\theta_i(x) \;=\; \mathrm{sat}\Big(\vartheta_i(x)\Big)\;,$$

où sat : $\mathbb{R}_+ \to [0,1]$ est la fonction saturation :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{sat}(r) & = & r\;, & \text{si } r \in [0,1]\;, \\ & = & 1\;, & \text{si } r > 1\;. \end{array}$$

Pour compléter la définition de θ_i à $\mathbb{R}^n$, nous posons simplement :

$$\theta_i(0) \;=\; 0\;.$$

Bien que la fonction ainsi obtenue puisse ne pas être continue en 0, la fonction ψ_i est continue sur $\mathbb{R}^n$ puisque la fonction ω_i est continue et nulle à l'origine.

Maintenant de (10.35) et (10.40), nous déduisons :

$$\begin{aligned}
\dot V &\leq -W(x) - \sum_{i=1}^m |L_{b_i}V(x)| \Big[\theta_i(x)\left(\mathcal{S}(V(x))\sigma(V(x)) + |\phi_{s_i}(x)|\right) \\
&\qquad\qquad -|\phi_{si}(x)| - \sigma(V(x))\rho(|d|)\Big] \ , \\
&\leq -W(x) + \sum_{i=1}^m |L_{b_i}V(x)| \left(1-\theta_i(x)\right)\left(\mathcal{S}(V(x))\sigma(V(x)) + |\phi_{s_i}(x)|\right) \\
&\qquad\qquad - \left(\sum_{i=1}^m |L_{b_i}V(x)|\right)\sigma(V(x))\left(\mathcal{S}(V(x)) - \rho(|d|)\right) \ , \\
&\leq -\frac{W(x)}{2} - \left(\sum_{i=1}^m |L_{b_i}V(x)|\right)\sigma(V(x))\left(\mathcal{S}(V(x)) - \rho(|d|)\right) \ .
\end{aligned}$$

De cette dernière inégalité et en utilisant le fait que la fonction W est définie positive sur $\mathbb{R}^n$, nous pouvons déduire l'existence d'une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ telle que nous avons :

$$V(X(x,t;d)) \ \leq \ \max\left\{\beta(V(x),t)\,, \ \sup_{\tau\in[0,t)} \mathcal{S}^{-1}\circ\rho\left(|d(\tau)|\right)\right\} \qquad \forall t \geq 0 \ .$$

L'inégalité (2.14) vient alors de (10.36) et (10.33). Et puisque, avec (10.38), (10.36) nous donne aussi :

$$|\phi(x)| \ \leq \ \gamma_{ud}(\mathcal{S}(V(x))) \ + \ m\,\sigma(V(x))\,\mathcal{S}(V(x)) \ ,$$

nous obtenons notre conclusion.

10.5 Démonstration de la Proposition 11

Commençons par établir un résultat technique suivant.

Lemme 10.41 *Pour toute fonction continue $\ell : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle qu'il existe des réels strictement positifs s_0 et μ vérifiant :*

$$\ell(s) \ \leq \ \mu\, s \qquad \forall s \in [0, s_0] \ , \tag{10.42}$$

il existe une fonction $\varkappa : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe C^{q+1}, de classe $\mathcal{K}^\infty$, et telle que nous avons :

$$s\,\varkappa'(s) \ \geq \ \varkappa(s) \ \geq \ \ell(s) \qquad \forall s \geq 0 \ . \tag{10.43}$$

Démonstration : Soit $\varkappa_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par :

$$\varkappa_0(s) \ = \ \max_{\tau\leq s}\left\{\max\{\ell(\tau) - \mu\tau\,, 0\}\right\} \ .$$

Elle est continue, croissante et nulle sur $[0, s_0]$. Elle nous permet de définir une fonction $\varkappa_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par :

$$\varkappa_1(s) \ = \ \frac{(2q+3)!}{((q+1)!)^2}\int_s^{2s} \varkappa_0(r)\frac{\left(\frac{r-s}{s}\right)^{q+1}\left(1-\frac{r-s}{s}\right)^{q+1}}{s}\,dr$$

en prenant l'intégrale au sens de Riemann. Cette fonction est de classe C^q, croissante et satisfait :

$$\varkappa_1(s) \ \geq \ \varkappa_0(s) \ \geq \ \ell(s) - \mu s \qquad \forall s \geq 0 \ .$$

La fonction $\varkappa$ de l'énoncé est alors prise comme :

$$\varkappa(s) \ = \ \mu\,s \ + \ \frac{1}{s_0}\int_0^{2s} \varkappa_1(r)dr \ .$$

Elle est de classe C^{q+1}, de classe $\mathcal{K}^\infty$ et satisfait :

$$\begin{aligned}
\varkappa(s) \ &\geq \ \mu\,s \ \geq \ \ell(s) \qquad \forall s \in [0, s_0] \ , \\
&\geq \ \mu\,s \ + \ \frac{1}{s_0}\int_s^{2s}\varkappa_1(r)dr \ \geq \ \mu\,s \ + \ \varkappa_1(s) \ \geq \ \ell(s) \qquad \forall s \in]s_0, +\infty[\ .
\end{aligned}$$

Enfin, nous avons :

$$\varkappa(s) \;\leq\; \mu\, s \;+\; \frac{2s}{s_0}\,\varkappa_1(2s) \;=\; s\,\varkappa'(s)\ .$$

Avec ce résultat à notre disposition, nous démontrons la Proposition 11 en deux étapes après avoir fixé une fois pour toute ε dans $]0,1[$.

Étape 1 : En premier lieu nous considérons le système :

$$\dot{x} \;=\; a(x) \;+\; b(x)\,(u_1 + c(x) d_x)\ .$$

Étant donnée une fonction continue ℓ de classe $\mathcal{K}^\infty$, choisie plus tard à partir de γ_d et satisfaisant (10.42), soit $\varkappa$ la fonction de classe C^{q+1}, de classe $\mathcal{K}^\infty$, donnée par le Lemme 10.41. Considérons la fonction :

$$V_1(x) \;=\; \varkappa(V_x(x))\ . \tag{10.44}$$

Prenons le bouclage sous la forme :

$$\phi_1(x) \;=\; \phi_x(x) \;+\; \psi(x)$$

où la fonction ψ reste à choisir. Avec (2.13), (2.16) et (10.43), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&L_a V_1(x) + L_b V_1(x)\,[\phi_x(x) + c(x) d_x] \\
&\qquad\qquad \leq\; \varkappa'(V_x(x))\,[-\lambda\, V_x(x) \;+\; L_b V_x(x)\,\psi(x) \;+\; |L_b V_x(x)|\,|c(x)|\,|d_x|] \\
&\qquad\qquad \leq\; -\lambda\, V_1(x) \;+\; \varkappa'(V_x(x))\,[L_b V_x(x)\,\psi(x) \;+\; |L_b V_x(x)|\,|c(x)|\,|d_x|] \\
&\qquad\qquad \leq\; -\lambda\, V_1(x) \;+\; \varkappa'(V_x(x))\,L_b V_x(x)\left[\psi(x) + \frac{1}{4}\,\varkappa'(V_x(x))\,L_b V_x(x)\,c(x)^2\right] \;+\; |d_x|^2\ .
\end{aligned}$$

En prenant ψ comme :

$$\psi(x) \;=\; -\frac{1}{4}\,\varkappa'(V_x(x))\,L_b V_x(x)\,c(x)^2\ ,$$

nous obtenons :

$$\dot{\overbrace{V_1(x)}} \;\leq\; -\lambda\, V_1(x) \;+\; |d_x|^2 \qquad \forall (x, d_x)\ . \tag{10.45}$$

Du fait de notre hypothèses de régularité, ψ est bien une fonction de classe C^q.

Il nous reste à choisir la fonction ℓ. D'après (2.18), (10.43) et (10.44), nous avons :

$$\alpha_1(|x|) \;\leq\; V_x(x) \;=\; \varkappa^{-1}(V_1(x)) \;\leq\; \ell^{-1}(V_1(x)) \qquad \forall\, x$$

et donc :

$$(\rho \circ \gamma_d(|x|))^2 \;\leq\; \left(\rho \circ \gamma_d \circ \alpha_1^{-1} \circ \ell^{-1}(V_1(x))\right)^2 \qquad \forall\, x\ .$$

Donc si la fonction ℓ est choisie pour satisfaire :

$$\left(\rho \circ \gamma_d \circ \alpha_1^{-1} \circ \ell^{-1}(s)\right)^2 \;\leq\; (1-\varepsilon)^2\,\lambda\, s \qquad \forall s \geq 0$$

ou de façon équivalente :

$$\frac{1}{(1-\varepsilon)^2 \lambda}\,\left(\rho \circ \gamma_d \circ \alpha_1^{-1}(s)\right)^2 \;\leq\; \ell(s) \qquad \forall s \geq 0\ ,$$

nous avons :

$$\gamma_d(|x|)^2 \;\leq\; (1-\varepsilon)^2\,\lambda\, V_1(x) \qquad \forall x\ .$$

D'après (2.17), nous pouvons trouver une fonction ℓ satisfaisant l'inégalité ci-dessus et (10.42).

Étape 2 : Considérons le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dot{x} &=& a(x) \;+\; b(x)\,(y + c(x) d_x)\ , \\
\dot{y} &=& u \;+\; f(x,y) \;+\; g(x,y)\, d_y\ .
\end{array}\right.$$

Soient V_2 la fonction de Lyapunov sur $\mathbb{R}^{n+1}$ de classe C^{q+1} donnée par :

$$V_2(x,y) \;=\; (1-\varepsilon)\, V_1(x) \;+\; \frac{1}{2}\,(y - \phi_1(x))^2\ .$$

Avec (10.45), nous obtenons :

$$\overbrace{V_2(x,y)}^{\cdot} \;\leq\; (1-\varepsilon)\,(-\lambda\, V_1(x,y) + |d_x|^2) \;+\; (y-\phi_1(x)) \times$$
$$\times\, [(1-\varepsilon) L_b V_1(x) + (u + f(x,y) + g(x,y) d_y) - (L_a\phi_1(x) + L_b\phi_1(x) y + L_b\phi_1(x) c(x) d_1)] \;.$$

En complétant les carrés, ceci donne :

$$\overbrace{V_2(x,y)}^{\cdot} \;\leq\; -(1-\varepsilon)\,\lambda\, V_1(x,y) \;+\; [|d_x|^2 + |d_y|^2] \;+\; (y-\phi_1(x)) \times$$
$$\times \left[(1-\varepsilon) L_b V_1(x) + (u + f(x,y)) + \frac{1(y-\phi_1(x)) g(x,y)^2}{4}\right.$$
$$\left. -(L_a\phi_1(x) + L_b\phi_1(x) y) + \frac{(y-\phi_1(x)) L_b\phi_1(x)^2 c(x)^2}{4\varepsilon}\right] \;.$$

Donc, en prenant le bouclage comme :

$$\phi(x,y) \;=\; -f(x,y) - \frac{\lambda}{2}(y-\phi_1(x)) \;-\; (1-\varepsilon)\, L_b V_1(x) \;-\; \frac{y-\phi_1(x)) g(x,y)^2}{4}$$
$$+\; (L_a\phi_1(x) + L_b\phi_1(x) y) \;-\; \frac{(y-\phi_1(x)) L_b\phi_1(x)^2 c(x)^2}{4\varepsilon} \;,$$

nous obtenons :

$$\overbrace{V_2(x,y)}^{\cdot} \;\leq\; -\lambda\, V_2(x,y) \;+\; |d_x|^2 \;+\; |d_y^2| \;.$$

Notons que ϕ est de classe C^q.

Si l'hypothèse (2.17) est satisfaite, nous avons aussi :

$$\gamma_d(|x|)^2 \;\leq\; (1-\varepsilon)\,\lambda\, V_2(x,y) \qquad \forall (x,y) \;.$$

Chapitre 11

Démonstrations des résultats sur "Bouclage de sortie"

11.1 Démonstration de la Proposition 13

Nous commençons par choisir un observateur sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\hat{x}}_1 & = & \hat{x}_2 \;+\; \ell\, k_1\,(y-\hat{x}_1) \;+\; a_1(x_1) \\ & \vdots & \\ \dot{\hat{x}}_i & = & \hat{x}_{i+1} \;+\; \ell^i\, k_i\,(y-\hat{x}_1) \;+\; a_i(x_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_i) \\ & \vdots & \\ \dot{\hat{x}}_p & = & u \;+\; \ell^p\, k_p\,(y-\hat{x}_1) \;+\; a_p(x_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_p) \end{array}\right. \tag{11.1}$$

où ℓ est un gain à choisir dans $[1,+\infty)$ et les k_i sont choisis tels que la matrice :

$$\mathcal{O} \;=\; \begin{pmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ -k_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

a toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative. Il existe alors une matrice symétrique définie positive P et un réel strictement positif α satisfaisant :

$$P\mathcal{O} \;+\; \mathcal{O}^T P \;\leq\; -\alpha\, P\ . \tag{11.2}$$

Dénotons :

$$\Delta a_i \;=\; \frac{a_i(x_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_i)-a_i(x_1,x_2,\ldots,x_i)}{\ell^{i-1}} \quad , \qquad \mathfrak{g}_i(z,x_1) \;=\; \frac{g_i(z,x_1)}{\ell^{i-1}}$$

et $\tilde{x}_i$ l'erreur d'estimation sur la $i$ème composante définie comme :

$$\tilde{x}_i \;=\; \frac{\hat{x}_i - x_i}{\ell^{i-1}}\ .$$

Notons $\tilde{x}$, Δa et $\mathfrak{g}$ les vecteurs correspondants. En considérant Δa comme une fonction de $\tilde{x}$ et $\hat{x}$, nous voyons que la dynamique de $\tilde{x}$ est donnée par :

$$\dot{\tilde{x}} \;=\; \ell\,\mathcal{O}\,\tilde{x} \;+\; \Delta a(\tilde{x},\hat{x}) \;+\; \mathfrak{g}(z,x_1)\ .$$

Elle nous permet de donner une description complète de la dynamique du système bouclé en lui adjoignant la dynamique de z et la suivante obtenue de l'observateur (11.1) :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{\hat{x}}_1 & = & \hat{x}_2 \,+\, a_1(x_1) \,-\, \ell\, \tilde{x}_2 \;, \\ & \vdots & \\ \dot{\hat{x}}_i & = & \hat{x}_{i+1} \,-\, \ell^i\, k_i\, \tilde{x}_1 \,+\, a_i(x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_i) \;, \\ & \vdots & \\ \dot{\hat{x}}_p & = & u \,-\, \ell^p\, k_p\, \tilde{x}_1 \,+\, a_p(x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_p) \;. \end{array}\right. \tag{11.3}$$

Cette description nous conduit à étudier le sous-système en $\tilde{x}$ avec $(z, x_1, \hat{x})$ comme entrée. Nous notons $\tilde{\mathcal{X}}(\tilde{x}, t; (z, x_1, \hat{x}))$ ses solutions. Pour l'étudier, nous introduisons la fonction U comme :

$$U(\tilde{x}) \;=\; \tilde{x}^T P\, \tilde{x} \;.$$

De (3.8) et sachant que ℓ est plus grand que 1, nous déduisons :

$$|\Delta a_i(\tilde{x}, \hat{x})| \;\leq\; L \sum_{j=2}^{i} \frac{|\tilde{x}_i|}{\ell^{i-j}} \;\leq\; L\, \sqrt{n}\, |\tilde{x}|$$

et donc :

$$\tilde{x}^T P \Delta a(\tilde{x}, \hat{x}) \;\leq\; L\, n\, |P\tilde{x}|\, |\tilde{x}| \;\leq\; L\, n\, \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\, U(\tilde{x}) \;,$$

où $\lambda_{\min}(P)$ est la plus petite valeur propre de P et $\lambda_{\max}(P)$ la plus grande. Nous avons aussi :

$$\tilde{x}^T P \mathfrak{g}(z, x_1) \;\leq\; \frac{U(\tilde{x})}{2} \;+\; \frac{|h(z, x_1)|^2}{2}\, \lambda_{\max}(P) \;.$$

Alors, avec (11.2), nous obtenons, pour tout $(\tilde{x}, z, x_1, \hat{x})$,

$$\begin{array}{rcl}\dot{\overbrace{U(\tilde{x})}} & \leq & -\ell\, \alpha\, U(\tilde{x}) \;+\; 2\left[\tilde{x}^T P \Delta a(\tilde{x}, \hat{x}) + \tilde{x}^T P \mathfrak{g}\right] \;, \\ & \leq & -\left[\ell\, \alpha - 2L\, n\, \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} - 1\right] U(\tilde{x}) \;+\; \frac{\lambda_{\max}(P)}{2}\, |h(z, x_1)|^2 \;.\end{array}$$

Ceci nous conduit à choisir ℓ pour satisfaire l'inégalité :

$$\frac{\ell\, \alpha}{2} \;\geq\; 1 \;+\; 2L\, n\, \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \;.$$

Ainsi, pour toute fonction $(z, x_1, \hat{x})$ dans $L^\infty_{loc}([0, +\infty))$, toute solution $\tilde{\mathcal{X}}(\tilde{x}, t; (z, x_1, \hat{x}))$, tout s dans $[0, t]$ et tout t positif, nous avons :

$$\begin{array}{l} U(\tilde{\mathcal{X}}(\tilde{x}, t; (z, x_1, \hat{x}))) \;\leq\; \exp(-\tfrac{\ell\,\alpha}{2} t)\, U(\tilde{\mathcal{X}}(\tilde{x}, s; (z, x_1, \hat{x}))) \\ \qquad\qquad + \; \frac{\lambda_{\max}(P)}{2} \displaystyle\int_s^t \exp(-\tfrac{\ell\,\alpha}{2}(t - r)) |h(z(r), x_1(r))|^2 dr \;.\end{array}$$

Ceci établit que le sous-système en $\tilde{x}$ est stable entrée-état avec $(z, x_1, \hat{x})$ comme entrée.

En fait l'entrée z est produite par le sous-système en z qui a x_1 comme entrée et h comme sortie. Ainsi, avec (3.6), nous avons, pour tout s dans $[0, t]$ et tout t positif,

$$\begin{array}{l} U(\tilde{\mathcal{X}}(\tilde{x}, t; (z, x_1, \hat{x}))) \;\leq\; \exp(-\tfrac{\ell\,\alpha}{2} t)\, U(\tilde{\mathcal{X}}(\tilde{x}, s; (z, x_1, \hat{x}))) \\ \qquad + \; \tfrac{\lambda_{\max}(P)}{2} \displaystyle\int_s^t \exp(-\tfrac{\ell\,\alpha}{2}(t - r)) \beta(|Z(z, s; x_1)|, r - s)^2 dr \;+\; \tfrac{2}{\ell\alpha} \sup_{\tau \in [s, t]} \gamma_d(|x_1(\tau)|)^2 \;.\end{array}$$

Avec ce que nous savons du sous-système en z, nous avons établi que le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z} &=& f(z, x_1) \\ \dot{\tilde{x}} &=& \ell\,\mathcal{O}\,\tilde{x} \;+\; \Delta a(\tilde{x},\hat{x}) \;+\; \mathfrak{g}(z, x_1) \end{array}\right. \tag{11.4}$$

est stable entrée-état avec $(\hat{x}, x_1)$ comme entrée. De ce fait, il existe une fonction β_d de classe $\mathcal{KL}$ telle que, pour toute fonction x_1 dans $L^\infty_{loc}([0,+\infty))$ et pour toutes ses solutions $(Z((z,\tilde{x}),t;x_1), \tilde{\mathcal{X}}((z,\tilde{x}),t;x_1))$, nous avons, pour tout s dans $[0,t]$ et tout t positif,

$$|\tilde{\mathcal{X}}((z,\tilde{x}),t;x_1)| \\ \leq \max\left\{\beta_d\left(\left|(Z((z,\tilde{x}),t;x_1), \tilde{\mathcal{X}}((z,\tilde{x}),t;x_1))\right|, t-s\right) \,,\, \tfrac{2}{\sqrt{\ell\alpha}} \sup_{\tau\in[s,t]} \gamma_d(|x_1(\tau)|)\right\} .$$

Comme nous l'avons vu le système bouclé dans son entier est décrit par l'interconnexion de ce système (11.4) avec (11.3). D'après la Proposition 8, il nous suffit pour conclure de trouver, pour le système (11.3), un bouclage ϕ continu et une fonction de Lyapunov V sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ de classe C^1 satisfaisant :

$$\overbrace{V(x_1,\hat{x})}^{\cdot} \;\leq\; -\lambda\, V(x_1,\hat{x}) \;+\; \gamma(|\tilde{x}|) \qquad \forall\,(\hat{x},\tilde{x})$$

où γ est une fonction de classe $\mathcal{K}^\infty$ vérifiant :

$$\gamma \circ \frac{2}{\sqrt{\ell\alpha}}\gamma_d(|x_1|) \;\leq\; (1-\varepsilon)\,\lambda\, V(x_1,\hat{x}) \;.$$

D'après l'hypothèse (3.7) sur γ_d, nous savons avec la Proposition 11 sur l'assignation de gain comment construire itérativement un tel bouclage ainsi qu'une fonction V dont l'approximation à l'origine est une forme quadratique définie positive.

11.2 Démonstration de la Proposition 15

Nous commençons par établir la variante suivante de l'étape 2 de la démonstration de la Proposition 11. Pour cela nous considérons le système :

$$\dot{x_1} \;=\; f(x_1,x_2) + K_1(x_1,x_2)\,d_1 \quad , \qquad \dot{x_2} \;=\; a(x_1,x_2)\,u + b(x_1,x_2) + K_2(x_1,x_2)\,d_2 \;.$$

où x_1 est dans $\mathbb{R}^{n_1}$, x_2 dans $\mathbb{R}$, u dans $\mathbb{R}$, d_1 dans $\mathbb{R}^{n_1}$, d_2 dans $\mathbb{R}$, $a(x_1,x_2)$ est strictement positif et les fonctions f, K_1, a, b et K_2 sont autant de fois différentiables que nécessaire.

Lemme 11.5 *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov V_1 de classe C^{q+1} sur $\mathbb{R}^{n_1}$, une fonction $\phi_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}$ de classe C^{q+1} et une fonction $\alpha_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}_+$ continue et définie positive a positive telles que nous avons :*

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x_1)\,[f(x_1,\phi_1(x_1)) + K_1(x_1,\phi_1(x_1))\,d_1] \;\leq\; -\alpha_1(x_1) \;+\; |d_1|^2 \qquad \forall (x_1,d_1) \;. \tag{11.6}$$

Alors il existe une fonction de Lyapunov V_2 de classe C^q sur $\mathbb{R}^{n_1+1}$, une fonction $\phi_2 : \mathbb{R}^{n_1+1} \to \mathbb{R}$ de classe C^q et une fonction $\alpha_2 : \mathbb{R}^{n_1+1} \to \mathbb{R}_+$ continue et définie positive telles que nous avons :

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)\,[f(x_1,u) + K_1(x_1,u)\,d_1] \\ + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)\,[a(x_1,x_2)\,\phi_2(x_1,x_2) + b(x_1,x_2) + K_2(x_1,x_2)\,d_2] \\ \leq\; -\alpha_2(x_1,x_2) \;+\; |d_1|^2 \;+\; |d_2| \qquad \forall (x_1,x_2,d_1,d_2) \;.$$

Démonstration :

Prenons simplement :

$$V_2(x_1,x_2) \;=\; \frac{V_1(x_1)}{2} \;+\; \frac{1}{2}(x_2-\phi_1(x_1))^2 \;.$$

C'est une fonction de une fonction de Lyapunov de classe C^q sur $\mathbb{R}^{n_1+1}$, qui, avec (11.6), satisfait :

$$\begin{aligned}\dot{\overbrace{V_2(x_1,x_2)}} \;\leq\; & -\frac{\alpha_1(x_1)+|d_1|^2}{2} \\ & + (x_2-\phi_1(x_1))\left[\frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x_1)\left(\Upsilon_1(x_1,x_2)+\Upsilon_d(x_1,x_2)d_1\right)\right. \\ & \qquad + \;(a(x_1,x_2)\,u+b(x_1,x_2)+K_2(x_1,x_2)\,d_2) \\ & \qquad \left. -\;\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x_1)\left(f(x_1,\phi_1(x_1))+K_1(x_1,\phi_1(x_1))\,d_1\right)\right]\end{aligned}$$

où Υ_1 et Υ_d sont les fonctions de classe C^q :

$$\begin{aligned}\Upsilon_1(x_1,x_2) &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\phi_1(x_1)+s(x_2-\phi_1(x_1)))\,ds \;, \\ \Upsilon_d(x_1,x_2) &= \int_0^1 \frac{\partial K_1}{\partial x_2}(x_1,\phi_1(x_1)+s(x_2-\phi_1(x_1)))\,ds \;.\end{aligned}$$

Le résultat est donc établi avec :

$$\alpha_2(x_1,x_2) \;=\; \frac{\alpha_1(x_1)}{2} \;+\; (x_2-\phi_1(x_1))^2$$

en prenant ϕ_2 satisfaisant par exemple :

$$\begin{aligned}-a(x_1,x_2)\,\phi_2(x_1,x_2) \;=\; & b(x_1,x_2) \;-\; \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x_1)\,f(x_1,\phi_1(x_1)) \;+\; \frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x_1)\Upsilon_1(x_1,x_2) \\ & + (x_2-\phi_1(x_1))\left(1+\frac{1}{4}\left|\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x_1)\Upsilon_d(x_1,x_2)\right|^2\right. \\ & \qquad \left. +\frac{1}{4}K_2(x_1,x_2)^2+\left|\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x_1)K_1(x_1,\phi_1(x_1))\right|^2\right) \;.\end{aligned}$$

Passons maintenant à la démontration de la Proposition 15.

Nous introduisons l'observateur d'ordre réduit :

$$\dot{w} \;=\; A\big(\widehat{\xi},y\big) \;+\; B(y)\,u \;-\; K(y)C\big(\widehat{\xi},y\big) \quad , \qquad \widehat{\xi} \;=\; w \;+\; \int_0^y K(s) \;.$$

En choisissant de prendre le bouclage comme une fonction de y et $\widehat{\xi}$, nous obtenons un système en boucle fermée dont l'état est (y,ξ,w) ou de façon équivalente $(y,e,\widehat{\xi})$ en posant :

$$e \;=\; \xi \;-\; \widehat{\xi} \;=\; \xi \;-\; w \;-\; \int_0^y K(s) \;.$$

Sa dynamique est donc complètement décrite par les deux systèmes d'équations :

$$\dot{e} \;=\; A(\widehat{\xi}+e,y)-A(\widehat{\xi},y)-K(y)[C(\widehat{\xi}+e,y)-C(\widehat{\xi},y)] \;, \tag{11.7}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{\widehat{\xi}} &=& A(\widehat{\xi},y) \;+\; B(y)\,u \;+\; K(y)[C(\widehat{\xi}+e,y)-C(\widehat{\xi},y)] \;, \\ \dot{y} &=& C(\widehat{\xi},y)] \;+\; [C(\widehat{\xi}+e,y)-C(\widehat{\xi},y)] \;.\end{array}\right. \tag{11.8}$$

Pour obtenir des propriétés sur le sous-système (11.7), observons que nous avons :

$$A(\widehat{\xi}+e,y) - A(\widehat{\xi},y) - K(y)[C(\widehat{\xi}+e,y) - C(\widehat{\xi},y)] \;=\; \left[\int_0^1 \frac{\partial A - KC}{\partial \xi}(\widehat{\xi}+se,y)ds\right] e \;.$$

Ceci nous permet de déduire de (3.13) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
\dot{\overbrace{e^T P\, e}} &= 2\int_0^1 \left[e^T P \frac{\partial A - KC}{\partial \xi}(\widehat{\xi}+se,y)e\right] ds \;,\\
&\leq -k(y)^2 \int_0^1 \left[\frac{\partial C}{\partial \xi}(\widehat{\xi}+se,y)e\right]^2 ds \;,\\
&\leq -k(y)^2 \left[\int_0^1 \frac{\partial C}{\partial \xi}(\widehat{\xi}+se,y)e ds\right]^2 \;,\\
&\leq -k(y)^2 \left[C(\widehat{\xi}+e,y) - C(\widehat{\xi},y)\right]^2 \;=\; -k(y)^2 \left[C(\widehat{\xi}+e,y) - C(\widehat{\xi},y)\right]^2 \;,
\end{aligned}$$

Étudions maintenant le sous-système (11.8). Posons pour simplifier les notations :

$$d \;=\; k(y)\left[C(\widehat{\xi}+e,y) - C(\widehat{\xi},y)\right] \;.$$

Aussi, revenons aux composantes $\hat{z}, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_p)$ de $\widehat{\xi}$. Nous pouvons rééecrire ce sous-système sous la forme :

$$\begin{cases}
\dot{\hat{z}} &= f_z(\hat{z},y) + \frac{K_z(y)}{k(y)}\, d \;,\\
\dot{y} &= a_1(\hat{z},y)\,\hat{x}_2 + b_1(\hat{z},y) + \frac{1}{k(y)}\, d \;,\\
\dot{\hat{x}}_2 &= a_2(\hat{z},y,\hat{x}_2)\,\hat{x}_3 + b_2(\hat{z},y,\hat{x}_2) + fracK_2(y)k(y)\, d \;,\\
&\vdots\\
\dot{\hat{x}}_p &= a_p(y)\,u + b_p(\hat{z},x,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_p) + \frac{K_p(y)}{k(y)}\, d \;,
\end{cases} \tag{11.9}$$

où la division par $k(y)$ est licite puisque k ne prend que des valeurs strictement positives. D'après (3.14) et [(Sontag et Teel)], il exsiste une fonction de Lyapunov $\widetilde{V}_z$ de classe C^{p+1}, et une fonction $\widetilde{\alpha}$ définie positive telles que nous avons :

$$\frac{\partial \widetilde{V}_z}{\partial z}(z)\left[f_z(z,\phi_z(z)) + K_z(\phi_z(z))\, d\right] \;\leq\; -\widetilde{\alpha}_z(z) \;+\; |d|^2 \;.$$

Nous pouvons donc appliquer récursivement le Lemme 11.5. Ceci nous donne à la fin une fonction de Lyapunov V sur $\mathbb{R}^n$ de classe C^1, un bouclage continue ϕ et $\alpha : \mathbb{R}^{n_1+1} \to \mathbb{R}_+$ continue et définie positive tels que, en prenant :

$$u \;=\; \phi(y,\widehat{\xi}) \;,$$

nous obtenons :

$$\dot{\overbrace{V(y,\widehat{\xi})}} \;\leq\; -\alpha(y,\widehat{\xi}) + |d|^2 \;.$$

Ainsi pour le système complet (11.7),(11.8), nous avons :

$$\dot{\overbrace{2\, e^T P\, e + V(y,\widehat{\xi})}} \;\leq\; -\alpha(y,\widehat{\xi}) \;-\; k(y)\left[C(\widehat{\xi}+e,y) - C(\widehat{\xi},y)\right] \;,$$

où $(e,y,\widehat{\xi}) \mapsto 2e^T P\, e + V(y,\widehat{\xi})$ est une fonction de Lyapunov sur $\mathbb{R}^{2n-1}$. Ceci garantie la stabilité globale de l'origine dans $\mathbb{R}^{2n-1}$ et la convergence de toutes les solutions vers le plus grand ensemble invariant contenu dans : $\{(e,y,\widehat{\xi}) \;:\; y = 0\;,\; \widehat{\xi} \;=\; 0\;,\; C(e,0) \;=\; 0\}$. Dans cet ensemble, la dynamique de e satisfait :

$$\dot{e} \;=\; A(e,0) \quad , \qquad C(e,0) \;=\; 0 \;.$$

D'après par exemple [(Isidori [b]), p.44], l'hypothèse de zéro détectabilité implique aussi la convergence de e vers 0. Nous avons donc aussi globale l'attractivité globale.

Références / References

Références de l'auteur

[1] V. Andrieu, L. Praly, A unifying point of view on output feedback designs. Automatica, Vol. 45, N. 8, August 2009, Pages 1789-1798
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/2009-Automatica-Andrieu-Praly.pdf

[2] V. Andrieu, L. Praly, A. Astolfi, High gain observers with updated high-gain and homogeneous correction terms. Automatica, Vol. 45, N. 2, February 2009, Pages 422-428
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/2009-Automatica-Andrieu-Praly-Astolfi.pdf

[3] V. Andrieu, L. Praly, A. Astolfi, Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback. SIAM J. Control Optim. Vol. 47, n. 4, pp. 1814-1850, 2008.
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/2008-SIAM-Andrieu-Praly-Astolfi.pdf

[4] V. Andrieu, L. Praly, Global asymptotic stabilization for non-minimum phase non linear systems admitting a strict normal form. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 53, N. 5, June 2008
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/2008-IEEE_TAC-Marconi-Praly.pdf

[5] A. Astolfi, L. Praly, Global complete observability and output-to-state stability imply the existene of a globally convergent observer. Mathematics of Control, Signals and Systems (2006) 18: 32-65
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/2006-MCSS-Astolfi-Praly.pdf

[6] V. Andrieu, L. Praly, On the existence of a Kazantzis–Kravaris / Luenberger observer. SIAM J. Control Optim. Vol. 45, No. 2, pp 432-456, 2006
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/2006-SIAM-Andrieu-Praly.pdf

[7] L. Praly, A. Astolfi, Global asymptotic stabilization by output feedback under a state norm detectability assumption. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, December 2005
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Conferences/2005_CDC_Praly-Astolfi.pdf

[8] L. Praly, Z. P. Jiang, Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems. Systems & Control Letters 53. 107-116. October 2004
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/2004-SCL-Praly-Jiang.pdf

[9] C. Kellett, L. Praly, Nonlinear control tools for low thrust orbital transfer. Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2004). September 2004.

[10] L. Praly, Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 48, N. 6, June 2003
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Conferences/2004_NOLCOS_Kellet_Praly.pdf

[11] L. Praly, R. Ortega, G. Kaliora, Stabilization of nonlinear systems via forwarding modulo LgV. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 46, N. 9, September 2001
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/2001-IEEE_TAC-Praly-Ortega-Kaliora.pdf

[12] B. Hamzi, L. Praly Ignored input dynamics and a new characterization of control Lyapunov functions. Automatica, Vol. 37, N. 6, June 2001, Pages 831-841
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/2001-Automatica-Hamzi-Praly.pdf

[13] X. Albouy, L. Praly, On the use of dynamic invariants and forwarding for swinging up a spheric inverted pendulum. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, December 2000.
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Conferences/2000-CDC_Albouy-Praly.pdf

[14] A.R. Teel, L. Praly, On assigning the derivative of a disturbance attenuation clf. Mathematics of Control, Signals and Systems (2000) 13: 95-124.
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/2000-MCSS-Teel-Praly.pdf

[15] A.R. Teel, L. Praly, A smooth Lyapunov function from a class-KL estimate involving two positive semi-definite functions. ESAIM: COCV, Vol. 5, 2000
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/2000-COCV-Teel-Praly.pdf

[16] Z.-P. Jiang, L. Praly, Design of Robust Adaptive Controllers for Nonlinear Systems with Dynamic Uncertainties. Automatica, Vol. 34, N. 7, July 1998, Pages 825-840
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/1998-Automatica-Jiang-Praly.pdf

[17] R. Freeman, L. Praly, Integrator backstepping under actuator magnitude and rate limits, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.43, N. 2, February 1998.
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/1998-IEEE_TAC-Freeman-Praly.pdf

[18] L. Praly, Y. Wang, Stabilization in spite of matched unmodelled dynamics and an equivalent definition of input-to-state stability. Mathematics of Control, Signal and Systems (1996) 9: 1-33
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/1996-MCSS-Praly-Wang.pdf

[19] F. Mazenc, L. Praly, Adding integrations, saturated controls and global asymptotic stabilization for feedforward systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.41, N. 11, November 1996.
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/1996-IEEE_TAC-Mazenc-Praly.pdf

[20] Z.-P. Jiang, A. Teel, L. Praly, Small-gain theorem for ISS systems and applications. Mathematics of Control, Signals and Systems (1994) 7: 95-120.
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/1994-MCSS-Jiang-Teel-Praly.pdf

[21] A. Teel, L. Praly, Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback, Systems & Control Letters 22 (1994) 313-325.
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/1994-SCL-Teel-Praly.pdf

[22] F. Mazenc, L. Praly, and W. P. Dayawansa, Global stabilization by output feedback : Examples and Counter-Examples, Systems & Control Letters 23 (1994) 119-125
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/1994-SCL-Mazenc-Praly-Dayawansa.pdf

[23] L. Praly, Z.-P. Jiang, Stabilization by output feedback for systems with ISS inverse dynamics, Systems & Control Letters, 21 (1993) 19-33.
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/1993-SCL-Praly-Jiang.pdf

[24] J.-M. Coron, L. Praly, Adding an integrator for the stabilization problem. Systems & Control Letters 17 (1991) 89-104.
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/1991-SCL-Coron-Praly.pdf

[25] L. Praly, B. d'Andréa-Novel, J.-M. Coron, Lyapunov design of stabilizing controllers for cascaded systems. IEEE Transations on Automatic Control, Vol.36, No.10, October 1991.
http://cas.ensmp.fr/~praly/Telechargement/Journaux/1991-IEEE_TAC-Praly-Andrea-Coron.pdf

Autres Références / Other references

[(Angeli et Sontag)] D. Angeli, E. Sontag, Forward completeness, unboundedness observability, and their Lyapunov characterizations, Systems & Control Letters 38 (1999) 209-217

[(Artstein)] Z. Artstein, Stabilization with relaxed controls. Nonlinear Anal. TMA 7 (1983) 1163-1173.

[(Atassi and Khalil)] A. N. Atassi and H. K. Khalil, A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 9, September 1999.

[(Byrnes et Isidori)] C. Byrnes, A. Isidori, Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 10, October 1991.

[(Camilli, Grüne and Wirth)] F. Camilli, L. Grüne, and F. Wirth. Control Lyapunov functions and Zubov's method. SIAM Journal on Control and Optimization. 47(1):301-326, 2008.

[(Clarke, Ledyaev et Stern)] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev and R.J. Stern. Asymptotic stability and smooth Lyapunov functions. *Journal of Differential Equations*, **149** (1998), 69–114.

[(Coron et Rosier)] J.-M. Coron, L. Rosier : A relation between continuous time-varying and discontinuous feedback stabilization. J. of Math. Syst, Est., and Cont. Vol 4, 1994 67-84

[(Dashkovskiy, Rüffer et Wirth)] S. Dashkovskiy, B. Rüffer and F. Wirth, An ISS smal gain theorem for general networks. Mathematics of Control, Signals, and Systems, Volume 19, Number 2, may 2007.

[(Deheuvels)] P. Deheuvels : L'intégrale. Presses Universitaires de France, Paris 1980.

[(Filippov)] A.F. Filippov, Differential equations with discontinuous right hand sides. Kluwer Academic Publishers. Mathematics and Its Applications. 1988

[(Freeman et Kokotovic [a])] R. Freeman, P. Kokotovic, Robust nonlinear control design : State-space and Lyapunov techniques. Birkhäuser. 1996

[(Freeman et Kokotovic [b])] R. Freeman, P. Kokotovic, Inverse optimality in robust stabilization, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 34, N. 4, pp. 1365-1391, July 1996

[(Glad)] S.T. Glad, On the gain margin of nonlinear and optimal regulators. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-29, No. 7, July 1984.

[(Gauthier et Bornard)] J.-P. Gauthier, G. Bornard : *Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-26, No. 4, August 1981.

[(Isidori [a])] A. Isidori,Nonlinear control systems. Third Edition. Springer Verlag 1995.

[(Isidori [b])] A. Isidori,Nonlinear control systems II. Springer 1999.

[(Jankovic, Sepulchre et Kokotović)] M. Janković, R. Sepulchre, P. Kokotović, Constructive Lyapunov stabilization of nonlinear cascade systems, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, No. 12, December 1996.

[(Jiang, Mareels, Hill et Huang)] Z. P. Jiang, I. Mareels, D.J. Hill, J. Huang, A unifying framework for global regulation via nonlinear output feedback : from ISS to iISS. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.49, No. 4, April 2004.

[(Jiang, Mareels et Wang)] Z.-P. Jiang, I.M.Y. Mareels, Y. Wang, A Lyapunov formulation of nonlinear small gain theorem for interconnected ISS systems. Automatica Vol. 32, No. 8, August 1996.

[(Kalman et Bertram)] R. Kalman, J. Bertram, Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov, parts I and II. Journal of Basic Engineering, 82: 371–400, 1960.

[(Khalil et Saberi)] H. Khalil, A. Saberi, Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems using high-gain feedback. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 32, No. 11, November 1987

[(Krasovskii)] N. Krasovskii, Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delays. Stanford university press, 1963.

[(Krishnamurthy et Khorrami [a])] P. Krishnamurthy, F. Khorrami, Dynamic high-gain scaling : state and output feedback with application to systems with ISS appended dynamics driven by all states. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, No. 12, December 2004.

[(Krishnamurthy et Khorrami [b])] P. Krishnamurthy, F. Khorrami, Adaptive output feedback stabilization and disturbance attenuation for feedforward systems with ISS appended dynamics. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*, December 2005.

[(Kokotovic et Sussmann)] P. Kokotović, H. Sussmann, A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. Systems & Control Letters 13 (1989) 125-133.

[(Krstic, Kanellakopoulos et Kokotovic)] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic, Nonlinear and adaptive control design. John Wiley & Sons, New York, 1995.

[(Kurzweil)] J. Kurzweil, On the inversion of Ljapunov's second theorem on stability of motion, Ann. Math. Soc. Trans. Ser.2, 24, 19-77, (1956)

[(Li, Qian et Frye)] Ji Li; Chunjiang Qian; Frye, M.T.; A dual observer design for global output feedback stabilization of nonlinear systems with low-order and high-order nonlinearities 46th IEEE Conference on Decision and Control, 2007 Page(s): 3351 - 3356

[(Lin et Qian)] W. Lin, C. Qian, Adding one power integrator : a tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems Systems & control letters 2000, vol. 39, no5, pp. 339-351

[(Lin, Sontag et Wang)] Y. Lin, E. Sontag, Y. Wang, A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability. SIAM J. Control and Optimization, Vol. 34, No. 1, pp. 124-160, January 1996

[(Mareels et Hill)] I. M. Y. Mareels, D. J. Hill, Monotone Stability of Nonlinear Feedback Systems. Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control. 2 (1992) 275-291.

[(Massera)] J. L. Massera, On Liapounoff's conditions of stability. Annals of Mathematics. Second Series 50 (1949): 705-721

[(Morin et Samson)] P. Morin and C. Samson Application of backstepping techniques to the time-varying exponential stabilization of chained form systems European Journal of Control, Vol. 3, pp 15–36, 1997.

[(Moylan et Anderson)] P. J. Moylan, B.D.O. Anderson, Nonlinear regulator theory and an inverse optimal control problem. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-18, No. 5, October 1973.

[(Polendo et Qian)] J. Polendo and Chunjiang Qian A generalized homogeneous domination approach for global stabilization of inherently nonlinear systems via output feedback Int. J. Robust Nonlinear Control 2007; 17:605-629

[(Qian and Li)] C. Qian and J. Li, Global output feedback stabilization of upper-triangular nonlinear systems using a homogeneous domination approach. Int. J. Robust Nonlinear Control 2006; 16: 441 - 463

[(Rifford)] L. Rifford, On the existence of nonsmooth control-Lyapunov functions in the sense of generalized gradients. ESAIM Control Optim. Calc. Var., 6:593-611, 2001.

[(Sepulchre, Jankovic et Kokotovic)] R. Sepulchre, M. Janković, P. Kokotović, Constructive nonlinear control, Springer Verlag 1997

[(Shim and Teel)] H. Shim, A. Teel, Asymptotic controllability and observability imply semi-global practical asymptotic stabilizability by sampled-data output feedback. *Automatica* 39 (2003) 441-454.

[(Sontag [a])] E. Sontag, A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability. SIAM J. Control and optimization, Vol. 21, No. 3, May 1983.

[(Sontag [b])] E. Sontag, A "universal" construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization. Systems and Control Letters 13 (1989) 117-123.

[(Sontag [c])] E. Sontag, Smooth stabilization implies coprime factorization. IEEE Transactions on Automatic Control, April 1989.

[(Sontag [d])] E. Sontag, Further facts about input to state stabilization, IEEE Transactions on Automatic Control, 35 (1990) 473-476.

[(Sontag [e])] E. Sontag, Comments on integral variants of ISS. Systems & Control Letters, 34 (1998), 93–100.

[(Sontag [f])] E. Sontag, Input to state stability : Basic concepts and results. In P. Nistri and G. Stefani, editors, Nonlinear and Optimal Control Theory, pages 163-220. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[(Sontag et Teel)] E. Sontag, A. Teel, Changing supply functions in input/state stability property. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-40, No. 8, August 1995.

[(Sontag et Wang [a])] E. Sontag and Y. Wang, On characterizations of set input-to-state stability. Proceedings of IFAC Non-Linear Control Systems Design Symposium, (NOLCOS '95), Tahoe City, CA, June 1995, pages 226–231, 1995.

[(Sontag et Wang [b])] E. Sontag, Y. Wang, New characterizations of input-to-state stability. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, No. 9, September 1996.

[(Szarski)] J. Szarski, Differential inequalities. Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1965.

[(Teel [a])] A. Teel : *Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls.* Systems & Control Letters 18(1992): 165-171.

[(Teel [b])] A. Teel, A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation, IEEE Transactions on Automatic Contriol. Vol. 41, No. 9, September 1996.

[(Tsinias)] J. Tsinias, Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization. Math. Control Signals Systems 2 (1989) 343-357

[(Wilson)] F.W. Wilson, Smoothing derivatives of functions and applications. Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969) 413-428

[(Yoshizawa)] T. Yoshizawa, Stability theory by Lyapunov's second method. The mathematical Society of Japan, 1966.