Dans "Commandes non linéaires",
F. Lamnabhi-Lagarrigue, P. Rouchon, Editeurs,
Lavoisier 2003

Chapitre 2

Une introduction à l'utilisation de fonctions de Lyapunov pour la stabilisation et l'atténuation de perturbations

2.1. Introduction

2.1.1. *Ce que nous proposons*

Ce texte est une introduction aux techniques de synthèse de lois de commande stabilisant asymptotiquement ou atténuant les perturbations. La plupart des termes techniques utilisés sont expliqués dans l'annexe 2.5 à la fin de ce chapitre. Les systèmes dynamiques considérés admettent la représentation :

$$\dot{x} = f(x, u, d) \qquad [2.1]$$

où x est l'état à valeurs dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de dimension n, u la commande à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et d une perturbation dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)$, l'espace des fonctions localement essentiellement bornées de l'intervalle de temps $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^p$. Plus spécifiquement, nous nous intéressons aux techniques déduites directement du souhait de rendre définie négative la dérivée, le long des solutions, d'une fonction de Lyapunov, elle-même à définir.

Les fonctions de Lyapunov sont connues pour donner un outil très efficace d'analyse de stabilité. Il est aussi reconnu que, pour un système donné, trouver une fonction

---

Chapitre rédigé par Laurent PRALY.

de Lyapunov appropriée est une tâche difficile. La situation que nous considérons ici est différente car il s'agit de stabilisation et non de stabilité et donc de synthèse et non d'analyse. Précisément, le système considéré est sous-déterminé, la commande n'étant pas donnée *a priori*. L'idée est de choisir une fonction de Lyapunov en premier lieu pour, en second lieu, spécifier le système par le choix de la commande. Cependant, toutes les fonctions de Lyapunov ne conduisent pas nécessairement à une loi de commande admissible. Celles donnant un résultat sont appelées fonctions de Lyapunov assignables (CLF pour *control Lyapunov functions* en anglais).

Cette approche pour obtenir des lois de commande a une longue histoire. Le lecteur intéressé pourra par exemple consulter les ouvrages [BUT 68, GRA 63, KAL 60, LEF 65, LET 61, MON 65] donnés en référence.

Nous nous intéressons ici à la stabilisation asymptotique globale. Ceci ne signifie pas que nous voulons que le point d'équilibre considéré admette l'univers en entier comme domaine d'attraction, mais plus simplement que nous voulons imposer *a priori* à son bassin d'attraction de contenir un ouvert donné, difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. Alors, x dans [2.1] dénote les coordonnées données par ce difféomorphisme et satisfait donc la propriété que lorsque la norme $|x|$ tend vers l'infini, le point considéré tend vers la frontière de l'ouvert donné (voir l'exemple 2.8 pour une illustration).

Nous ne portons aucune attention à la régularité des lois de commande si ce n'est à sa continuité. Alors, les équations différentielles ordinaires n'ont un second membre que continu. Ce type d'équations étant moins dans les connaissances communes, nous commençons par des rappels à leur sujet à la section 2.2. Dans la section 2.3, nous donnons une définition précise des fonctions de Lyapunov assignables et nous montrons comment elles mènent à l'expression de loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement. Nous présentons à la section 2.4 une méthode de construction de fonctions de Lyapunov assignables qui s'applique aux systèmes ayant une structure récursive en cascade de taille croissante en allant vers la commande et dits de forme feedback. Ce sont des systèmes construits récursivement en ajoutant des dérivateurs. C'est la méthode connue sous le nom de *backstepping* en anglais. Un lexique et les notations génériques sont donnés à la fin de ce texte. Nous recommandons au lecteur une lecture, rapide au moins, de cette annexe, section 2.5, avant d'entrer dans la partie technique de ce texte.

2.1.2. *Ce que nous ne proposons pas*

Nos ambitions dans cette introduction sont très limitées. Les thèmes abordés ne sont qu'ébauchés. Les références bibliographiques que nous donnons devraient cependant permettre au lecteur d'obtenir des compléments d'information suffisants. Un exposé plus complet mais plus compact peut être trouvé dans [KOT 01].

Aussi nous limitons-nous aux synthèses de Lyapunov sans toutes les traiter. Nous n'étudions donc pas la méthode d'ajout d'intégrateur qui s'applique aux systèmes admettant une forme récursive dite *feedforward* et connue sous le nom de *forwarding*. Celle-ci est présentée selon une approche similaire à celle adoptée ici dans [PRA 01] (voir aussi [SEP 97]).

Il y a bien d'autres méthodes de synthèse proposées dans la littérature pour traiter les problèmes de stabilisation asymptotique et d'atténuation de perturbations (voir [ISI 99] par exemple). Elles reposent sur :

– la théorie des perturbations régulières ou singulières (voir [KHA 96] par exemple) ;

– le théorème des petits gains non linéaires (voir [JIA 94, TEE 96] par exemple) ou la passivité (voir [ORT, SEP 97] par exemple) ;

– la linéarisation partielle ou total par bouclage (voir [ISI 95] par exemple) ;

– etc.

Nous n'abordons que le problème de la stabilisation asymptotique, l'aspect performance par exemple n'est pas considéré. En d'autres termes, nous nous préoccupons d'existence et non du choix parmi les solutions existantes.

Enfin, nous ne considérons que des bouclages statiques stationnaires d'état. De nombreux résultats sont aussi connus pour les bouclages dynamiques et/ou instationnaires d'état et/ou de sortie (voir [FRE 96, KRS 98a, KRS 95, MAR 95, NIJ 99] par exemple).

Comme le lecteur pourra s'en rendre compte de lui-même, la synthèse de loi de commande stabilisant asymptotiquement requiert une étape préliminaire d'écriture de la dynamique dans des coordonnées appropriées permettant d'exhiber certaines structures. Nous n'abordons pas cet aspect pourtant essentiel. Il relève en général de la géométrie différentielle alors que nous n'utilisons ici que de l'analyse. Les ouvrages [ISI 95, MAR 95, NIJ 90] contiennent de nombreuses informations pertinentes sur cet aspect.

Nous illustrons notre présentation par de nombreux exemples. Mais, dans un souci de clarté et de concision, ils sont tous de nature académique, bien que parfois inspirés d'applications bien réelles. Cependant, toutes les techniques que nous introduisons ont été envisagées, au moins, pour la synthèse de loi de commande pour des applications. Ainsi, des expérimentations de lois de commande obtenues par *backstepping* sont rapportées par exemple pour des moteurs électriques dans [DAW 98], la commande en position de bateaux dans [FOS 99] ou la commande de véhicule dans [CHE 98].

Le lecteur ne doit pas non plus compter trouver dans ce texte une solution à son problème particulier de stabilisation asymptotique s'il en a un. En revanche, il trouvera une série de techniques et plus généralement une attitude à adopter qui devraient lui permettre de construire lui-même cette solution... si elle existe.

2.2. Les bases

Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

DÉFINITION 2.1.– *Etant donné un point x de $\mathbb{R}^n$ et une fonction d dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)$, $X(x, t; d)$ est dite solution du système :*

$$\dot{x} = f(x, d) \qquad X(x, 0; d) = x \tag{2.2}$$

s'il existe un instant $T > 0$ tel que :

1) $X(x, \cdot; d) : [0, T) \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue ;

2) nous avons :

$$X(x, t; d) = x + \int_0^t f(X(x, s; d), d(s))\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [0, T) \tag{2.3}$$

THÉORÈME 2.1.– *Pour chaque point x de $\mathbb{R}^n$ et pour chaque fonction d dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)$, le système [2.2] admet une solution (voir [HAL 80, théorème I.5.1] par exemple).*

REMARQUE 2.1.– La différence principale avec le cas plus connu où f est Lipschitz continue est dans le fait que les solutions ne sont pas nécessairement uniques.

2.2.1. *Cas sans perturbation*

Pour le cas où il n'y a pas de perturbation d, nous avons la définition suivante.

DÉFINITION 2.2.– *Supposons l'origine de $\mathbb{R}^n$ solution constante de :*

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.4}$$

Elle est dite :

– globalement stable s'il existe une fonction α de classe $\mathcal{K}$ *telle que, pour chaque point x de $\mathbb{R}^n$, toutes les solutions $X(x, t)$ sont définies sur $\mathbb{R}_+$ et satisfont :*

$$|X(x, t)| \leq \alpha(|x|) \qquad \forall t \geq 0 \tag{2.5}$$

– globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ *telle que, pour chaque point x de $\mathbb{R}^n$, toutes les solutions $X(x, t)$ sont définies sur $\mathbb{R}_+$ et satisfont :*

$$|X(x, t)| \leq \beta(|x|, t) \qquad \forall t \geq 0 \tag{2.6}$$

REMARQUE 2.2.– Des définitions équivalentes de la stabilité asymptotique globale peuvent être trouvées par exemple dans [LIN 96, remarque 2.4, proposition 2.5] et [CLA 98].

La propriété de stabilité asymptotique globale est robuste par nature (voir théorème suivant).

THÉORÈME 2.2 ([CLA 98, KRA 63]).– *L'origine est une solution globalement asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction* définie positive δ *telle que, pour chaque fonction* $f_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continue et vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists y \in \mathbb{R}^n \quad | \quad |y - x| + |f_\delta(x) - f(y)| \leq \delta(x) \qquad [2.7]$$

l'origine est aussi une solution globalement asymptotiquement stable de :

$$\dot{x} = f_\delta(x) \qquad [2.8]$$

L'interprétation de [2.7] est que la stabilité asymptotique globale est robuste à des perturbations de l'état et des perturbations régulières du second membre de l'équation différentielle pourvu que ces perturbations soient bornées par une fonction définie positive de l'état x qui tend typiquement vers 0 lorsque $|x|$ tend vers l'infini.

Il est possible d'écrire des conditions suffisantes (et même nécessaires) des diverses notions de stabilité que nous venons de rappeler en termes de fonction de Lyapunov.

DÉFINITION 2.3.– *Un ensemble* $\mathcal{S}$ *est dit quasi invariant si, pour chaque point* x *dans* $\mathcal{S}$, *il existe au moins une solution* $X(x, t)$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *et prenant ses valeurs dans* $\mathcal{S}$.

THÉORÈME 2.3 ([RYA 93], THÉORÈME 2).– *Soit :*

– $\mathcal{U}$ *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}^n$ *;*

– V *une fonction de classe* C^1 *satisfaisant l'inégalité :*

$$\dot{\widehat{V(x)}} = L_f V(x) \leq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{U} \qquad [2.9]$$

– $X(x, t)$ *une solution définie sur* $\mathbb{R}_+$, *bornée et prenant ses valeurs dans* $\mathcal{U}$.

Il existe un nombre réel v *tel que, lorsque* t *tend vers* $+\infty$, *alors* $X(x, t)$ *tend vers le plus grand ensemble quasi invariant contenu dans l'ensemble :*

$$\{x \in \text{closure}(\mathcal{U}) : V(x) = v,\ L_f V(x) = 0\}$$

De plus, si V *est définie positive (respectivement propre), alors l'origine est globalement stable.*

DÉFINITION 2.4.– *Le système [2.4] avec fonction de sortie h continue est dit état-zéro détectable si chaque solution $X(x,t)$, définie maximalement à droite sur $[0,T)$, pour un réel strictement positif T, et vérifiant :*

$$h(X(x,t)) = 0 \qquad \forall t \in [0,T) \tag{2.10}$$

est en fait définie sur $[0,+\infty)$ et tend vers l'origine lorsque t tend vers $+\infty$. Un ensemble $\mathbb{S}$ est dit quasi invariant si, pour chaque point x dans $\mathbb{S}$, il existe au moins une solution $X(x,t)$ définie sur $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{S}$.

THÉORÈME 2.4 ([ISI 99], P. 44).– *Si le système est état-zéro détectable avec h comme fonction de sortie et il existe une fonction de Lyapunov de classe C^1 vérifiant :*

$$\dot{\widehat{V(x)}} = L_f V(x) \leq -|h(x)| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.11}$$

alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

2.2.2. *Cas avec perturbation*

Dans le cas où une perturbation d est présente, nous pouvons quantifier son action sur les solutions comme suit.

DÉFINITION 2.5.– *Le système :*

$$\dot{x} = f(x,d) \tag{2.12}$$

*est dit stable entrée état (= SEE) (*Input to State Stable, *ISS, en anglais) s'il existe une fonction γ de classe $\mathcal{K}$, appelée le gain L^∞ non linéaire, et une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ telles que, pour chaque fonction d dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^p)$ et chaque point x de $\mathbb{R}^n$, toutes les solutions $X(x,t;d)$ sont définies sur $\mathbb{R}_+$ et satisfont :*

$$|X(x,t;d)| \leq \max\left\{\beta(|x|,t),\ \gamma\left(\left\|d|_{[0,t]}\right\|_\infty\right)\right\} \qquad \forall t \geq 0 \tag{2.13}$$

EXEMPLE 2.1 (UN SYSTÈME SEE).– Montrons que le système suivant est SEE :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + d^3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_3 + x_1\, d \\ \dot{x}_3 = -x_2 \end{cases} \tag{2.14}$$

Nous commençons par étudier le sous-système en x_1. Avec l'inégalité de Young [2.366], nous obtenons :

$$\dot{\widehat{\tfrac{1}{2}x_1^2}} = -x_1^4 + x_1\, d^3 \tag{2.15}$$

$$\leq -\tfrac{3}{4}\left[1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^4\right]x_1^4 - \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\left(x_1^4 - 2^4\, d^4\right) \tag{2.16}$$

Nous avons donc l'implication :

$$|x_1| \geq 2\,|d| \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{\tfrac{1}{2}x_1^2}^{\,\cdot} \leq -\tfrac{3}{4}\left[1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\right]x_1^4 \qquad [2.17]$$

Utilisant le fait que $\|d|_{[0,t]}\|_\infty$ est une fonction non décroissante du temps et que les fonctions $x_1(t)$ satisfaisant l'inégalité :

$$\widehat{\tfrac{1}{2}x_1^2}^{\,\cdot} \leq -\left[1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\right]\left(\tfrac{1}{2}x_1^2\right)^2 \qquad [2.18]$$

vérifient :

$$|x_1(t)| \leq \sqrt{\frac{x_1(0)^2}{2+3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]x_1(0)^2 t}} \qquad [2.19]$$

nous pouvons déduire que toutes les solutions du sous-système en x_1 satisfont :

$$|X_1(x_1,t;d)| \leq \max\left\{\sqrt{\frac{x_1^2}{2+3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]x_1^2 t}},\ 2\left\|d|_{[0,t]}\right\|_\infty\right\} \qquad [2.20]$$

Ce sous-système en x_1 est donc SEE avec le gain L^∞ non linéaire :

$$\gamma_1(s) = 2\,s \qquad [2.21]$$

Etudions maintenant le sous-système en (x_2,x_3) en considérant (x_1,d) comme entrée. Nous posons :

$$V(x_2,x_3) = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 \qquad [2.22]$$

Avec l'inégalité :

$$x_2^2 + x_3^2 \leq 2\,V \qquad [2.23]$$

et en complétant les carrés, nous obtenons la dérivée :

$$\begin{aligned}
\widehat{V(x_2,x_3)}^{\,\cdot} &= -V(x_2,x_3) + (2x_2 - x_3)\,x_1\,d && [2.24]\\
&\leq -V(x_2,x_3) + \tfrac{1}{4}(x_2^2+x_3^2) + 5\,x_1^2\,d^2 && [2.25]\\
&\leq -\tfrac{1}{2}\,V(x_2,x_3) + 5\,x_1^2\,d^2 && [2.26]\\
&\leq -\tfrac{1}{2}\,V(x_2,x_3) + \tfrac{5}{6}\,x_1^4 + \tfrac{15}{2}\,d^4 && [2.27]
\end{aligned}$$

Avec la notation :

$$V(t) = V(X_2(x_2,x_3,t;x_1,d), X_3(x_2,x_3,t;x_1,d)) \qquad [2.28]$$

il s'en suit :

$$\begin{aligned}
V(t) &\leq \exp(-t/2)\, V(0) \\
&\quad + \int_0^t \exp(-(t-s)/2)[\tfrac{5}{6}\, x_1(s)^4 + \tfrac{15}{2}\, d^4(s)]\,\mathrm{d}s && [2.29] \\
&\leq \exp(-t/2)\, V(0) \\
&\quad + \int_0^t \exp(-(t-s)/2)\Big[\tfrac{5}{6}\,\max\Big\{\beta_1(|x_1|,t)^4, 16\Big(\Big\|d|_{[0,t]}\Big\|_\infty\Big)^4\Big\} \\
&\qquad\qquad + \tfrac{15}{2}\, d^4(s)\Big]\,\mathrm{d}s && [2.30] \\
&\leq \Big(\exp(-t/2)\, V(0) + \tfrac{5}{6}\int_0^t \exp(-(t-s)/2)\beta_1(|x_1|,t)^4\Big) \\
&\quad + 47\Big(\Big\|d|_{[0,t]}\Big\|_\infty\Big)^4 && [2.31]
\end{aligned}$$

Avec [2.23], nous concluons qu'il existe une fonction β_{23} de classe $\mathcal{KL}$ telle que, pour toutes les solutions $X_{23}(x_2, x_3, t; x_1, d)$, nous avons :

$$|X_{23}(x_2,x_3,t;x_1,d)| \leq \beta_{23}((|x_1|+|x_2|+|x_3|),t) + 9\Big(\Big\|d|_{[0,t]}\Big\|_\infty\Big)^2 \quad [2.32]$$

En regroupant [2.20] et [2.32], nous avons [2.13]. Ceci établit que le système [2.14] est SEE.

Pour résumer, le point-clé de cet exemple est l'utilisation d'une fonction de Lyapunov pour mettre en évidence la propriété de stabilité entrée état (voir le théorème 2.6).

REMARQUE 2.3.– D'autres façons de quantifier l'effet des perturbations sur les solutions ont été proposées et étudiées (voir par exemple [SON 98] pour le cas déterministe et [KRS 98a] pour le cas stochastique).

REMARQUE 2.4.– Par la suite, nous nous occupons d'un système sous la forme :

$$\dot{x} = f(x, u, d) \quad [2.33]$$

et nous cherchons une fonction continue $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que le système en boucle fermée :

$$\dot{x} = f(x, \phi(x), d) \quad [2.34]$$

est SEE avec un gain L^∞ non linéaire γ aussi petit que possible. Ce problème s'appelle le problème d'atténuation de perturbations. Nous ne l'étudions que dans le cas L^∞ (c'est-à-dire dans le contexte SEE). Il a été étudié dans d'autres contextes comme le cas L^2 (voir par exemple [ISI 95, section 9.5] ou [FRE 96, KRS 98a, PAN 98, SCHA 96, TEE 99].

La capacité d'obtenir des lois de commande atténuant l'effet de perturbations permet de traiter des problèmes de stabilisation asymptotique globale plus complexes. En particulier, nous pouvons interpréter comme perturbation des termes qui seraient trop compliqués à prendre en compte ou qui seraient mal connus. Précisément, nous pouvons travailler avec des modèles de complexité réduite (voir l'exemple 2.14). Pour vérifier si une telle approche est valide, nous avons à notre disposition le théorème des petits gains non linéaires suivant (voir aussi [ING 02, ISI 99]).

THÉORÈME 2.5 ([JIA 94]).– *Considérons l'interconnexion :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,d) \\ e = k(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y} = g(y,e) \\ d = h(y,e) \end{cases} \qquad [2.35]$$

de deux systèmes SEE. En particulier, soit β_e et β_d des fonctions de classe $\mathcal{KL}$, γ_e et γ_d des fonctions de classe $\mathcal{K}$ telles que, pour chaque fonction d dans $L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{p_d})$, chaque fonction e dans $L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{p_e})$, chaque point x de $\mathbb{R}^n$ et chaque point y de $\mathbb{R}^m$, toutes les solutions $X(x,t;d)$ et $Y(y,t;e)$ sont définies sur $\mathbb{R}_+$ et satisfont, pour presque tout $t \geq 0$:

$$|k(X(x,t;d))| \leq \max\left\{\beta_e(|x|,t),\ \gamma_e\left(\left\|d|_{[0,t]}\right\|_{\infty}\right)\right\} \qquad [2.36]$$

$$|h(Y(y,t;e),e(t))| \leq \max\left\{\beta_d(|y|,t),\ \gamma_d\left(\left\|e|_{[0,t]}\right\|_{\infty}\right)\right\} \qquad [2.37]$$

Sous ces conditions, si :

$$\gamma_e(\gamma_d(s)) < s \qquad (\textit{respectivement } \gamma_d(\gamma_e(s)) < s) \qquad \forall s > 0 \qquad [2.38]$$

alors l'origine est une solution globalement asymptotiquement stable du système complet [2.35].

REMARQUE 2.5.– Des versions locales de cet énoncé existent. Voir par exemple [TEE 95].

EXEMPLE 2.2 (APPLICATION DU THÉORÈME DES PETITS GAINS).– Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1^6 x_2 + y^2 \\ \dot{y} = -y^3 + \frac{1}{2}|x_1|^{\frac{3}{2}} \end{cases} \qquad [2.39]$$

Montrons que l'origine est globalement asymptotiquement stable en appliquant le théorème des petits gains.

Pour ce faire, nous considérons le système [2.39] comme étant constitué de l'interconnexion des sous-systèmes en x et en y.

Pour établir que le sous-système en x est SEE, posons :

$$V_x(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \qquad [2.40]$$

En complétant les carrés, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\widehat{V_x(x_1, x_2)}^{\cdot} &= -(x_1^2 + x_2^2) + x_1\,(x_1^3 x_2) - x_1^6 x_2^2 + x_2\, y^2 && [2.41]\\
&\leq -\tfrac{1}{2}\, x_1^2 - \tfrac{1}{2}\, x_2^2 - \tfrac{1}{2}\, x_1^6 x_2^2 + \tfrac{1}{2}\, y^4 && [2.42]\\
&\leq -V_x + \tfrac{1}{2}\, y^4 && [2.43]
\end{aligned}$$

Ceci implique, avec la même notation que dans [2.28] :

$$V_x(t) \leq \exp(-t)\, V_x(0) + \tfrac{1}{2} \int_0^t \exp(-(t-s))\, y(s)^4\, \mathrm{d}s \qquad [2.44]$$

Il est donc établi que le sous-système en x est SEE et donc qu'il existe une fonction β_e de classe $\mathcal{KL}$ telle que, pour toutes les solutions et tous les temps positifs, nous avons :

$$|X_1((x_1, x_2), t; y)| \leq \max\left\{\beta_e(|x_1| + |x_2|, t),\ \gamma_e\left(\left\| y|_{[0,t]} \right\|_\infty\right)\right\} \qquad [2.45]$$

où :

$$\gamma_e(s) = s^2 \qquad [2.46]$$

De même, pour le sous-système en y, nous posons :

$$V_y(y) = \tfrac{1}{2}\, y^2 \qquad [2.47]$$

L'inégalité [2.366] de Young nous donne :

$$y\, |x_1|^{\frac{3}{2}} \leq \tfrac{1}{4}\, y^4 + \tfrac{3}{4}\, x_1^2 \qquad [2.48]$$

Il s'en suit que, pour chaque ε dans $(0, 1)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\widehat{V_y(y)}^{\cdot} &= -y^4 + \frac{1}{2}\, y\, |x_1|^{\frac{3}{2}} && [2.49]\\
&\leq -\frac{7}{8}\, y^4 + \frac{3}{8}\, x_1^2 && [2.50]\\
&\leq -\frac{7\varepsilon}{2}\, V_y(y)^2 - \frac{7(1-\varepsilon)}{2}\left(V_y(y)^2 - \frac{3}{28(1-\varepsilon)}\, x_1^2\right) && [2.51]
\end{aligned}$$

Ceci établit que le sous-système en y est SEE et donc qu'il existe une fonction β_d de classe $\mathcal{KL}$ telle que, pour toutes les solutions et les temps positifs, nous avons :

$$|Y(y, t; x_1)| \leq \max\left\{\beta_d(|y|, t),\ \gamma_d\left(\left\| x_1|_{[0,t]} \right\|_\infty\right)\right\} \qquad [2.52]$$

avec :

$$\gamma_d(s) = \left(\frac{3}{7(1-\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{4}} s^{\frac{1}{2}} \qquad [2.53]$$

Ayant établi les inégalités [2.36] et [2.37], il nous reste à vérifier la condition [2.38] de petit gain. Nous avons, pour s strictement positif :

$$\gamma_e(\gamma_d(s)) = \left(\left(\frac{3}{7(1-\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{4}} s^{\frac{1}{2}}\right)^{2} \qquad [2.54]$$

$$= \left(\frac{3}{7(1-\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}} s < s \qquad [2.55]$$

Avec le théorème 2.5, nous en concluons que l'origine est une solution globalement asymptotiquement stable de [2.39].

Comme pour la stabilité asymptotique, les fonctions de Lyapunov se révèlent fournir un outil très efficace pour traiter les problèmes de SEE. Ainsi, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 2.6 ([SON 95a]).– *Le système [2.12] est SEE si et seulement s'il existe une fonction de Lyapunov V de classe C^1, une fonction*[1] *a de classe $\mathcal{K}^\infty$ et une fonction b de classe $\mathcal{K}$ telles que :*

$$\widehat{\dot{V(x)}} = \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x,d) \leq -a(V(x)) + b(|d|) \qquad \forall (x,d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \quad [2.56]$$

Plus précisément, cette inégalité implique que le gain L^∞ non linéaire est plus petit que la fonction $\alpha^{-1} \circ a^{-1} \circ b$, où α est une fonction de classe $\mathcal{K}^\infty$ satisfaisant :

$$\alpha(|x|) \leq V_x(x) \qquad [2.57]$$

Nous avons en fait déjà utilisé ce résultat dans l'exemple 2.1 pour montrer que le système [2.14] est SEE. Dans le contexte de la propriété de SEE écrite à l'aide d'une fonction de Lyapunov, nous avons une autre version du théorème des petits gains qui s'avère très utile en synthèse de lois de commande.

THÉORÈME 2.7 ([PRA 93]).– *Considérons l'interconnexion [2.35] où le sous-système en y est SEE avec en particulier des fonctions β_d de classe $\mathcal{KL}$ et γ_d de classe $\mathcal{K}$ telles que, pour chaque fonction e dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)$ et chaque point y de $\mathbb{R}^n$, toutes les solutions $Y(y,t;e)$ sont définies sur $\mathbb{R}_+$ et satisfont :*

$$|h(Y(y,t;e), e(t))| \leq \max\left\{\beta_d(|y|,t),\ \gamma_d\left(\left\|e|_{[0,t]}\right\|_\infty\right)\right\} \qquad \forall t \geq 0 \quad [2.58]$$

---

1. Sans perte de généralité, nous pouvons prendre $a(s) = s$ (voir [PRA 96]).

Soit V_x une fonction de Lyapunov de classe C^1, γ_x une fonction de $\mathcal{K}$ et λ un réel strictement positif vérifiant :

$$\widehat{V_x(x)}^{\cdot} = \frac{\partial V_x}{\partial x}(x)\, f(x,d) \leq -\lambda\, V_x(x) + \gamma_x(|d|) \qquad \forall (x,d) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \quad [2.59]$$

Sous ces conditions, si, pour un réel ε dans $(0,1)$, nous avons :

$$\gamma_x(\gamma_d(|k(x)|)) \leq (1-\varepsilon)\, \lambda\, V_x(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad [2.60]$$

alors l'origine est une solution globalement asymptotiquement stable du système complet [2.35].

2.3. Fonctions de Lyapunov assignables (CLF)

Considérons le système affine en la commande :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\, u \quad [2.61]$$

Soit V une fonction de Lyapunov de classe C^1. La dérivée de V le long des solutions de [2.61] vérifie :

$$\widehat{V(x)}^{\cdot} = L_f V(x) + L_g V(x)\, u \quad [2.62]$$

Pour chaque x tel que $|L_g V(x)|$ est non nul, cette dérivée $\widehat{V(x)}^{\cdot}$ peut être rendue strictement négative en prenant la commande par exemple comme :

$$u = -\frac{L_f V(x) + |x|}{|L_g V(x)|^2}\, L_g V(x)^T \quad [2.63]$$

Mais, en chaque point x où $|L_g V(x)|$ s'annule, la commande n'a pas d'action sur la dérivée de V puisque nous avons seulement :

$$\widehat{V(x)}^{\cdot} = L_f V(x) \quad [2.64]$$

Il s'en suit qu'une fonction de Lyapunov V ne peut être éligible pour conduire à une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement uniquement si elle vérifie l'implication :

$$|L_g V(x)| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad L_f V(x) \leq 0 \quad [2.65]$$

En d'autres termes, la fonction V doit être telle que la fonction $L_f V$ restreinte à l'ensemble $\{x : |L_g V(x)| = 0\}$ est à valeurs non positives.

DÉFINITION 2.6.– *Une fonction de Lyapunov V de classe C^1 est dite strictement assignable point par point (CLF) au système [2.61], affine en la commande, si elle vérifie la propriété :*

$$(x \neq 0,\ |L_g V(x)| = 0) \qquad \Longrightarrow \qquad L_f V(x) < 0 \tag{2.66}$$

DÉFINITION 2.7.– *Une fonction de Lyapunov V de classe C^1 est dite strictement assignable point par point (CLF) au système [2.61], affine en la commande, si elle vérifie*[2] *:*

$$\limsup_{|x| \to 0} \frac{L_f V(x)}{|L_g V(x)|} \leq 0 \tag{2.67}$$

EXEMPLE 2.3 (FONCTION DE LYAPUNOV ASSIGNABLE POINT PAR POINT ET LOCALEMENT CONTINÛMENT).– Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1\, x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases} \tag{2.68}$$

et la fonction de Lyapunov :

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + (x_2 + x_1^2)^2) \tag{2.69}$$

Vérifions qu'elle est strictement assignable point par point. Nous avons :

$$\begin{cases} L_f V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + (x_2 + x_1^2)(-x_2 + 2x_1^2 x_2) \\ L_g V(x_1, x_2) = x_2 + x_1^2 \end{cases} \tag{2.70}$$

Ainsi, $L_g V(x_1, x_2)$ est nul si et seulement si :

$$x_2 = -x_1^2 \tag{2.71}$$

Dans ce cas, nous avons :

$$L_f V(x_1, x_2) = -x_2^2 \tag{2.72}$$

qui, avec [2.71], est strictement négatif si le point (x_1, x_2) n'est pas l'origine.

Nous remarquons aussi que nous avons :

$$L_f V(x_1, x_2) = -x_2^2 - 2x_1^4\, L_g V(x_1, x_2) + 2x_1^2 L_g V(x_1, x_2)^2 \tag{2.73}$$

Ceci permet de conclure que V est localement continûment strictement assignable.

2. La limite supérieure peut très bien être $-\infty$.

THÉORÈME 2.8 ([FRE 96, HAM 01, SON 89a]).– *Soit V une fonction de Lyapunov de classe C^1 strictement assignable point par point au système [2.61] :*

– si V est aussi localement continûment strictement assignable, les fonctions ϕ_S et ϕ_F suivantes sont continues et donnent des lois de commande stabilisant asymptotiquement globalement l'origine :

$$\begin{cases} \phi_S(x) = \phi_F(x) = 0 & \text{si } |B| = 0 \\ \phi_S(x) = -\dfrac{A + \sqrt{A^2 + |B|^4}}{|B|^2} B^T & \text{si } |B| \neq 0 \\ \phi_F(x) = -\dfrac{\max\{A + |B|^2,\ 0\}}{|B|^2} B^T & \text{si } |B| \neq 0 \end{cases} \qquad [2.74]$$

avec la notation :

$$A = L_f V(x), \qquad B = L_g V(x) \qquad [2.75]$$

– s'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que nous avons :

$$\limsup_{|x| \to 0} \frac{L_f V(x)}{|L_g V(x)|^\alpha} < +\infty \qquad [2.76]$$

alors il existe une fonction de classe C^1 définie positive et propre *ℓ dont la dérivée est positive et telle que :*

$$\phi_L(x) = -|L_g \ell(V)(x)|^{\alpha-2} L_g \ell(V)(x)^T \qquad [2.77]$$

est une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement.

REMARQUE 2.6.– Le théorème 2.8 a été étendu au cas où la commande est sujette à une contrainte d'amplitude (voir [MAL 99] par exemple).

REMARQUE 2.7.– Il est montré dans [EFI 02] que la condition [2.66] de stricte assignabilité peut être relâchée. Précisément, le résultat du théorème 2.8 est encore juste si la fonction de Lyapunov V vérifie seulement :

$$\limsup_{|L_g V(x)| \to 0} \frac{L_f V(x)}{|L_g V(x)|} \leq 0 \qquad [2.78]$$

Mais alors, il faut ajouter que, pour tout réel non négatif v, le plus grand ensemble quasi invariant de :

$$\dot{x} = f(x) \qquad [2.79]$$

contenu dans l'ensemble :

$$\{x \in V(x) \leq v,\ L_f V(x) = |L_g V(x)| = 0\}$$

est réduit à l'origine.

REMARQUE 2.8.– La loi de commande [2.77] est parfois appelée *commande gradient* ou *commande* L_gV. Lorsque α est égal à 2, son intérêt est dans le fait que le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)[\phi_L(x) + v] \\ y = \phi_L(x) \end{cases} \qquad [2.80]$$

d'entrée v et sortie y est strictement *passif*. Cette propriété garantit par exemple la robustesse de la stabilisation asymptotique globale malgré la présence de dynamiques négligées au niveau des actionneurs. Observons cependant qu'elle est fondamentalement de nature grand gain. Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter à la lecture de [SEP 97] (voir aussi [HAM 01]).

REMARQUE 2.9.– Si la fonction de Lyapunov n'est pas localement continûment strictement assignable ou ne vérifie pas la propriété [2.76], nous pouvons perdre la continuité à l'origine ou même la bornitude locale des lois de commande. Mais ces lois de commande peuvent malgré tout être utilisées pour rendre globalement asymptotique stable un voisinage de l'origine.

EXEMPLE 2.4 (SYNTHÈSE DE COMMANDE À PARTIR D'UNE FONCTION DE LYAPUNOV STRICTEMENT ASSIGNABLE POINT PAR POINT).– Pour le système [2.68], nous avons vu dans l'exemple 2.3 que :

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}\left(x_1^2 + (x_2 + x_1^2)^2\right) \qquad [2.81]$$

est strictement assignable point par point et localement continûment. Nous déduisons avec le théorème 2.8 que la fonction :

$$\begin{cases} \phi_S(x) = 0 \\ \qquad \text{si } |x_2 + x_1^2| = 0 \\ \phi_S(x) = -\frac{x_1^2x_2 + (x_2+x_1^2)(-x_2+2x_1^2x_2) + \sqrt{[x_1^2x_2 + (x_2+x_1^2)(-x_2+2x_1^2x_2)]^2 + |x_2+x_1^2|^4}}{x_2+x_1^2} \\ \qquad \text{si } |x_2 + x_1^2| \neq 0 \end{cases}$$

$$[2.82]$$

ou :

$$\begin{cases} \phi_F(x) = 0 & \text{si } |x_2 + x_1^2| = 0 \\ \phi_F(x) = -\frac{\max\{x_1^2x_2 + (x_2+x_1^2)(-x_2+2x_1^2x_2) + (x_2+x_1^2)^2,\ 0\}}{x_2+x_1^2} & \text{si } |x_2 + x_1^2| \neq 0 \end{cases}$$

$$[2.83]$$

est continue et donne une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement l'origine. Nous pouvons aussi tirer profit de la décomposition particulière [2.73] de

$L_f V$ pour déduire une loi de commande à partir de V. En effet, nous obtenons :

$$\widehat{V(x_1, x_2)}^{\cdot} = -x_2^2 + L_g V(x_1, x_2)(-2x_1^4 + 2x_1^2 L_g V(x_1, x_2) + u) \qquad [2.84]$$

Ainsi, nous voyons que la fonction :

$$\phi(x_1, x_2) = -(-2x_1^4 + 2x_1^2 L_g V(x_1, x_2)) - L_g V(x_1, x_2) \qquad [2.85]$$

est continue et donne une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement l'origine.

Les étapes ci-dessus sont typiques dans la synthèse de Lyapunov. Précisément, elles consistent à écrire une majoration de la dérivée $\dot{V}$ comme une somme d'un terme non positif et d'un terme ayant $L_g V$ en facteur. Une telle majoration est non unique. Ainsi par exemple, nous avons aussi :

$$\widehat{V(x_1, x_2)}^{\cdot} = -x_1^4 + L_g V(x_1, x_2)(x_1^2 - x_2 + 2x_1^2 x_2 + u) \qquad [2.86]$$

A partir de ces majorations, nous pouvons procéder par *annulation* en définissant la commande de sorte qu'elle annule le facteur de $L_g V$ et le remplace par un terme négatif multiplié par $L_g V$. Nous pouvons aussi tirer parti d'inégalités comme [2.366] et procéder par *domination*. Par exemple :

– dans la décomposition [2.84], nous voyons qu'il n'est pas nécessaire d'annuler le produit :

$$L_g V(x_1, x_2)(-2x_1^4 + 2x_1^2 L_g V(x_1, x_2))$$

lorsqu'il n'est pas positif. Ainsi, une synthèse par domination donne par exemple (à comparer avec [2.83]) :

$$\phi(x_1, x_2) = -\frac{\max\{L_g V(x_1, x_2)(-2x_1^4 + 2x_1^2 L_g V(x_1, x_2)) + L_g V(x_1, x_2)^2,\ 0\}}{L_g V(x_1, x_2)} \qquad [2.87]$$

– dans la décomposition [2.86], en complétant les carrés, le produit $L_g V x_1^2$ peut être majoré comme :

$$L_g V(x_1, x_2)\, x_1^2 \leq \tfrac{1}{2}\, x_1^4 + \tfrac{1}{2}\, (L_g V(x_1, x_2))^2 \qquad [2.88]$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité :

$$\widehat{V(x_1, x_2)}^{\cdot} \leq -\tfrac{1}{2} x_1^4 + L_g V(x_1, x_2)(\tfrac{1}{2} L_g V(x_1, x_2) - x_2 + 2x_1^2 x_2 + u) \quad [2.89]$$

Une autre loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement est donc :

$$\phi(x_1, x_2) = -(L_g V(x_1, x_2) - x_2 + 2x_1^2 x_2) \qquad [2.90]$$

Maintenant, pour savoir s'il existe une commande gradient, nous vérifions si la condition [2.76] est satisfaite. Nous observons qu'avec la décomposition [2.73] nous obtenons :

$$L_f V(x_1, x_2) = -(x_2^2 + 2x_1^4 x_2 + 2x_1^6) + 2x_1^2 \left(L_g V(x_1, x_2)\right)^2 \qquad [2.91]$$

Le premier terme entre parenthèses dans le membre de droite est défini positif en x_2 pour tout $|x_1| < \sqrt{2}$. Ceci implique :

$$\limsup_{|x_1|+|x_2|\to 0} \frac{L_f V(x_1, x_2)}{|L_g V(x_1, x_2)|^2} \leq \limsup_{|x_1|+|x_2|\to 0} 2x_1^2 = 0 \qquad [2.92]$$

Donc, de la formule [2.77], nous déduisons la commande gradient :

$$\phi_L(x_1, x_2) = -(x_2 + x_1^2)\ell'(V(x_1, x_2)) \qquad [2.93]$$

où la fonction ℓ' reste à déterminer. En utilisant l'inégalité [2.366], nous pouvons montrer que cette loi de commande rend la dérivée $\widehat{\dot{V}(x_1, x_2)}$ dans [2.86], négative définie si $\ell'(V)$ satisfait la contrainte :

$$(1 + x_2)^2 < 1 + \ell'(V(x_1, x_2)) \qquad [2.94]$$

Par ailleurs, nous déduisons de [2.81] :

$$(1 + x_2)^2 \leq 2 + 4V(x_1, x_2) + V(x_1, x_2)^2 \qquad [2.95]$$

Ainsi, une expression appropriée pour ℓ' est par exemple :

$$\ell'(v) = v^2 + 4v + 3 \qquad [2.96]$$

En résumé, les points importants de cet exemple sont :

– la majoration de la dérivée $\dot{V}$ comme :

$$\dot{V} \leq T_- + L_g V \times (u + T) \qquad [2.97]$$

où T_- est un terme non positif et T un terme quelconque ;

– la synthèse d'une loi de commande à partir de cette majoration [2.97] *via* une approche d'annulation :

$$u = -T - Q(x)\, L_g V(x)^T \qquad [2.98]$$

où Q est une matrice définie positive ou avec une approche de domination en poussant plus loin la majoration [2.97] avec en particulier la possibilité d'obtenir une commande gradient.

Pour des systèmes sans perturbation, nous venons de voir que la connaissance d'une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point nous permet d'écrire une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement. Pour le cas avec perturbation, la même approche peut être suivie (voir aussi [KRS 95, lemme 5.2]) ; voir le théorème suivant.

THÉORÈME 2.9 ([SON 95b]).– *Soit V une fonction de Lyapunov de classe C^1 strictement assignable point par point et localement continûment au système [2.61]. Si et seulement si nous avons :*

$$\lim_{\substack{|x|\to\infty \\ L_gV(x)=0}} -\frac{L_fV(x)}{|L_pV(x)|} = +\infty \qquad [2.99]$$

alors il existe une fonction continue ϕ qui rend le système suivant SEE :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\,\phi(x) + p(x)\,d \qquad [2.100]$$

REMARQUE 2.10.– La preuve de ce théorème est constructive. En effet, la condition [2.99] garantit l'existence d'une fonction α de classe $\mathcal{K}^\infty$ vérifiant la propriété :

$$(x \neq 0,\ |L_gV(x)| = 0) \quad \Longrightarrow \quad L_fV(x) + |L_pV(x)|\,\alpha(|x|) < 0 \qquad [2.101]$$

A partir de là, une loi de commande appropriée est donnée par ϕ_S ou ϕ_F dans le théorème 2.8 en y prenant A comme :

$$A = L_fV(x) + |L_pV(x)|\,\alpha(|x|) \qquad [2.102]$$

REMARQUE 2.11.– Pour le cas général où le système n'est pas affine en d, comme dans [2.100], la condition [2.99] est plus complexe. Les fonctions de Lyapunov qui donnent encore accès à une loi de commande sont dites robustement strictement assignables (RCLF pour *Robust Control Lyapunov Functions* en anglais). Elles ont été introduites et étudiées dans [FRE 96].

EXEMPLE 2.5 (RENDRE UN SYSTÈME SEE PAR BOUCLAGE).– Pour le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1\,x_2 + d \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases} \qquad [2.103]$$

nous cherchons une loi de commande rendant le système bouclé SEE.

Avec l'exemple 2.3, nous savons que la fonction de Lyapunov :

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + (x_2 + x_1^2)^2) \qquad [2.104]$$

est strictement assignable point par point et localement continûment (au système non perturbé). Etudions donc si la condition [2.99] est satisfaite.

Nous obtenons :

$$\begin{cases} L_f V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + (x_2 + x_1^2)(-x_2 + 2x_1^2 x_2) \\ L_g V(x_1, x_2) = x_2 + x_1^2 \\ L_p V(x_1, x_2) = x_1 + 2\, x_1\, (x_2 + x_1^2) \end{cases} \qquad [2.105]$$

Ainsi, lorsque $L_g V$ est nul, nous avons :

$$L_f V(x_1, x_2) = -x_1^4 \qquad L_p V(x_1, x_2) = x_1 \qquad [2.106]$$

Ceci implique :

$$\lim_{\substack{|x| \to \infty \\ L_g V(x) = 0}} -\frac{L_f V(x)}{|L_p V(x)|} = \lim_{|x_1| \to \infty} |x_1|^3 = +\infty \qquad [2.107]$$

Nous sommes donc assurés de l'existence d'une loi de commande appropriée. Pour en obtenir une expression, nous écrivons (voir [2.86], avec l'inégalité de Young [2.366]) :

$$\begin{aligned} \overbrace{V(x_1, x_2)}^{\cdot} &= -x_1^4 + x_1\, d + L_g V(x_1, x_2)(x_1^2 - x_2 + 2x_1^2 x_2 + u + 2x_1 d) \qquad [2.108] \\ &\leq -\varepsilon\, x_1^4 + L_g V(x_1, x_2)\Big(x_1^2 - x_2 + 2x_1^2 x_2 + u + \frac{27}{256\varepsilon^3} x_1^4 L_g V(x_1, x_2)^3\Big) \\ &\quad + a\, |d|^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

où ε est n'importe quel réel dans $(0, 1)$ et :

$$a = \left(\frac{3}{4[4(1-\varepsilon)]^{\frac{1}{3}}} + \varepsilon \right) \qquad [2.109]$$

Il s'en suit que, en prenant la loi de commande comme :

$$\begin{aligned} u &= \phi(x_1, x_2) \\ &= -\Big(x_1^2 - x_2 + 2x_1^2 x_2 + \frac{27}{256\varepsilon^3} x_1^4 L_g V(x_1, x_2)^3\Big) - \varepsilon\, L_g V(x_1, x_2)^3 \end{aligned} \qquad [2.110]$$

nous obtenons :

$$\overbrace{V(x_1, x_2)}^{\cdot} \leq -\varepsilon(x_1^4 + L_g V(x_1, x_2)^4) + |d|^{\frac{4}{3}} \qquad [2.111]$$

$$\leq -2\,\varepsilon\, V(x_1, x_2)^2 + a\, |d|^{\frac{4}{3}} \qquad [2.112]$$

Ainsi, puisque nous avons :

$$|x_1| + |x_2| \leq 2\, V(x_1, x_2) + 2\sqrt{2\, V(x_1, x_2)} \qquad [2.113]$$

le théorème 2.6 dit que le gain L^∞ non linéaire γ du système en boucle fermée satisfait :

$$\gamma(s) \leq \sqrt{2a}\, s^{\frac{2}{3}} + 2\,(2a)^{\frac{1}{4}}\, s^{\frac{1}{3}} \qquad [2.114]$$

Observons que ce gain ne peut être rendu arbitrairement petit. En effet, a est minoré par $\frac{3}{4\sqrt{2}}$.

De nouveau, il ressort de la condition [2.99] que ce que nous pouvons faire avec une fonction de Lyapunov est complètement dicté par la restriction à l'ensemble $\{x : |L_gV(x)| = 0\}$. Ce point a été étudié dans [TEE 99] par exemple. En particulier, si $|L_pV(x)|$ est nul lorsque $|L_gV(x)|$ est nul, alors il n'y a pas de limite dans l'atténuation de la perturbation. Précisément, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 2.10 ([PRA 96]).– *Soit V une fonction de Lyapunov de classe C^1 strictement assignable point par point et localement continûment au système [2.61]. S'il existe une fonction $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ continue satisfaisant :*

$$|L_pV(x)| \leq |L_gV(x)|\, \rho(x) \qquad [2.115]$$

alors, pour toutes fonctions γ_u et γ_x de classe $\mathcal{K}^\infty$, il existe une fonction continue ϕ et des fonctions β_u et β_x de classe $\mathcal{KL}$ telles que, pour chaque fonction d dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)$ et chaque point x de $\mathbb{R}^n$, toutes les solutions $X(x, t; d)$ du système en boucle fermée :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\,\phi(x) + p(x)\,d \qquad [2.116]$$

sont définies sur $\mathbb{R}_+$ et satisfont, pour tout temps t positif :

$$|X(x, t; d)| \leq \max\left\{\beta_x(|x|, t),\ \gamma_x\left(\left\|d|_{[0,t]}\right\|_\infty\right)\right\} \qquad [2.117]$$

et, lorsque $\rho(s) \leq s$:

$$|\phi(X(x, t; d))| \leq \max\left\{\beta_u(|x|, t),\ (\mathrm{Id} + \gamma_u)\left(\left\|d|_{[0,t]}\right\|_\infty\right)\right\} \qquad [2.118]$$

REMARQUE 2.12.– Cette fois encore, la preuve de ce théorème est constructive (voir l'exemple 2.6).

REMARQUE 2.13.– Le gain L^∞ non linéaire γ_x étant arbitraire, l'inégalité [2.117] montre que l'action de d sur l'état peut être arbitrairement atténuée. De plus, lorsque la fonction ρ est majorée par la fonction identité, cette atténuation peut être réalisée avec une commande dont la norme L^∞ est aussi proche que nous voulons de celle de la perturbation.

REMARQUE 2.14.– La condition [2.115] est une de ces conditions dite *de coïncidence* (*matching condition* en anglais). Elle tient au fait que, si la perturbation d était mesurée, nous pourrions complètement annuler (faire coïncider) sa contribution aux termes positifs dans la dérivée de V en prenant la commande :

$$\phi(x) = -|d|\, \rho(x)\, \frac{L_g V(x)^T}{|L_g V(x)|} \qquad [2.119]$$

REMARQUE 2.15.– Comme il est remarqué dans [SON 89b], lorsque la fonction de Lyapunov strictement assignable point par point V et la loi de commande associée ϕ sont telles que la fonction :

$$W(x) = -(L_f V(x) + L_g V(x)\phi(x)) \qquad [2.120]$$

est propre [3], alors la loi de commande :

$$\phi_d(x) = \phi(x) - \rho(x)^2\, L_g V(x)^T \qquad [2.121]$$

rend le système en boucle fermée SEE mais sans que nous puissions contrôler le gain L^∞ non linéaire γ.

EXEMPLE 2.6 (ATTÉNUATION DE PERTURBATION COMME SYNTHÈSE DE BOUCLAGE D'ÉTAT PARTIEL).– Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_4^3 \\ \dot{x}_2 = -x_2\, x_3 + x_1\, x_4 \\ \dot{x}_3 = -x_2 \\ \dot{x}_4 = u + x_3 + x_1\, x_4 \end{cases} \qquad [2.122]$$

Nous cherchons une fonction continue, ne dépendant que de x_4 et donnant une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement l'origine.

La voie que nous suivons pour résoudre ce problème résulte des deux observations suivantes :

1) le sous-système en (x_1, x_2, x_3) avec x_4 comme entrée n'est rien d'autre que le système [2.14] que nous avons montré être SEE dans l'exemple 2.1 ;

2) dans le sous-système en x_4, la perturbation (x_3, x_1) satisfait la condition de coïncidence puisque nous pourrions annuler son effet avec la commande u si elle était connue. Avec le théorème 2.10, nous savons que nous pouvons obtenir une loi de commande ϕ ne dépendant que de x_4 et atténuant autant que nous voulons l'action de cette perturbation.

3. Ce qui peut toujours être obtenu d'après [SON 89b].

De ces deux points découle que nous devrions être capable de satisfaire une condition de petit gain comme [2.38] ou [2.60]. Plus précisément, avec [2.20], [2.32] et le théorème 2.7, nous savons que notre problème sera résolu si, pour le système (voir le sous-système en x_4) :

$$\dot{x} = u + d_2 + d_1\, x \qquad [2.123]$$

nous pouvons trouver une fonction de Lyapunov V strictement assignable point par point et une fonction continue ϕ telles que nous avons l'inégalité suivante pour la dérivée de V :

$$\widehat{\dot{V(x)}} \leq -\lambda\, V(x) + \gamma_1(|d_1|) + \gamma_2(|d_2|) \qquad [2.124]$$

où γ_1 et γ_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{K}$ et λ est un réel strictement positif vérifiant (voir [2.20] et [2.32]) :

$$\gamma_1(2|x|) + \gamma_2(9x^2) \leq (1-\varepsilon)\,\lambda\, V(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad [2.125]$$

avec ε un réel strictement positif quelconque. Le théorème 2.10 nous indique qu'il est toujours possible de trouver de telles fonctions V et ϕ. Exprimons donc ces fonctions.

Nous commençons par observer qu'il est suffisant d'avoir :

$$\gamma_1(s) = a\, s^4 \qquad \gamma_2(s) = b\, s^2 \qquad V(x) \geq c\, x^4 \qquad [2.126]$$

avec a, b et c des nombres réels. Prenons donc la fonction de Lyapunov strictement assignable point par point :

$$V(x) = \tfrac{1}{4}\, x^4 \qquad [2.127]$$

Avec l'inégalité de Young [2.366], nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\widehat{\dot{V(x)}} &= x^3\, u + x^3\, d_2 + x^4\, d_1 && [2.128]\\
&\leq x^3\, u + \left(x^6 + \frac{d_2^2}{4}\right) + \left(\frac{3(x^4)^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{d_1^4}{4}\right) && [2.129]\\
&\leq x\left(u + x^3 + \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{4}\right) + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_1^4}{4} && [2.130]
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant :

$$u = \phi(x) = -\frac{\lambda}{4}\, x - \left(x^3 + \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{4}\right) \qquad [2.131]$$

nous obtenons l'inégalité [2.124] sous la forme :

$$\widehat{\dot{V(x)}} \leq -\lambda V(x) + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_1^4}{4} \qquad [2.132]$$

Ceci nous donne :

$$\gamma_1(s) = \frac{s^4}{4} \qquad \gamma_2(s) = \frac{s^2}{4} \qquad [2.133]$$

Nous pouvons donc maintenant écrire la contrainte [2.125] de façon explicite comme :

$$4\,x^4 + \frac{81}{4}\,x^4 \leq (1-\varepsilon)\,\frac{\lambda}{4}\,x^4 \qquad \forall x \qquad [2.134]$$

Notre objectif est donc atteint en prenant :

$$\lambda > 97 \qquad [2.135]$$

et donc, par exemple, la loi de commande :

$$u = \phi(x) = -24\,x - \left(x^3 + \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{4}\right) \qquad [2.136]$$

En résumé, les points importants de cet exemple sont :

– le choix très spécifique de la fonction V dans [2.127]. Nous avons utilisé [2.126] pour nous guider dans ce choix. De façon générale, l'idée est de ne pas préciser tout de suite V. A la place, nous continuons les calculs en accumulant toutes les contraintes que cette fonction doit satisfaire. Le choix de V est alors fait à la fin ;

– traiter les termes de perturbations en manipulant des inégalités.

Dans tout ce paragraphe, nous avons vu que, pour résoudre le problème de la stabilisation asymptotique globale ou le problème d'atténuation de perturbations, il est suffisant de chercher une fonction de Lyapunov V satisfaisant :

$$\{x \neq 0,\ |L_gV(x)| = 0\} \qquad \Longrightarrow \qquad L_fV(x) < 0 \qquad [2.137]$$

et peut être une condition supplémentaire au voisinage de l'origine. La prochaine section est dédiée à une technique de construction d'une telle fonction pour des systèmes dont la dynamique peut être écrite sous une forme récursive.

2.4. Ajout de dérivateur et systèmes sous forme de *feedback* (*backstepping*)

2.4.1. *Fonction de Lyapunov assignable point par point par réduction ou extension dynamique*

Considérons un système dont la dynamique peut être écrite sous la forme triangulaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = h(x,y) + u \end{cases} \qquad [2.138]$$

avec x dans $\mathbb{R}^n$ et y et u dans $\mathbb{R}$. Nous voulons savoir si, connaissant une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point au système complet [2.138], nous pouvons en déduire une pour le système réduit :

$$\dot{x} = f(x, u) \qquad [2.139]$$

et inversement.

2.4.1.1. *Réduction*

Supposons que nous connaissions une fonction de Lyapunov V_y strictement assignable point par point au système complet [2.138] :

$$\left\{(x, y) \neq 0,\ \frac{\partial V_y}{\partial y}(x, y) = 0\right\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial V_y}{\partial x}(x, y)\, f(x, y) < 0 \qquad [2.140]$$

La condition $\frac{\partial V_y}{\partial y}(x, y) = 0$ est une condition de stationnarité en y de la fonction V_y, à x fixé. Or, puisque V_y est une fonction de Lyapunov de classe C^1, pour chaque x fixé, elle admet un minimum global en y et donc au moins un point stationnaire. Dénotons $\phi_x(x)$ l'un de ces points stationnaires. Nous avons alors :

$$\frac{\partial V_y}{\partial y}(x, \phi_x(x)) = 0 \qquad [2.141]$$

et, V_y étant définie positive, nous pouvons sélectionner ϕ_x pour satisfaire :

$$\phi_x(0) = 0 \qquad [2.142]$$

Définissons la fonction V_x comme :

$$V_x(x) = V_y(x, \phi_x(x)) \qquad [2.143]$$

Nous avons le lemme suivant.

LEMME 2.1.– *Si la fonction V_y est de classe C^2 et la fonction ϕ_x peut être sélectionnée pour être* Hölder continue *d'ordre strictement plus grand que $\frac{1}{2}$, alors la fonction V_x est une fonction de Lyapunov de classe C^1 strictement assignée au système réduit [2.139] par la loi de commande continue ϕ_x.*

REMARQUE 2.16.– La continuité de ϕ_x n'est en général pas impliquée par le fait que V_y soit une fonction de Lyapunov satisfaisant [2.140]. Nous pouvons trouver, dans [COR 91], un système de la forme [2.138] dont l'origine est globalement asymptotiquement stabilisable mais tel que le résultat du lemme 2.1 est faux pour le système réduit [2.139] associé.

Avec le lemme 2.1, nous avons une condition suffisante pour que, étant donné un système sous la forme triangulaire [2.138], nous puissions déduire une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point au système réduit [2.139] à partir de celle du système complet [2.138].

Ce fait est important car il montre que des problèmes de stabilisation peuvent être étudiés, au moins dans certains cas, avec des systèmes de dimension réduite.

2.4.1.2. *Extension*

Etudions maintenant la question inverse, à savoir : si nous connaissons une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point au système [2.139], pouvons-nous en déduire une pour le système étendu [2.138] ?

Pour obtenir une réponse à cette question, nous inversons les arguments présentés dans la réponse à la question de réduction :

– C1 : soit V_x une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point au système [2.139]. Soit $\phi_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue assignant strictement cette fonction à ce système, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}(x)\, f(x, \phi(x)) < 0 \qquad \forall x \neq 0 \tag{2.144}$$

Nous remarquons que, pour toute fonction ℓ qui est de classe C^1, définie positive et propre, et dont la dérivée est positive, la fonction $\ell(V_x)$ est aussi une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point au système [2.139] ;

– C2 : à partir de ces données, pour créer ce qui sera la fonction $\frac{\partial V_y}{\partial y}$, nous introduisons une fonction $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est de classe C^1, telle que la fonction :

$$\Psi(x, y) = \int_{\phi_x(x)}^{y} \psi(x, s)\, \mathrm{d}s \tag{2.145}$$

de classe C^1 et vérifie :

$$\psi(x, y) = 0 \qquad \iff \qquad y = \phi_x(x) \tag{2.146}$$

$$\psi(x, y)[y - \phi_x(x)] > 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y \neq \phi_x(x) \tag{2.147}$$

$$\lim_{|y| \to \infty} \Psi(x, y) = +\infty \qquad \forall x \tag{2.148}$$

THÉORÈME 2.11 ([PRA 91]).– *Sous les conditions C1 et C2 ci-dessus, la fonction :*

$$V_y(x, y) = \ell(V_x(x)) + \int_{\phi_x(x)}^{y} \psi(x, s)\, \mathrm{d}s \tag{2.149}$$

est une fonction de Lyapunov de classe C^1 strictement assignable point par point au système [2.138]. De plus, si :

$$\liminf_{|x|+|y|\to 0} \frac{|\psi(x,y)|}{|y-\phi_x(x)|} > 0 \qquad [2.150]$$

alors V_y est aussi localement continûment strictement assignable.

EXEMPLE 2.7 (CONSTRUCTION D'UNE FONCTION DE LYAPUNOV STRICTEMENT ASSIGNABLE POINT PAR POINT).– Revenons au système [2.68] de l'exemple 2.3 et voyons comment a été construite la fonction de Lyapunov [2.69].

Ce système est :

$$\begin{cases} \dot{x} = x\,y \\ \dot{y} = -y + u \end{cases} \qquad [2.151]$$

Il peut être vu comme le système :

$$\dot{x} = x\,u_x \qquad [2.152]$$

étendu en lui ajoutant le dérivateur :

$$\begin{cases} \dot{y} = -y + u \\ u_x = y \end{cases} \qquad [2.153]$$

Précisément, pour construire le système complet [2.151] à partir du système réduit [2.152], nous avons besoin de dériver la commande de ce dernier.

Le système réduit [2.152] étant monodimensionnel, nous prenons simplement :

$$V_x(x) = \tfrac{1}{2}\,x^2 \qquad [2.154]$$

comme fonction de Lyapunov strictement assignable point par point. Nous obtenons :

$$\widehat{\dot{V}(x)} = x^2\,u_x \qquad [2.155]$$

Il s'en suit que, par exemple :

$$u_x = \phi_x(x) = -x^2 \qquad [2.156]$$

donne une loi de commande de classe C^1 stabilisant asymptotiquement globalement son origine.

Pour revenir maintenant au système complet [2.151], nous appliquons le théorème 2.11. La formule [2.149] nous donne en effet une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point. Par exemple, en prenant :

$$\ell(v) = v \qquad [2.157]$$

$$\psi(x,y) = y - \phi_x(x) = y + x^2 \qquad [2.158]$$

dans cette formule, nous obtenons la fonction de Lyapunov :

$$V_y(x,y) = \ell(V_x(x)) + \int_{\phi_x(x)}^{y} \psi(x,s)\,\mathrm{d}s \tag{2.159}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{2}\,(y + x^2)^2 \tag{2.160}$$

C'est exactement l'expression [2.69]. De plus, puisque nous avons :

$$\frac{|\psi(x,y)|}{|y - \phi_x(x)|} = 1 \tag{2.161}$$

cette fonction V_y est aussi localement continûment strictement assignable.

REMARQUE 2.17.– De la fonction de Lyapunov strictement assignable point par point V_y, une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement l'origine est donnée par la fonction ϕ_S ou la fonction ϕ_F ou la commande gradient du théorème 2.8. Mais nous pouvons aussi appliquer une synthèse par annulation ou domination.

REMARQUE 2.18.– L'existence d'une fonction ψ satisfaisant la condition C2 est garantie si la fonction ϕ_x est Hölder continue (voir [COR 91]). En fait, dans la plupart des cas, la fonction ϕ_x est de classe C^1. Alors le choix le plus simple[4] pour ψ est :

$$\psi(x,y) = y - \phi_x(x) \tag{2.162}$$

En prenant la fonction ℓ comme la fonction identité, la formule [2.149] donne l'expression plus commune (voir [TSI 89]) :

$$V_y(x,y) = V_x(x) + \tfrac{1}{2}\,(y - \phi_x(x))^2 \tag{2.163}$$

REMARQUE 2.19.– La fonction de Lyapunov [2.163] est obtenue dans [KOT 89] par un autre moyen connu aujourd'hui sous le nom de *backstepping*. Il a été extensivement développé dans [KRS 95, KRS 98a] en le combinant avec d'autres techniques pour obtenir un très vaste répertoire de procédures. Il consiste en l'introduction d'une nouvelle coordonnée (voir [KOT 89]), dite variable d'écart :

$$\mathfrak{y} = y - \phi_x(x) \tag{2.164}$$

Avec cette coordonnée, la dynamique du système [2.138] s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \mathfrak{y} + \phi_x(x)) \\ \dot{\mathfrak{y}} = \mathfrak{h}(x, \mathfrak{y}) + u \end{cases} \tag{2.165}$$

4. D'un point de vue mathématique, peut-être pas pratique !

avec maintenant :

$$\mathfrak{h}(x, \mathfrak{y}) = h(x, \mathfrak{y} + \phi_x(x)) + \frac{\partial \phi_x}{\partial x}(x) f(x, \mathfrak{y} + \phi_x(x)) \quad [2.166]$$

Une propriété importante du sous-système en x de [2.165], mise en évidence dans [KOT 89], est que nous avons :

$$\dot{\widehat{V(x)}} = \frac{\partial V_x}{\partial x}(x)\, f(x, \mathfrak{y} + \phi_x(x)) = -W_x(x) + \omega^T \mathfrak{y} \quad [2.167]$$

avec W_x définie positive et :

$$\omega = \frac{\partial V_x}{\partial x}(x) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, s\mathfrak{y} + \phi_x(x))\, \mathrm{d}s \quad [2.168]$$

Le sous-système en x est donc strictement passif avec $\mathfrak{y}$ comme entrée et ω comme sortie. La synthèse d'une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement l'origine du système [2.165] peut alors être vue comme le fait de rendre, grâce à la commande u, le sous-système en $\mathfrak{y}$ strictement passif avec $-\omega$ comme entrée et $\mathfrak{y}$ comme sortie. Pour ce faire, nous pouvons suivre une synthèse d'annulation pour obtenir :

$$u = -\mathfrak{y} - \mathfrak{h}(x, \mathfrak{y}) - \omega \quad [2.169]$$

REMARQUE 2.20.– Après avoir déduit de V_y une loi de commande ϕ_y stabilisant asymptotiquement globalement l'origine du système [2.138], nous sommes avec ce système dans exactement la même situation que celle dans laquelle nous étions avec le système [2.139]. Ceci signifie que nous sommes prêts pour continuer avec une nouvelle extension et considérer le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = h(x, y) + z \\ \dot{z} = k(x, y, z) + u \end{cases} \quad [2.170]$$

Ainsi, la procédure que nous avons introduite pour traiter l'ajout de dérivateurs et le *backstepping* en particulier montre tout son intérêt. Elle nous permet de résoudre par récurrence (voir l'exemple 2.14) le problème de synthèse de Lyapunov pour des systèmes sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)\, x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) + g_n(x_1, \ldots, x_n)\, u \end{cases} \quad [2.171]$$

où les fonctions g_i ont un signe constant. Cette forme est appelée forme *feedback*. Elle est obtenue en ajoutant de façon récursive un dérivateur de la coordonnée qui peut être utilisée comme commande pour le système précédemment obtenu.

REMARQUE 2.21.– Bien que, dans la formule [2.149] pour la fonction de Lyapunov strictement assignable point par point, nous ayons déjà des degrés de liberté avec les fonctions ℓ et ψ (comme l'illustrent les exemples ci-dessous), une formule encore plus générale peut être donnée. En effet, nous savons, avec le théorème 2.2, qu'il existe toujours une fonction $\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est de classe C^1 et définie positive telle que toute fonction de valeur en x dans l'intervalle $[\phi_x(x) - \delta(x), \phi_x(x) + \delta(x)]$ donne encore une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement l'origine du système [2.139]. Il s'en suit que, au lieu de [2.146], nous pouvons prendre :

$$\psi(x, y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \in [\phi_x(x) - \delta(x), \phi_x(x) + \delta(x)] \qquad [2.172]$$

Par exemple, dans le cas où ϕ_x est de classe C^1, ceci conduit à la fonction de Lyapunov de classe C^1 strictement assignable point par point et localement continûment :

$$V_y(x, y) = \ell(V_x(x)) + \tfrac{1}{2} \max\{|y - \phi_x(x)| - \delta(x),\ 0\}^2 \qquad [2.173]$$

Cette fonction de Lyapunov est plate selon les y autour du point $\phi_x(x)$. Cette propriété a été mise en évidence et exploitée dans [FRE 93a]. Elle est utile pour résoudre des problèmes où le gradient de la commande joue un rôle comme dans les cas où il y a un bruit de mesure de l'état, un retard dans la commande, ou encore lorsqu'il y a une contrainte sur la vitesse de la commande (voir [FRE 93b, FRE 98]).

REMARQUE 2.22.– Nous avons mentionné que la version *backstepping* de l'ajout de dérivateur exploite une propriété de passivité. En fait, il existe aussi une version liée à la stabilité SEE et au théorème des petits gains. Elle est proposée dans [SON 90] et exploitée par exemple dans [ARC 99] : pour le système [2.138], soit V_x une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point et ϕ_x une fonction de classe C^1 qui l'assigne de sorte que la fonction :

$$W(x) = -\frac{\partial V_x}{\partial x}(x) f(x, \phi_x(x)) \qquad [2.174]$$

est définie positive et propre. Il est montré dans [SON 90] (voir aussi la remarque 2.12), qu'à partir de ces données, nous pouvons obtenir une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ strictement positive et de classe C^1 telle que, en posant (comparer avec [2.164]) :

$$\mathfrak{y} = \frac{y - \phi_x(x)}{\varphi(x)} \qquad [2.175]$$

la dynamique du système [2.138] s'écrive sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \varphi(x)\mathfrak{y} + \phi_x(x)) \\ \dot{\mathfrak{y}} = \mathfrak{h}(x, \mathfrak{y}) + \frac{1}{\varphi(x)} u \end{cases} \qquad [2.176]$$

où le sous-système en x est SEE avec η comme entrée. Alors, à l'aide du théorème 2.5, nous pouvons déduire la stabilité asymptotique globale de l'origine pour le système [2.165] si la commande est choisie pour rendre le sous-système en η indépendant de x et faire de son origine un point globalement asymptotiquement stable. Une telle commande est par exemple :

$$u = -\varphi(x)\,\mathrm{sign}(\eta)\,k(\eta) + h(x,\eta) \qquad [2.177]$$

où k est une fonction définie positive continue quelconque.

2.4.2. *Illustration de la technique d'ajout de dérivateur par des exemples*

Dans ce paragraphe, nous illustrons certaines des potentialités de la synthèse de Lyapunov déduite de la technique d'ajout de dérivateur.

EXEMPLE 2.8 (EN PRÉSENCE DE SINGULARITÉS (VOIR [LI 97])).– Pour le système :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \theta + \omega \\ \dot{\omega} = \omega + (1-\omega)\,u \end{cases} \qquad [2.178]$$

il est possible de montrer que l'ensemble $\{(\theta,\omega) : \theta \leq -1 \text{ ou } \omega \geq 1\}$ est invariant quelle que soit la commande u. L'origine ne peut donc être globalement asymptotiquement stabilisée. Construisons alors une loi de commande faisant du complément de cet ensemble le domaine d'attraction de l'origine.

Ce complément est difféomorphe à $\mathbb{R}^2$ comme le montre le changement de coordonnées (avec singularité) suivant :

$$\begin{cases} x = \log(1+\theta) \\ y = -\log(1-\omega) \end{cases} \qquad [2.179]$$

C'est une bijection de l'ensemble $\{(\theta,\omega) : \theta > -1 \text{ et } \omega < 1\}$ avec $\mathbb{R}^2$. Avec ces nouvelles coordonnées, la dynamique du système [2.178] s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\exp(x+y)-1}{\exp(x+y)} \\ \dot{y} = [\exp(y)-1] + u \end{cases} \qquad [2.180]$$

Ce système est fait du système :

$$\dot{x} = \frac{\exp(x+u_x)-1}{\exp(x+u_x)} \qquad [2.181]$$

qui est étendu par l'ajout du dérivateur :

$$\begin{cases} \dot{y} = [\exp(y) - 1] + u \\ u_x = y \end{cases} \qquad [2.182]$$

Cette vision du système complet nous incite à synthétiser la loi de commande en deux étapes.

Etape 1. Nous considérons le système [2.181]. Nous vérifions que :

$$u_x = -2\,x \qquad [2.183]$$

est une loi de commande assignant globalement (dans les nouvelles coordonnées) la fonction de Lyapunov :

$$V_x(x) = \tfrac{1}{2}\,x^2 \qquad [2.184]$$

Etape 2. Nous considérons le système [2.180]. La formule [2.163] nous donne :

$$V_y(x, y) = V_x(x) + \tfrac{1}{2}\,(y + 2x)^2 = \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{2}\,(y + 2x)^2 \qquad [2.185]$$

comme fonction de Lyapunov strictement assignable point par point. En effet, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V}_y &= x\,\frac{\exp(x+y) - 1}{\exp(x+y)} \\ &\quad + (y + 2x)\left([\exp(y) - 1] + u + 2\frac{\exp(x+y) - 1}{\exp(x+y)}\right) \qquad [2.186] \\ &= x\,(1 - \exp(x)) \\ &\quad + (y + 2x)\left(x\,\exp(-(x+y))\,\frac{\exp(y+2x) - 1}{y + 2x}[\exp(y) - 1]\right. \\ &\qquad\qquad \left. + u + 2\frac{\exp(x+y) - 1}{\exp(x+y)}\right) \qquad [2.187] \end{aligned}$$

Alors, une synthèse d'annulation donne la loi de commande :

$$\begin{aligned} u = -\Bigg(& x\,\exp(-(x+y))\,\frac{\exp(y+2x) - 1}{y + 2x} \\ & + [\exp(y) - 1] + 2\frac{\exp(x+y) - 1}{\exp(x+y)}\Bigg) - (y + 2x) \qquad [2.188] \end{aligned}$$

En résumé, les points importants de cet exemple sont :

– le changement de coordonnées avec singularité qui transforme le bassin d'attraction désiré en l'espace euclidien tout entier. Nous verrons dans l'exemple 2.13 qu'une autre façon de réaliser un tel objectif est d'utiliser une fonction de Lyapunov singulière ;

– la synthèse de la loi de commande qui est faite en deux étapes. Celles-ci suivent la structure en forme de *feedback* du système à commander ;

– l'utilisation de la formule [2.163] qui permet de construire une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point lorsqu'un dérivateur est ajouté.

EXEMPLE 2.9 (EN PRÉSENCE DE LIMITATIONS DE LA COMMANDE [FRE 98]).– Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \end{cases} \qquad [2.189]$$

Nous cherchons une fonction ϕ_y de classe C^1, qui donne une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement l'origine et satisfait :

– un effet zone morte avec :

$$\frac{\partial \phi_y}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \phi_y}{\partial y}(0,0) = 0 \qquad [2.190]$$

– une limitation :

$$|\phi_y(x,y)| \leq 5 \qquad [2.191]$$

Pour résoudre ce problème de stabilisation sous contrainte sur la commande, nous procédons récursivement. Nous commençons par étudier le problème de stabilisation, sous les mêmes contraintes, pour le système réduit :

$$\dot{x} = u_x \qquad [2.192]$$

Nous traitons ensuite le système complet.

Etape 1. Nous considérons le système [2.192]. Pour satisfaire la contrainte de zone morte, il est suffisant de prendre la fonction $\phi_x(x)$ d'ordre strictement plus grand que 1 au voisinage de l'origine. Pour satisfaire la contrainte de limitation, il est suffisant de prendre la fonction $\phi_x(x)$ bornée. Ces considérations nous conduisent au choix :

$$\phi_x(x) = -\tfrac{1}{2}\,\frac{x^3}{(1+|x|^3)} \qquad [2.193]$$

Comme fonction de Lyapunov V_x, nous prenons simplement :

$$V_x(x) = \tfrac{1}{2}\,x^2 \qquad [2.194]$$

Etape 2. Nous considérons le système complet et utilisons la formule [2.149] avec :

$$\ell(v) = \tfrac{8}{9}\,\frac{v^{\frac{3}{2}}}{1+2v} \qquad [2.195]$$

$$\psi(x,y) = (y - \phi_x(x)) + (y|y| - \phi_x(x)|\phi_x(x)|) \qquad [2.196]$$

Ces choix non triviaux résultent en fait d'une analyse précise des termes qui apparaissent dans l'équation [2.198] ci-dessous. Ils conduisent à la fonction de Lyapunov strictement assignable point par point et localement continûment :

$$V_y(x,y) = \ell(V_x(x)) + \int_{\phi_x(x)}^{y} (s - \phi_x(x)) + (s|s| - \phi_x(x)|\phi_x(x)|)\, ds \quad [2.197]$$

Sa dérivée est :

$$\begin{aligned}\widehat{V_y(x,y)} &= \ell'(V_x(x))x\,\phi_x(x) \\ &+ [y - \phi_x(x)]\left[\ell'(V_x(x))x + \left(1 + \frac{\frac{\partial V_y}{\partial y}(x,y)}{y - \phi_x(x)}\right)u - (1 + 2|\phi_x(x)|)\,\phi_x'(x)\,y\right]\end{aligned} \quad [2.198]$$

où nous avons :

$$\frac{\frac{\partial V_y}{\partial y}(x,y)}{y - \phi_x(x)} = \begin{cases} |\phi_x(x)| + |y| & \text{si } \phi_x(x)\,y > 0 \\ \dfrac{\phi_x(x)^2 + y^2}{|\phi_x(x)| + |y|} & \text{si } \phi_x(x)\,y \le 0 \end{cases} \quad [2.199]$$

Une synthèse d'annulation donne la loi de commande :

$$\phi_y(x,y) = \frac{(1 + 2|\phi_x(x)|)\,\phi_x'(x)\,y - \ell'(V_x(x))x}{1 + \frac{\frac{\partial V_y}{\partial y}(x,y)}{y - \phi_x(x)}} - \mathrm{sat}(y - \phi_x(x))^3 \quad [2.200]$$

où sat est la fonction de saturation standard :

$$\mathrm{sat}(s) = \max\{-1,\ \min\{1, s\}\} \quad [2.201]$$

Nous pouvons vérifier que, avec les choix faits pour les fonctions ϕ_x, ℓ et ψ, la fonction ϕ_y répond aux spécifications données.

En résumé, le point important de cet exemple est dans les expressions très spécifiques [2.195] et [2.196] que nous avons choisies pour les fonctions ℓ et ψ impliquées dans la formule [2.149]. Aussi nous avons résolu le problème en deux étapes, en imposant les contraintes à chacune d'elles. Ceci peut être ni le seul ni le meilleur moyen de procéder. Par exemple, il est suffisant de prendre la fonction $|\phi_x(x)|$ non pas bornée mais avec une croissance de l'ordre de celle de $\sqrt{|x|}$ (et $\ell(v)$ comme $v^{\frac{1}{2}}$) lorsque $|x|$ devient grand. Pour le système réduit, ceci résulte d'une limitation sur la vitesse de la commande, c'est-à-dire la fonction $|\phi_x|$ est non bornée, mais la dérivée $\widehat{\phi_x}$ l'est.

EXEMPLE 2.10 (LORSQUE ϕ_x N'EST PAS DE CLASSE C^1 (VOIR [COR 91])).– Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^3 \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad [2.202]$$

L'approximation au premier ordre à l'origine de ce système n'est pas stabilisable. Il n'existe donc pas de fonction de classe C^1 donnant une loi de commande stabilisant asymptotiquement l'origine. Pour obtenir une fonction de classe C^0, nous procédons en deux étapes.

Etape 1. Considérons le système :

$$\dot{x} = x - u_x^3 \qquad [2.203]$$

La fonction :

$$V_x(x) = \frac{1}{2}\, x^2 \qquad [2.204]$$

est une fonction de Lyapunov qui est strictement assignée par la fonction de classe C^0 mais non de classe C^1 :

$$\phi_x(x) = (2x)^{1/3} \qquad [2.205]$$

Etape 2. Nous considérons le système complet [2.202]. Pour nous aider dans notre choix d'une fonction ψ appropriée pour la formule [2.149], nous remarquons que $\phi_x(x)$ est une solution de l'équation polynômiale :

$$\phi_x^3 - 2x = 0 \qquad [2.206]$$

Ainsi la fonction ψ sera de classe C^1 si nous la choisissons comme :

$$\psi(x,y) = y^3 - 2\,x \qquad [2.207]$$

Mais alors, la condition [2.150] n'est pas satisfaite. Néanmoins, dans ce cas très particulier, nous pouvons tout de même obtenir une fonction de Lyapunov localement continûment strictement assignable grâce à un choix approprié de la fonction ℓ (voir [COR 91]). Par des arguments d'homogénéité (voir [HER 91]), nous arrivons au choix (voir [PRA 91]) :

$$\ell(v) = 9\,(2v)^{2/3} \qquad [2.208]$$

Ceci nous conduit à :

$$V_y(x,y) = \frac{1}{4}\, y^4 - 2\,x\,y + \frac{3(1+3\,2^{2/3})}{4}(2x)^{4/3} \qquad [2.209]$$

comme fonction de Lyapunov strictement assignable point par point au système [2.202]. Avec cette fonction, une synthèse de domination donne la loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement l'origine :

$$\phi_y(x,y) = (7\,y - 18\,x^{1/3})^{1/3} \qquad [2.210]$$

En résumé, le point important de cet exemple est constitué par les expressions [2.208] et [2.207] des fonctions ℓ et ψ utilisées dans la formule [2.149].

Dans le cas des systèmes avec plusieurs commandes, il est plus judicieux de les prendre en compte l'une après l'autre.

EXEMPLE 2.11 (SYSTÈMES MULTICOMMANDES (VOIR [SCHW 99])).– Considérons le système avec deux commandes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_1 \\ \dot{x}_3 = u_2 \\ \dot{x}_4 = x_3\,(1 - u_1) \end{cases} \qquad [2.211]$$

Pour obtenir une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement l'origine, nous procédons en trois étapes[5].

Etape 1. Nous considérons le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_1 \end{cases} \qquad [2.212]$$

Une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point possible est :

$$V_1(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + (x_1 + x_2)^2) \qquad [2.213]$$

Elle est strictement assignée par :

$$u_1 = \phi_1(x_1, x_2) = -2(x_1 + x_2) \qquad [2.214]$$

Etape 2. Nous considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2(x_1 + x_2) \\ \dot{x}_4 = v[1 + 2(x_1 + x_2)] \end{cases} \qquad [2.215]$$

avec v comme commande. Vu sa structure et après la première étape, nous pouvons proposer la fonction de Lyapunov :

$$V_2(x_1, x_2, x_4) = V_1(x_1, x_2) + \tfrac{1}{2}\,x_4^2 \qquad [2.216]$$

$$= \tfrac{1}{2}(x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_4^2) \qquad [2.217]$$

5. En fait, une voie plus directe est possible après avoir remplacé la coordonnée x_4 par $y_4 = x_4 + x_2\,x_3$.

Sa dérivée est :

$$\widehat{\dot{V_2}(x_1, x_2, x_4)} = -x_1^2 - (x_1 + x_2)^2 + x_4 \left[1 + 2(x_1 + x_2)\right] v \qquad [2.218]$$

Elle est donc strictement assignée par :

$$v = \phi_2(x_1, x_2, x_4) = -x_4[1 + 2(x_1 + x_2)] \qquad [2.219]$$

Etape 3. Nous considérons le système complet [2.211]. Il est déduit du système [2.215] en ajoutant le dérivateur :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = u_2 \\ v = x_3 \end{cases} \qquad [2.220]$$

Avec les choix :

$$\ell(v) = v \qquad [2.221]$$

$$\psi(x_1, x_2, x_4, s) = s - \phi_2(x_1, x_2, x_4) \qquad [2.222]$$

la formule [2.149] donne la fonction de Lyapunov strictement assignable point par point :

$$\begin{aligned} V_3(x_1, x_2, x_4, x_3) &= V_2(x_1, x_2, x_4) + \tfrac{1}{2}(x_3 + x_4[1 + 2(x_1 + x_2)])^2 && [2.223] \\ &= \tfrac{1}{2}(x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_4^2 + (x_3 + x_4[1 + 2(x_1 + x_2)])^2) && [2.224] \end{aligned}$$

Une synthèse d'annulation par exemple conduit à la loi de commande :

$$\begin{aligned} u_2 &= \phi_3(x_1, x_2, x_4, x_3) && [2.225] \\ &= -(x_4 + x_3[1 + 2(x_1 + x_2)]^2 + 2\,x_4[x_2 - 2(x_1 + x_2)]) \\ &\quad - (x_3 + x_4[1 + 2(x_1 + x_2)]) \end{aligned}$$

En résumé, le point important de cet exemple est sa décomposition en trois étapes :

1) dans l'étape 1, nous étudions le sous-système en (x_1, x_2). Nous en déduisons une loi de commande pour u_1 ;

2) dans l'étape 2, nous étudions le sous-système en (x_1, x_2, x_4) avec x_3 comme commande. Ceci est rendu possible par le fait d'avoir choisi u_1 comme fonction de (x_1, x_2) ;

3) dans l'étape 3, nous obtenons le système complet après avoir ajouté un dérivateur.

EXEMPLE 2.12 (PLACEMENT DE PÔLES (VOIR [EZA 00])).– Considérons un système linéaire écrit sous la forme canonique commandable de Brunovsky, sous la forme d'une chaîne de dérivateurs :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = u \end{cases} \qquad [2.226]$$

ou de façon plus compacte :

$$\dot{x} = \mathcal{A}\, x + \mathcal{B}\, u \qquad [2.227]$$

Avec cette notation, soit :

$$u = -\mathcal{K}\, x \qquad [2.228]$$

une loi de commande linéaire stabilisant asymptotiquement l'origine. Soit aussi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ des matrices définies positives reliées par l'équation de Lyapunov :

$$(\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K})^T \mathcal{P} + \mathcal{P}\,(\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K}) = \overset{\text{minus}}{\mathcal{Q}} \qquad [2.229]$$

Nous voulons montrer que la même loi de commande peut être obtenue en appliquant la technique d'ajout de dérivateur : la fonction de Lyapunov strictement assignable ainsi construite et sa dérivée sont données par les formes quadratiques associées aux matrices $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ respectivement.

Pour réaliser cet objectif, nous réécrivons le système [2.226] avec des coordonnées appropriées. Nous considérons la factorisation de Choleski de $\mathcal{Q}$ avec une matrice $\mathcal{L}$ triangulaire inférieure ayant des 1 sur la diagonale :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{L}^T \mathrm{diag}(q_i)\, \mathcal{L} \qquad [2.230]$$

Dénotons :

$$B := \mathcal{L}\,\mathcal{B} = \mathcal{B} \qquad A := \mathcal{L}\,\mathcal{A}\,\mathcal{L}^{-1} \qquad [2.231]$$

La matrice A peut être décomposée comme :

$$A = \begin{pmatrix} \star & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \star & \star & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \star & \dots & \dots & \star & 1 & 0 \\ \star & \dots & \dots & \dots & \star & 1 \\ \star & \dots & \dots & \dots & \dots & \star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A} & b \\ a^T & c \end{pmatrix} \qquad [2.232]$$

avec la matrice $\overline{A}$ de dimension $(n-1) \times (n-1)$ et ayant la même structure que A. Introduisons alors les notations :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{L}\,\mathcal{x} \qquad P = \mathcal{L}^{-T}\mathcal{P}\,\mathcal{L}^{-1} \qquad \begin{pmatrix} \alpha^T & \gamma \end{pmatrix} = K^T = \mathcal{K}^T\,\mathcal{L}^{-1} \quad [2.233]$$

et, comme pour A, décomposons les matrices P et $\mathrm{diag}(q_i)$ en blocs :

$$P = \begin{pmatrix} \overline{P} + \pi p p^T & \pi p \\ \pi p^T & \pi \end{pmatrix} \qquad \mathrm{diag}(q_i) = \mathrm{diag}(\overline{Q}, q_n) \quad [2.234]$$

Avec ces notations, nous observons que, puisque P est définie positive, il en va de même pour $\overline{P}$. Aussi [2.229] donne les trois équations suivantes :

$$\overline{P}(\overline{A} - bp^T) + (\overline{A} - bp^T)^T\overline{P} = -\overline{Q} - q_n p p^T \quad [2.235]$$

$$\frac{1}{\pi}\,\overline{P}\,b + a + \overline{A}^T p = \alpha + \frac{q_n}{2\pi}\,p \quad [2.236]$$

$$p^T b + c = \gamma - \frac{q_n}{2\pi} \quad [2.237]$$

Enfin, nous pouvons réécrire le système [2.226] comme :

$$\begin{cases} \dot{x} = \overline{A}\,x + b\,y \\ \dot{y} = a^T\,x + c\,y + u \end{cases} \quad [2.238]$$

En prenant :

$$V_x(x) = \tfrac{1}{2}\,x^T\overline{P}\,x \qquad \phi_x(x) = -p^T x \quad [2.239]$$

nous obtenons une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point et une loi de commande associée pour le sous-système en x de [2.238]. En particulier, de [2.235], nous déduisons :

$$\dot{\widehat{V_x(x)}} = -\tfrac{1}{2}\,x^T\overline{Q}\,x - \tfrac{q_n}{2}\,(p^T x)^2 \quad [2.240]$$

Maintenant, pour le système complet [2.238], la formule [2.149] donne la fonction de Lyapunov strictement assignable point par point :

$$\begin{aligned} V_y(x,y) &= V_x(x) + \tfrac{\pi}{2}\,(y - \phi_x(x))^2 && [2.241] \\ &= \tfrac{1}{2}\,x^T\overline{P}\,x + \tfrac{\pi}{2}\,(y + p^T x)^2 && [2.242] \\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathcal{x}^T\mathcal{P}\,\mathcal{x} && [2.243] \end{aligned}$$

Sa dérivée est :

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{V_y(x,y)}} &= x^T\overline{P}(\overline{A}x + by) \\ &\quad + \pi\,(y + p^T x)\,(a^T x + cy + u + p^T[\overline{A}x + by]) \end{aligned} \quad [2.244]$$

$$= -\tfrac{1}{2}\, x^T(\overline{Q} + q_n pp^T)\, x$$
$$+ \pi\,(y + p^T x)\left(\frac{x^T\overline{P}b}{\pi} + a^T x + cy + u + p^T[\overline{A}x + by]\right) \qquad [2.245]$$

Ainsi le changement de commande :

$$u = -\left(\frac{x^T\overline{P}b}{\pi} + a^T x + cy + p^T[\overline{A}x + by]\right) + v \qquad [2.246]$$

donne :

$$\widehat{\dot{V_y}(x,y)} = -\tfrac{1}{2}\, x^T\overline{Q}\, x - \tfrac{q_n}{2}\,(p^T x)^2 + \pi\,(y + p^T x)\, v \qquad [2.247]$$

Il s'en suit que, en prenant :

$$v = -\tfrac{q_n}{2\pi}\,(y - p^T x) \qquad [2.248]$$

nous obtenons :

$$\widehat{\dot{V_y}(x,y)} = -\tfrac{1}{2}\, x^T\overline{Q}\, x - \tfrac{q_n}{2}\, y^2 \qquad [2.249]$$
$$= -\tfrac{1}{2}\, x^T Q\, x \qquad [2.250]$$

Enfin, avec [2.246] et [2.248] et en utilisant [2.236], [2.237] et [2.233], nous voyons que la loi de commande est :

$$u = -\left(x^T\left[\frac{1}{\pi}\,\overline{P}\,b + a + \overline{A}^T p\right] + [p^T b + c]y\right) - \tfrac{q_n}{2\pi}\,(y - p^T x) \qquad [2.251]$$
$$= -x^T\alpha - \gamma\, y \qquad [2.252]$$
$$= -\mathcal{K}\, x \qquad [2.253]$$

Ainsi, la synthèse de Lyapunov nous a-t-elle permis d'atteindre la loi de commande mais aussi la fonction de Lyapunov et sa dérivée données.

En résumé, les points importants de cet exemple sont :

1) le choix des coordonnées qui rendent la matrice Q diagonale tout en préservant la structure triangulaire de la matrice A ;

2) la décomposition de la matrice P comme [2.234] et les trois relations [2.235] à [2.237] qui en résultent ;

3) les choix des fonctions V_x et ϕ_x dans [2.239].

En fait, nous n'avons effectué que la dernière étape de la procédure d'ajout de dérivateurs, mais la forme récursive de la matrice A nous permet de conclure que nous aurions obtenu le même résultat en suivant la même voie pour chaque composante de l'état récursivement l'une après l'autre.

Ce fait doit être mis en relation avec la remarque suivante. Pour un système général sous forme *feedback*, les termes d'ordre strictement plus grand que 1 à l'origine ne contribuent pas dans l'approximation au premier ordre de la loi de commande obtenue à la fin de l'application récursive de la technique d'ajout de dérivateurs avec une synthèse d'annulation.

Il en résulte que la technique d'ajout de dérivateurs nous permet d'obtenir des lois de commande ayant, localement autour de l'origine, des propriétés imposées à l'avance. Cette particularité a été mise en évidence et exploitée dans [EZA 00] (et généralisée dans [PAN 01]) pour obtenir des lois de commande ayant des propriétés locales imposées par une synthèse H_∞.

Nous terminons ce paragraphe en présentant un exemple où les diverses potentialités que nous avons mentionnées sont mises à profit. Il est directement inspiré d'une solution, présentée dans [KRS 98b], d'un problème de stabilisation asymptotique globale pour un modèle de compresseurs exhibant des phénomènes de décrochage et de pompage. Il montre comment, face à des problèmes pratiques, il est nécessaire de combiner diverses techniques.

EXEMPLE 2.13 (COMBINAISON DE TECHNIQUES (VOIR [KRS 98b])).– Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_1+1)(x_1+x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2 f(x_2) + x_1 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \qquad [2.254]$$

où f est une fonction continue inconnue minorée par un réel F connu :

$$F \leq \inf_s f(s) \qquad [2.255]$$

Nous cherchons une loi de commande linéaire en (x_1, x_2, x_3) rendant l'origine asymptotiquement stable avec pour bassin d'attraction :

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > -1\} \qquad [2.256]$$

Nous observons que le système [2.254] est fait du système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_1+1)(x_1+x_2^2) \\ \dot{x}_2 = u_1 - x_2 f(x_2) + x_1 \end{cases} \qquad [2.257]$$

auquel est ajouté le dérivateur :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = u \\ u_1 = x_3 \end{cases} \qquad [2.258]$$

Nous construisons donc la loi de commande en deux étapes.

Etape 1. Nous considérons le système [2.257]. Puisque nous limitons notre attention à l'ensemble Ω, nous choisissons pour le sous-système en x_1 une fonction de Lyapunov de classe C^2 définie seulement sur cet ouvert :

$$V_1(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{s}{s+1}\, \mathrm{d}s = x_1 - \log(x_1 + 1) \qquad [2.259]$$

L'intérêt de ce choix vient de l'implication :

$$V_1(x_1) \leq c \qquad \Longrightarrow \qquad -1 < x_1 \qquad [2.260]$$

satisfaite pour tout réel non négatif c. Nous obtenons la dérivée :

$$\widehat{V_1(x_1)}^{\cdot} = -x_1^2 - x_1\, x_2^2 \qquad [2.261]$$

$$\leq -x_1^2 + x_2^2 \qquad \forall x_1 > -1 \qquad [2.262]$$

Soit alors V une fonction de Lyapunov de classe C^2 que nous spécifierons plus tard de façon à préserver un degré de liberté dans la seconde étape. Nous définissons :

$$V_2(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V(x_2) \qquad [2.263]$$

Pour tout $x_1 > -1$, nous obtenons les majorations suivantes pour la dérivée de V_2 :

$$\widehat{V_2(x_1, x_2)}^{\cdot} = -V_1'(x_1)\,(x_1 + 1)\,(x_1 + x_2^2) + V'(x_2)\,[u_1 - x_2 f(x_2) + x_1] \qquad [2.264]$$

$$\leq -x_1^2 + x_2^2 - V'(x_2)\, x_2\, f(x_2) + V'(x_2)[u_1 + x_1] \qquad [2.265]$$

$$\leq -\tfrac{1}{2}\, x_1^2 + V'(x_2)\left[-x_2 f(x_2) + \frac{x_2^2}{V'(x_2)} + u_1 + V'(x_2)\right] \qquad [2.266]$$

Ainsi nous voyons que, si nous imposons à V de satisfaire la contrainte [6] :

$$(k-1) + f(x_2) \geq \frac{x_2}{V'(x_2)} + \frac{V'(x_2)}{x_2} \qquad [2.267]$$

6. Puisque V est une fonction de Lyapunov, nous devons avoir :

$$V'(x_2)\, x_2 > 0 \qquad \forall x_2 \neq 0$$

La contrainte [2.267] est donc satisfaite par exemple par :

$$V(x_2) = \tfrac{1}{2}\, x_2^2 \qquad k \geq 3 - F$$

pour un réel k quelconque, et que nous choisissons la commande comme :

$$u_1 = \phi_2(x_1, x_2) = -k\, x_2 \qquad [2.268]$$

la dérivée de V_2 satisfait, pour tout $x_1 > -1$:

$$\widehat{V_2(x_1, x_2)}^{\boldsymbol{\cdot}} \leq -\tfrac{1}{2}\, x_1^2 - V'(x_2)\, x_2 \qquad [2.269]$$

Ceci montre que ϕ_2 donne une loi de commande stabilisant asymptotiquement avec pour domaine d'attraction l'ensemble $\{(x_1, x_2) \mid x_1 > -1\}$.

Etape 2. Nous considérons le système complet [2.254]. Nous appliquons la formule [2.149] avec :

$$\ell(v) = v \qquad [2.270]$$

$$\psi((x_1, x_2), x_3) = a(x_3 + kx_2) \qquad [2.271]$$

où a est un nombre réel strictement positif à préciser plus tard. Ceci nous donne la fonction de Lyapunov strictement assignable point par point :

$$V_3(x_1, x_2, x_3) = V_1(x_1) + V(x_2) + \tfrac{a}{2}\,(x_3 + kx_2)^2 \qquad [2.272]$$

Pour tout $x_1 > -1$, sa dérivée satisfait :

$$\begin{aligned}
\widehat{V_3(x_1, x_2, x_3)}^{\boldsymbol{\cdot}} &= -V_1'(x_1)\,(x_1 + 1)\,(x_1 + x_2^2) + V'(x_2)\,[u_1 - x_2 f(x_2) + x_1] \\
&\qquad + a\,(x_3 + kx_2)[u + k(x_3 - x_2 f(x_2) + x_1)] \qquad [2.273] \\
&\leq -\tfrac{1}{2}\, x_1^2 - V'(x_2)\, x_2 \\
&\qquad + a\,(x_3 + kx_2)\left[\frac{V'(x_2)}{a} + u + k(x_3 - x_2 f(x_2) + x_1)\right] \qquad [2.274] \\
&\leq -\tfrac{1}{4}\, x_1^2 - V'(x_2)\, x_2 \\
&\qquad + a\,(x_3 + kx_2)\left[\frac{V'(x_2)}{a} + u + k(x_3 - x_2 f(x_2) + ak(x_3 + kx_2))\right] \\
&\qquad [2.275]
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé [2.269] pour écrire [2.274] et complété les carrés pour écrire [2.275]. Une synthèse d'annulation nous conduit à la loi de commande :

$$\begin{aligned}
u &= \phi_3(x_1, x_2, x_3) \\
&= -\left[\frac{V'(x_2)}{a} + k(x_3 - x_2 f(x_2) + ak(x_3 + kx_2))\right] - (x_3 + kx_2) \qquad [2.276]
\end{aligned}$$

Elle donne, pour tout $x_1 > -1$:

$$\widehat{V_3(x_1, x_2, x_3)}^{\boldsymbol{\cdot}} \geq -\tfrac{1}{4}\, x_1^2 - V'(x_2)\, x_2 - a\,(x_3 + kx_2)^2 \qquad [2.277]$$

Ceci établit la stabilité asymptotique de l'origine avec Ω comme bassin d'attraction.

Maintenant, pour satisfaire la contrainte de linéarité de la loi de commande et donc de u dans [2.276], nous devons avoir :

$$\frac{V'(x_2)}{a} - k\,x_2\,f(x_2) = b\,x_2 \qquad [2.278]$$

où b est un réel quelconque. En effet, dans ce cas, la loi de commande est simplement :

$$\phi_3(x_1, x_2, x_3) = -[k + (b + ak^2)]\,x_2 - [1 + k(1+a)]\,x_3 \qquad [2.279]$$

avec les trois paramètres a, b et k. D'après notre construction, cette loi est appropriée si nous pouvons trouver une fonction de Lyapunov de classe C^2 satisfaisant [2.267] et [2.278]. Mais la contrainte [2.278] impose que V s'écrive :

$$V(x_2) = \int_0^{x_2} [bs + ksf(s)]\,\mathrm{d}s \qquad [2.280]$$

Heureusement cette fonction est définie positive et propre sur Ω si le réel b satisfait :

$$b > -k\,F \qquad [2.281]$$

Avec [2.280], l'inégalité [2.267] devient :

$$(k-1) + f(x_2) \geq \frac{1}{a(b + kf(x_2))} + a(b + kf(x_2)) \qquad [2.282]$$

Nous pouvons donc conclure que le problème de stabilisation asymptotique posé est résolu si les inégalités [2.281] et [2.282] sont satisfaites. Elles le sont si nous choisissons les paramètres (a, b, k) de la loi de commande par exemple comme :

$$k \geq 2 + c \qquad a = \frac{1}{k} \qquad b = c\,k \qquad [2.283]$$

où :

$$c \geq 1 + \max\{0, -F\} \qquad [2.284]$$

En résumé et voulant ne citer qu'un point dans cet exemple, nous insistons sur l'importance, comme dans l'exemple 2.6, de ne pas choisir V *a priori* mais au contraire seulement à la fin, lorsque toutes les contraintes sont connues.

2.4.3. *Ajout de dérivateur avec perturbations*

Les inégalités telles celles présentées dans [HAR 89] constituent un autre outil à combiner avec la technique d'ajout de dérivateur pour traiter des systèmes sous forme *feedback* soumis à des perturbations. Par exemple, nous pouvons montrer que la propriété SEE peut être propagée au travers de dérivateurs (voir [JIA 94, JIA 97] et [KRS 98a, lemme 2.20]) en utilisant la version la plus simple de la formule [2.163], pour obtenir une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point. et l'inégalité suivante.

LEMME 2.2.– *Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions continues satisfaisant :*

$$F(x, 0) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.285}$$

Il existe deux fonctions continues $\delta_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ et $\delta_d : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant :

$$\delta_d(0) = 0 \tag{2.286}$$

$$|G(x)\, F(x, d)| \leq G(x)^2\, \delta_x(|x|) + \delta_d(|d|) \qquad \forall (x, d) \in \mathbb{R}^x \times \mathbb{R}^p \tag{2.287}$$

Précisément, considérons le système perturbé suivant (comparer à [2.138]) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, d_x) \\ \dot{y} = h(x, y, d_y) + g(x, y, d_y)\, u \end{cases} \tag{2.288}$$

où les fonctions f, g et h sont continues et nous avons :

$$g_u(x, y, d_y) \geq \eta(x, y) \qquad \forall (x, y, d_y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p_y} \tag{2.289}$$

avec $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{+*}$ une fonction continue. Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 2.12.– *S'il existe une fonction de Lyapunov V_x de classe C^1, une fonction a_x de classe $\mathcal{K}^\infty$, une fonction γ_x de classe $\mathcal{K}$ et une fonction ϕ_x de classe C^1 telles que nous ayons :*

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}(x)\, f(x, \phi_x(x), d_x) \leq -a_x(V_x(x)) + \gamma_x(|d_x|) \tag{2.290}$$

pour tout (x, d_x) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p_x}$, alors il existe une fonction de Lyapunov V_y de classe C^1, une fonction a_y de classe $\mathcal{K}^\infty$, une fonction γ_y de classe $\mathcal{K}$ et une fonction ϕ_y de classe C^0 telles que nous ayons :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V_y}{\partial x}(x, y)\, f(x, y, d_x) + \frac{\partial V_y}{\partial y}(x, y)\, [h(x, y, d_y) + g(x, y, d_y)\phi_y(x, y)] \\ &\qquad \leq -a_y(V_y(x, y)) + \gamma_y(|d_x| + |d_y|) \end{aligned} \tag{2.291}$$

pour tout (x, y, d_x, d_y) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{p_x} \times \mathbb{R}^{p_y}$.

REMARQUE 2.23.– Ce théorème nous dit que, si le sous-système en x peut être rendu SEE par une loi de commande de classe C^1, il peut être étendu en ajoutant un dérivateur en un système qui peut être rendu SEE par une loi de commande de classe C^0. En fait, si par chance la deuxième loi de commande est elle aussi de classe C^1, alors nous pouvons continuer le processus d'extension par ajout de dérivateur et ainsi traiter des systèmes du type :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, d_1) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, d_2) + g_2(x_1, x_2, d_2)\, x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_2(x_1, \dots, x_n, d_n) + g_n(x_1, \dots, x_n, d_n)\, u \end{cases} \qquad [2.292]$$

EXEMPLE 2.14 (PRISE EN COMPTE D'INCERTITUDES COMME UNE PERTURBATION).– Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2\, f(x_1, x_2, x_3, u, t) \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \qquad [2.293]$$

où f est une fonction continue inconnue prenant ses valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$. Nous cherchons une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement l'origine.

Puisque f dépend de x_3 et u (sans même mentionner le fait qu'elle est inconnue) nous ne sommes pas en présence d'un système sous forme *feedback* et ne pouvons donc pas appliquer de façon nominale la technique d'ajout de dérivateur. Pour cette raison, nous considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2\, d \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \qquad [2.294]$$

où d est n'importe quelle fonction dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, [-1, 1])$. Le premier intérêt de ce système est que toute solution de [2.293] est aussi solution de [2.294]. Donc si nous résolvons le problème de stabilisation asymptotique globale pour le système [2.294], nous l'aurons fait pour le système [2.293]. Le second intérêt du système [2.294] est que c'est un système sous forme *feedback* perturbée que nous pouvons considérer comme construit par l'ajout de deux dérivateurs. Nous faisons donc notre synthèse en trois étapes.

Etape 1. Nous considérons le système :

$$\dot{x}_1 = u_1 + x_1^2\, d \qquad [2.295]$$

Une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point appropriée est simplement :

$$V_1(x_1) = \tfrac{1}{2}\, x_1^2 \qquad [2.296]$$

Elle est strictement assignée, uniformément pour d dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, [-1,1])$, par la loi de commande :

$$\phi_1(x_1) = -x_1 - x_1^3 \qquad [2.297]$$

En effet, en complétant les carrés, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\overbrace{V_1(x_1)}^{\cdot} &= -x_1^2 - x_1^4 + x_1^3\, d \qquad \forall (x_1, d) \in \mathbb{R}^2 & [2.298]\\ &\leq -\tfrac{1}{2}\, x_1^2 - \tfrac{1}{2}\, x_1^4 \qquad \forall (x_1, d) \in \mathbb{R} \times [-1,1] & [2.299]\end{aligned}$$

Etape 2. Nous considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2\, d \\ \dot{x}_2 = u_2 \end{cases} \qquad [2.300]$$

La formule [2.163] donne :

$$V_2(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}\, x_1^2 + \tfrac{1}{2}\,(x_2 + x_1 + x_1^3)^2 \qquad [2.301]$$

comme fonction de Lyapunov strictement assignable point par point. En utilisant [2.299], nous pouvons vérifier que la dérivée de V_2 satisfait :

$$\overbrace{V_2(x_1, x_2)}^{\cdot} \leq -\tfrac{1}{2}\, x_1^2 - \tfrac{1}{2}\, x_1^4 + [x_2 + x_1 + x_1^3][x_1 + u_2 + (1 + 3x_1^2)(x_2 + x_1^2 d)] \quad [2.302]$$

pour tout (x_1, x_2, d) dans $\mathbb{R}^2 \times [-1,1]$. Mais, en complétant les carrés, nous obtenons :

$$(x_2 + x_1 + x_1^3)(1 + 3x_1^2)\, x_1^2\, d \leq \tfrac{1}{4}\, x_1^4 + (x_2 + x_1 + x_1^3)^2 (1 + 3x_1^2)^2 \quad [2.303]$$

pour tout (x_1, x_2, d) dans $\mathbb{R}^2 \times [-1,1]$. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}&\overbrace{V_2(x_1, x_2)}^{\cdot}\\ &\leq -\tfrac{1}{2}\, x_1^2 - \tfrac{1}{4}\, x_1^4 & [2.304]\\ &\quad + [x_2 + x_1 + x_1^3][x_1 + u_2 + [1 + 3x_1^2][x_2 + (x_2 + x_1 + x_1^3)(1 + 3x_1^2)]]\end{aligned}$$

Une synthèse d'annulation nous conduit à la loi de commande :

$$\begin{aligned}\phi_2(x_1, x_2) &= -[x_1 + [1 + 3x_1^2][x_2 + (x_2 + x_1 + x_1^3)(1 + 3x_1^2)]]\\ &\qquad - [x_2 + x_1 + x_1^3] & [2.305]\\ &= -[3x_1 + 3x_2 + 2x_1^3 + 9x_1^2 x_2 + 6x_1^3 + 15x_1^5 + 9x_1^7 + 18x_1^4 x_2] & \\ && [2.306]\end{aligned}$$

Elle donne :

$$\widehat{\dot{V_2(x_1,x_2)}} \leq -\tfrac{1}{2}\,x_1^2 - \tfrac{1}{4}\,x_1^4 - [x_2 + x_1 + x_1^3]^2 \qquad [2.307]$$
$$\forall (x_1, x_2, d) \in \mathbb{R}^2 \times [-1, 1]$$

Etape 3. Nous considérons le système complet [2.293]. La formule [2.163] donne la fonction de Lyapunov :

$$V_3(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{2}\,x_1^2 + \tfrac{1}{2}\,(x_2 + x_1 + x_1^3)^2 \qquad [2.308]$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,(x_3 + [3x_1 + 3x_2 + 2x_1^3 + 9x_1^2 x_2 + 6x_1^3 + 15x_1^5 + 9x_1^7 + 18x_1^4 x_2])^2$$

Sa dérivée vérifie, pour tout (x_1, x_2, x_3, d) dans $\mathbb{R}^3 \times [-1, 1]$:

$$\widehat{\dot{V_3(x_1,x_2,x_3)}} \leq -\tfrac{1}{2}\,x_1^2 - \tfrac{1}{4}\,x_1^4 - [x_2 + x_1 + x_1^3]^2 \qquad [2.309]$$
$$+ (x_3 + [3x_1 + 3x_2 + 2x_1^3 + 9x_1^2 x_2 + 6x_1^3 + 15x_1^5 + 9x_1^7 + 18x_1^4 x_2])$$
$$\times [[x_2 + x_1 + x_1^3] + u$$
$$+ (3 + 6x_1^2 + 18x_1 x_2 + 18x_1^2 + 75x_1^4 + 63x_1^6 + 72x_1^3 x_2)(x_2 + x_1^2 d)$$
$$+ (3 + 9x_1^2 + 18x_1^4)x_3]$$

En suivant exactement les mêmes pas que dans l'étape précédente, nous obtenons la loi de commande :

$$\phi_3(x_1, x_2, x_3) \qquad [2.310]$$
$$= -(x_2 + x_1 + x_1^3)$$
$$- (3 + 6x_1^2 + 18x_1 x_2 + 18x_1^2 + 75x_1^4 + 63x_1^6 + 72x_1^3 x_2)x_2$$
$$- (3 + 9x_1^2 + 18x_1^4)x_3$$
$$- (x_3 + [3x_1 + 3x_2 + 2x_1^3 + 9x_1^2 x_2 + 6x_1^3 + 15x_1^5 + 9x_1^7 + 18x_1^4 x_2])$$
$$- (3 + 6x_1^2 + 18x_1 x_2 + 18x_1^2 + 75x_1^4 + 63x_1^6 + 72x_1^3 x_2)^2$$

Elle donne la dérivée :

$$\widehat{\dot{V_3(x_1,x_2,x_3)}} \leq -\tfrac{1}{2}\,x_1^2 - [x_2 + x_1 + x_1^3]^2 \qquad [2.311]$$
$$- (x_3 + [3x_1 + 3x_2 + 2x_1^3 + 9x_1^2 x_2 + 6x_1^3 + 15x_1^5 + 9x_1^7 + 18x_1^4 x_2])^2$$

pour tout (x_1, x_2, x_3, d) dans $\mathbb{R}^3 \times [-1, 1]$.

En résumé, le point important de cet exemple est la combinaison de :

– l'utilisation récursive de la formule [2.163] pour, dans chaque étape, traiter l'ajout de dérivateur ;

– l'utilisation de la complétion des carrés pour traiter les termes impliquant la perturbation.

Nous avons vu dans le théorème 2.10 que, lorsqu'une condition de coïncidence est satisfaite, nous pouvons atténuer arbitrairement l'action de la perturbation sur l'état. Cette propriété, bien qu'affaiblie, est encore vraie pour les systèmes sous forme *feedback* perturbée. Précisément, nous pouvons atténuer arbitrairement l'action de la perturbation sur la première composante de l'état dans cette forme, c'est-à-dire x_1 dans [2.171].

Considérons le système perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\,(y + d_x) \\ \dot{y} = h(x, y) + u + d_y \end{cases} \qquad [2.312]$$

où les fonctions f et g sont de classe C^{k+1} et la fonction h est de classe C^k. Nous avons (voir aussi [JIA 94, JIA 97, KRS 95, KRS 98a]) le théorème suivant.

THÉORÈME 2.13 ([PRA 93]).– *Supposons l'existence d'une fonction de Lyapunov V_x de classe C^{k+2}, d'un réel λ strictement positif et d'une fonction ϕ_x de classe C^{k+1} tels que la dérivée de V_x satisfait :*

$$\widehat{V_x(x)}^{\,\cdot} = L_f V_x(x) + L_g V_x(x)\,\phi_x(x) \leq -\lambda\, V_x(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad [2.313]$$

Soit α une fonction de classe $\mathcal{K}^\infty$ satisfaisant :

$$\alpha(|x|) \leq V_x(x) \qquad [2.314]$$

Sous ces conditions, pour toute fonction non négative γ_d telle que nous pouvons trouver pour des réels $s_0 > 0$ et μ pour satisfaire[7] *:*

$$\gamma_d \circ \alpha^{-1}(s^2) \leq \mu\, s \qquad \forall s \in [0, s_0] \qquad [2.315]$$

il existe une fonction de Lyapunov V_y de classe C^{k+1} et satisfaisant :

$$(\gamma_d(|x|))^2 \leq (1 - \varepsilon)\,\lambda\, V_y(x, y) \qquad \forall (x, y) \qquad [2.316]$$

pour un réel $\varepsilon > 0$, et une fonction $\phi_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^k telle que la dérivée de V_y satisfait :

$$\widehat{V_y(x, y)}^{\,\cdot} \leq -\lambda\, V_y(x, y) + |(d_x, d_y)|^2 \qquad \forall (x, y, d_x, d_y) \qquad [2.317]$$

---

7. La condition [2.315] est utile pour garantir l'existence d'une fonction V_y qui est de classe C^1 au voisinage de l'origine. Une explication à cela est que les inégalités [2.314] et [2.315] donnent, pour $|x|$ suffisamment petit, l'inégalité :

$$(\gamma_d(|x|))^2 \leq (\gamma_d \circ \alpha^{-1}(V_x(x)))^2 \leq \mu^2\, V_x(x)$$

à comparer à [2.316].

REMARQUE 2.24.– Les inégalités [2.316] et [2.317] sont exactement sous la forme requise pour appliquer le théorème 2.7 des petits gains. En particulier, le fait que, pour toute fonction γ_d donnée, nous pouvons faire en sorte que l'inégalité [2.316] est satisfaite nous indique que nous avons ici un résultat d'assignation de gain L^∞ non linéaire. Observons cependant que l'argument de γ_d dans [2.316] est x et non (x, y). Ceci signifie que ce n'est que le gain L^∞ non linéaire de (d_x, d_y) à x que nous sommes capables d'assigner.

REMARQUE 2.25.– Comme le théorème 2.12, le théorème 2.13 peut être utilisé récursivement pour traiter des systèmes sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)\,(x_2 + d_1) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)\,(x_3 + d_2) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, ..., x_n) + g_n(x_n, ..., x_n)\,(u + d_n) \end{cases} \qquad [2.318]$$

et obtenir une loi de commande qui rend le système en boucle fermée SEE et atténue arbitrairement l'action des perturbations $(d_1, ..., d_n)$ sur x_1.

EXEMPLE 2.15 (ASSIGNATION DE GAIN ET BOUCLAGE D'ÉTAT PARTIEL).– Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_4^3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_3 + x_1\, x_4 \\ \dot{x}_3 = -x_2 \\ \dot{x}_4 = x_5 + x_3 + x_1\, x_4 \\ \dot{x}_5 = u + x_2 \end{cases} \qquad [2.319]$$

Nous cherchons une loi de commande stabilisant asymptotiquement globalement l'origine mais ne dépendant que de (x_4, x_5).

Pour résoudre ce problème, nous observons que le système [2.319] n'est rien d'autre que le système [2.122] auquel est ajouté un dérivateur perturbé. Nous continuons donc selon les mêmes lignes que dans l'exemple 2.6.

Des inégalités [2.20] et [2.32], obtenues pour les solutions du système [2.14], c'est-à-dire le sous-système en (x_1, x_2, x_3) avec x_4 comme entrée, et grâce au théorème 2.7, nous savons que le problème peut être résolu en trouvant, pour le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + d_2 + d_1\, y \\ \dot{y} = u + d_3 \end{cases} \qquad [2.320]$$

une fonction de Lyapunov strictement assignable point par point V_y et une fonction continue ϕ_y telles que, avec la commande :

$$u = \phi_y(x, y) \tag{2.321}$$

nous obtenons l'inégalité suivante pour la dérivée de V_y :

$$\dot{\widehat{V_y(x,y)}} \leq -\lambda\, V_y(x,y) + \gamma_1(|d_1|) + \gamma_2\left(\sqrt{d_2^2 + d_3^2}\right) \tag{2.322}$$

où γ_1 et γ_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{K}$ et λ est un réel strictement positif vérifiant :

$$\gamma_1(2|x|) + \gamma_2(8x^2) \leq (1 - \varepsilon)\,\lambda\, V_y(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.323}$$

avec ε un réel strictement positif quelconque.

Le système [2.320] est fait du système (voir [2.123]) :

$$\dot{x} = u_x + d_2 + d_1\, x \tag{2.324}$$

auquel est ajouté le dérivateur perturbé :

$$\begin{cases} \dot{y} = u + d_3 \\ u_x = y \end{cases} \tag{2.325}$$

Avec l'exemple 2.6, nous savons que nous pouvons strictement assigner point par point au système réduit [2.324] la fonction de Lyapunov :

$$V_x(x) = \tfrac{1}{4}\, x^4 \tag{2.326}$$

En particulier la commande :

$$u_x = \phi_x(x) = -\frac{\lambda}{4}\, x - \left(x^3 + \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{4}\right) \tag{2.327}$$

donne :

$$\dot{\widehat{V_x(x)}} \leq -\lambda\, V_x(x) + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_1^4}{4} \tag{2.328}$$

Pour le système complet [2.320], la formule [2.163] donne la fonction de Lyapunov strictement assignable point par point :

$$V_y(x,y) = V_x(x) + \tfrac{1}{2}\,(y - \phi_x(x))^2 \tag{2.329}$$

En utilisant [2.328], nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{V_y(x,y)}} \leq{}& -\lambda\, V_x(x) + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_1^4}{4} \\ &+ (y - \phi_x(x))[V_x'(x) + u + d_3 - \phi_x'(x)(y + d_2 + d_1 x)] \end{aligned} \tag{2.330}$$

$$\leq -\lambda V_x(x) + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_1^4}{4} + (y - \phi_x(x))[x^3 + u - \phi'_x(x)y] \tag{2.331}$$
$$+ \left(\frac{(y - \phi_x(x))^2}{2} + \frac{d_3^2}{2}\right) + \left((y - \phi_x(x))^2 \phi'_x(x)^2 + \frac{d_2^2}{4}\right)$$
$$+ \left(\frac{3(y - \phi_x(x))^{\frac{4}{3}} \phi'_x(x)^{\frac{4}{3}} x^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{d_1^4}{4}\right)$$
$$\leq -\lambda V_x(x) + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_1^4}{4} + \frac{d_3^2}{2} + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_1^4}{4} \tag{2.332}$$
$$+ (y - \phi_x(x)) \left[x^3 + u - \phi'_x(x)y + \frac{y - \phi_x(x)}{2} + (y - \phi_x(x))\phi'_x(x)^2 + \frac{3(y - \phi_x(x))^{\frac{1}{3}} \phi'_x(x)^{\frac{4}{3}} x^{\frac{4}{3}}}{4}\right]$$

où nous avons complété les carrés et utilisé l'inégalité de Young pour déduire [2.331]. Une synthèse d'annulation conduit alors à la loi de commande :

$$u = \phi_y(x, y) \tag{2.333}$$
$$= -\frac{\lambda}{2}(y - \phi_x(x)) \tag{2.334}$$
$$- \left[x^3 - \phi'_x(x)y + \frac{y - \phi_x(x)}{2} + (y - \phi_x(x))\phi'_x(x)^2 + \frac{3(y - \phi_x(x))^{\frac{1}{3}} \phi'_x(x)^{\frac{4}{3}} x^{\frac{4}{3}}}{4}\right]$$

Elle donne :

$$\dot{\widehat{V_y(x, y)}} \leq -\lambda V_y(x, y) + \frac{d_3^2 + d_2^2}{2} + \frac{d_1^4}{2} \tag{2.335}$$

Ceci montre que nous avons obtenu [2.322] avec les fonctions :

$$\gamma_1(s) = \frac{s^4}{2} \qquad \gamma_{23}(s) = \frac{s^2}{2} \tag{2.336}$$

Il s'en suit que la contrainte [2.323] s'écrit :

$$8\,x^4 + 32\,x^4 \leq (1 - \varepsilon)\,\frac{\lambda}{4}\,x^4 \qquad \forall x \tag{2.337}$$

La stabilité asymptotique globale est donc obtenue si nous choisissons :

$$\lambda > 160 \tag{2.338}$$

En résumé, le point important de cet exemple est de nouveau la combinaison de la formule [2.163] pour traiter l'ajout de dérivateur et l'utilisation d'inégalités pour traiter les termes impliquant la perturbation.

2.5. Annexe : lexique et notations

a'

Pour une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, nous notons f' sa dérivée.

$\overbrace{a(x)}^{\cdot}$

Pour toute solution $X(x, t; d)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de :

$$\dot{x} = f(x, d) \qquad X(x; d, 0) = x \qquad [2.339]$$

définie sur $[0, T)$ (voir la définition 2.1) et toute fonction $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} a(X(x, t; d)) = \frac{\partial a}{\partial x}(X(x, t; d))\, f(X(x, t; d), d(t)) \qquad [2.340]$$
$$\text{pour presque tout } t \in [0, T)$$

Par ailleurs, nous pouvons définir une fonction $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ comme :

$$b(x, d) = \frac{\partial V}{\partial x}(x)\, f(x, d) \qquad [2.341]$$

Constatant la similarité de [2.340] et [2.341], nous adoptons la notation :

$$\overbrace{a(x)}^{\cdot} = \frac{\partial a}{\partial x}(x)\, f(x, d) \qquad [2.342]$$

Mais nous insistons sur le fait que $\overbrace{a(x)}^{\cdot}$ est une fonction de (x, d) et en aucun cas du temps t.

$a\big|_S$

Pour une fonction $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$, nous notons $a\big|_S$ la restriction de a à S. C'est donc une fonction sur S à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Ajout de dérivateur

Etant donné un système :

$$\dot{x} = f(x, v, d_x) \qquad [2.343]$$

d'état x, commande v et perturbation d_x, nous disons que nous lui ajoutons un dérivateur si nous considérons le système augmenté :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, v, d_x) \\ \dot{v} = h(x, v, u, d_y) \end{cases} \qquad [2.344]$$

d'état (x, v), commande u et perturbation (d_x, d_y). Ainsi, la commande v du système [2.343] est devenue une composante de l'état du système [2.344]. Pour ce dernier la commande u n'agit que sur la dérivée de v.

Ajout d'intégrateur

Etant donné le système :

$$\dot{x} = f(x, u, d_x) \qquad [2.345]$$

d'état x, commande u et perturbation d_x, nous disons que nous lui ajoutons un intégrateur si nous considérons le système augmenté :

$$\begin{cases} \dot{y} = h(y, x, u, d_y) \\ \dot{x} = f(x, u, d_x) \end{cases} \qquad [2.346]$$

d'état (x, y), commande u et perturbation (d_x, d_y). Ainsi, l'état y intègre une fonction de y mais surtout aussi de (x, u, d_y).

Atténuation de perturbation

Le problème d'atténuation de perturbation pour un système :

$$\dot{x} = f(x, u, d) \qquad [2.347]$$

d'état x, commande u, perturbation d est celui de définir une loi de commande $u = \phi(x)$ telle que les solutions du système bouclé dépendent le moins possible de d. Voir la remarque 2.4.

Backstepping

Voir ajout de dérivateur et la remarque 2.19.

Classe C^k

Une fonction est dite de classe C^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k. Ainsi une fonction de classe C^0 est simplement une fonction continue.

Classes $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^\infty$

Une fonction $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est dite de classe $\mathcal{K}$ si elle est continue, strictement croissante et nulle en zéro. Elle est de classe $\mathcal{K}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{K}$ et non bornée.

Classe $\mathcal{KL}$

Une fonction $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est dite de classe $\mathcal{KL}$ si, pour chaque $t \geq 0$ fixé, la fonction $\beta(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{K}$, et, pour chaque $r > 0$ fixé, la fonction $\beta(r, \cdot)$ est strictement décroissante et vérifie :

$$\lim_{t \to \infty} \beta(r, t) = 0 \qquad [2.348]$$

Avec la [SON 98, proposition 7], nous savons que β est une fonction de classe $\mathcal{KL}$ si et seulement s'il existe des fonctions α_1 et α_2 de classe $\mathcal{K}^\infty$ vérifiant :

$$\alpha_1(\beta(r, t)) \leq \alpha_2(r) \exp(-t) \qquad \forall (r, t) \qquad [2.349]$$

CLF

CLF est l'abrégé de l'expression anglaise : *Control Lyapunov Function*. Nous l'avons traduite ici par l'expression : fonction de Lyapunov assignable (voir la définition 2.6).

Commande gradient ou L_gV

Une commande est dite de gradient ou L_gV si elle est dans la direction opposée à la dérivée de Lie d'une fonction de Lyapunov V dans la direction du champ de commande g. Elle est donc de la forme générale :

$$u = -Q(x)\, L_gV(x)^T \qquad [2.350]$$

où Q est une matrice définie positive.

Compléter les carrés

Voir inégalité de Young.

Condition de coïncidence

Voir la remarque 2.14.

Définie négative

Une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_-$ est dite définie négative si $-V$ est définie positive.

Définie positive

Une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est dite définie positive si elle vérifie :

$$V(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0 \qquad [2.351]$$

Fonction de Lyapunov

Une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est dite une fonction de Lyapunov de classe C^r si elle est de classe C^r, définie positive et propre (radialement non bornée).

Fonction propre

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, une fonction $V : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite propre si, pour chaque réel c_i et c_s, l'ensemble :

$$\{x : \leq c_i \leq V(x) \leq c_s\}$$

est un sous-ensemble compact (peut-être vide) de Ω. Voir [SCHW 70]. Lorsque Ω est l'ensemble $\mathbb{R}^n$ tout entier, cette définition est équivalente au fait que nous ayons :

$$\lim_{|x| \to +\infty} V(x) = +\infty \qquad [2.352]$$

Forme feedback

Un système est dit être sous forme *feedback* si nous pouvons trouver des coordonnées telles que sa dynamique s'écrive :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)\, x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) + g_n(x_1, \dots, x_n)\, u \end{cases} \qquad [2.353]$$

Une telle forme est obtenue par une succession d'ajouts de dérivateur.

Forme feedforward

Un système est dit être sous forme *feedforward* si nous pouvons trouver des coordonnées telles que sa dynamique s'écrive :

$$\begin{cases} \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_1 = f_1(x_1, u) \end{cases} \qquad [2.354]$$

Une telle forme est obtenue par une succession d'ajouts d'intégrateur.

Forwarding

Voir ajout d'intégrateur.

Hölder continue

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite Hölder continue d'ordre α en x s'il existe des réels strictement positifs k et δ tels que nous ayons :

$$|f(x+h) - f(x)| \leq k\,|h|^{\alpha} \qquad \forall |h| \leq \delta \qquad [2.355]$$

ISS

ISS est l'abrégé de l'expression anglaise : *Input-to-State Stability*. Nous l'avons traduite ici par l'expression : stabilité entrée état (voir la définition 2.5).

$L_f V$

La notation $L_f V$ représente la dérivée de Lie au point x de la fonction V le long des solutions $X(x, t)$ de l'équation différentielle :

$$\dot{x} = f(x) \qquad [2.356]$$

Elle vérifie donc, une fois des coordonnées fixées :

$$L_f V(x) = \lim_{t \to 0} \frac{V(X(x, t)) - V(x)}{t} \qquad [2.357]$$

Si V est de classe C^1 une expression est :

$$L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) \, f(x) \qquad [2.358]$$

Si f est en fait un champ de matrice, $L_f V$ est un vecteur ligne.

$L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)$

La notation $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)$ est utilisée pour désigner l'ensemble des fonctions mesurables $d : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^p$ telles que, pour tout compact K dans $\mathbb{R}_+$, il existe un réel c satisfaisant :

$$|d(t)| \leq c, \quad \text{pour presque tout } t \in K \qquad [2.359]$$

Origine

Dans tout ce texte, pour le système général [2.1], nous supposons l'existence d'un point de $\mathbb{R}^n$, un point de $\mathbb{R}^p$ et un point de $\mathbb{R}^m$, chacun appelé origine de leur espace respectif et dénoté 0 tels que :

$$f(0, 0, 0) = 0 \qquad [2.360]$$

Passif

Un système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \qquad [2.361]$$

est dit (respectivement strictement) passif s'il existe une fonction de Lyapunov V de classe C^1 et une fonction W non négative (respectivement définie positive) telles que, pour tous les couples (x, u), nous ayons :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) \, f(x, u) \leq -W(x) + y^T u \qquad [2.362]$$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels non négatifs, $\mathbb{R}_{++}$ est l'ensemble des réels strictement positifs.

SCP

SCP est l'abrégé de l'expression anglaise : *Small Control Property*. Nous l'avons traduite ici par l'expression : localement continûment strictement assignable (voir la définition 2.7).

SEE

SEE est l'abréviation de stabilité entrée état (voir la définition 2.5).

Synthèse d'annulation

Lorsque la dérivée d'une fonction de Lyapunov V vérifie :

$$\dot{V} \leq T_- + L_g V \times (u + T) \qquad [2.363]$$

où T_- est un terme non positif et T est un terme quelconque, une synthèse d'annulation de la commande consiste à prendre la commande sous la forme :

$$u = -T - Q(x)\, L_g V(x)^T \qquad [2.364]$$

où Q est une matrice définie positive.

Synthèse de domination

Lorsque la dérivée d'une fonction de Lyapunov V satisfait [2.363], une synthèse de domination de la commande consiste à prendre la commande en général sous la forme :

$$u = -Q(x)\, L_g V(x)^T \qquad [2.365]$$

où Q est une matrice définie positive suffisamment grande.

Young (inégalité de)

Pour tout réel $p > 1$ et tout couple (a, b) de $\mathbb{R}_+^2$, nous avons :

$$a\, b \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{p-1}{p}\, b^{\frac{p}{p-1}} \qquad [2.366]$$

Dans le cas où $p = 2$, l'inégalité de Young est connue sous l'expression : compléter les carrés.

2.6. Bibliographie

[ARC 99] ARCAK M., SERON M., BRASLAVSKY J., KOKOTOVIĆ P., « Robustification of backstepping against input unmodeled dynamics », dans *Proceedings of the Thirty-eighth Conference on Decision and Control*, 1999.

[BUT 68] BUTZ A., « Learning bang-bang regulations », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 13, 1968.

[CHE 98] CHEN C., GULDNER J., KANELLAKOPOULOS I., TOMIZUKA M., « Nonlinear damping in vehicle lateral control: Theory and experiment », dans *Proceedings of the 1998 American Control Conference*, p. 2243-2247, juin 1998.

[CLA 98] CLARKE F., LEDYAEV Y., STERN R., « Asymptotic stability and smooth Lyapunov functions », *Journal of Differential Equations*, vol. 149, p. 69-114, 1998.

[COR 91] CORON J.M., PRALY L., « Adding an integrator for the stabilization problem », *Systems and Control Letters*, vol. 17, p. 89-104, 1991.

[DAW 98] DAWSON D., HU J., BURG T., *Nonlinear Control of Electric Machinery*, Marcel Dekker, 1998.

[EFI 02] EFIMOV D.V., « A condition of CLF existence for affine systems », dans *Proceedings of the Fourty-first Conference on Decision and Control*, 2002.

[EZA 00] EZAL K., PAN Z., KOKOTOVIĆ P., « Locally optimal and robust backstepping design », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, p. 260-271, 2000.

[FOS 99] FOSSEN T., *Nonlinear Backstepping Designs: Applications to Mechanical Systems and Ship Control*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[FRE 93a] FREEMAN R., KOKOTOVIĆ P., « Design of "softer" robust nonlinear control laws », *Automatica*, vol. 29, n° 6, p. 1425-1437, 1993.

[FRE 93b] FREEMAN R., KOKOTOVIĆ P., « Global robustness of nonlinear systems to state measurement disturbances », dans *Proceedings of the Thirty-second IEEE Conference on Decision and Control*, décembre 1993.

[FRE 96] FREEMAN R., KOKOTOVIĆ P., *Robust Nonlinear Control Design: State-space and Lyapunov Techniques*, Birkhäuser, 1996.

[FRE 98] FREEMAN R., PRALY L., « Integrator backstepping for bounded controls and control rates », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, p. 258-262, 1998.

[GRA 63] GRAYSON L., « Design via Lyapunov's second method », dans *Proceedings of the Fourth Joint Conference on Automatic Control*, p. 589-598, 1963.

[HAL 80] HALE J.K., *Ordinary Differential Equations*, Krieger Publishing Company, 1980.

[HAM 01] HAMZI B., PRALY L., « Ignored input dynamics and a new characterization of control Lyapunov functions », *Automatica*, vol. 37, n° 6, 2001.

[HAR 89] HARDY G., LITTLEWOOD J., PÓLYA G., *Inequalities*, deuxième édition, Cambridge Mathematical Library, 1989.

[HER 91] HERMES H., « Nilpotent and high-approximations of vector field systems », *SIAM Review*, vol. 33, n° 2, p. 238-264, 1991.

[ING 02] INGALLS B., SONTAG E., « A small-gain lemma with applications to input/output systems, incremental stability, detectability, and interconnections », *J. Franklin Institute*, vol. 339, p. 211-229, 2002.

[ISI 95] ISIDORI A., *Nonlinear Control Systems*, troisième édition, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[ISI 99] ISIDORI A., *Nonlinear Control Systems II*, troisième édition, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[JIA 94] JIANG Z.P., TEEL A., PRALY L., « Small-gain theorem for ISS systems and applications », *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 7, p. 95-120, 1994.

[JIA 97] JIANG Z.P., MAREELS Y., « A small gain method for nonlinear cascaded systems with dynamic uncertainties », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, p. 292-308, 1997.

[KAL 60] KALMAN R., BERTRAM J., « Control system analysis and design via the "second method" of Lyapunov. Parts I and II », *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, p. 371-400, 1960.

[KHA 96] KHALIL H., *Nonlinear Systems*, deuxième édition, Prentice Hall, 1996.

[KOT 89] KOKOTOVIĆ P., SUSSMANN H., « A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems », *Systems and Control Letters*, vol. 13, p. 125-133, 1989.

[KOT 01] KOKOTOVIĆ P., ARCAK M., « Constructive nonlinear control: A historical perspective », *Automatica*, vol. 37, p. 637-662, 2001.

[KRA 63] KRASOVSKII N., *Stability of Motion. Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delays*, Stanford University Press, 1963.

[KRS 95] KRSTIĆ M., KANELLAKOPOULOS I., KOKOTOVIĆ P., *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley and Sons, New York, 1995.

[KRS 98a] KRSTIĆ M., DENG H., *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Communications and Control Engineering, 1998.

[KRS 98b] KRSTIĆ M., FONTAINE D., KOKOTOVIĆ P., PADUANO J., « Useful nonlinearities and global stabilization of bifurcations in a model of jet engine surge and stall », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, n° 12, 1998.

[LEF 65] LEFSCHETZ S., *Stability of nonlinear control systems*, Academic Press, New York, 1965.

[LET 61] LETOV A., *Stability in Nonlinear Control Systems*, Princeton University Press, 1961.

[LI 97] LI Z., KRSTIĆ M., « Maximizing regions of attraction via backstepping and CLF's with singularities », *Systems and Control Letters*, vol. 30, p. 195-207, 1997.

[LIN 96] LIN Y., SONTAG E., WANG Y., « A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability », *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 34, n° 1, p. 124-160, 1996.

[MAL 99] MALISOFF M., SONTAG E., « Universal formulas for CLF's with respect to Minkowski balls », dans *Proceedings of the American Control Conference (San Diego, Californie)*, p. 3033-3037, juin 1999.

[MAR 95] MARINO R., TOMEI P., *Nonlinear Control Design. Geometric, Adaptive, Robust*, Prentice Hall, 1995.

[MON 65] MONOPOLI R., « Synthesis techniques employing the direct method », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 10, p. 369-370, 1965.

[NIJ 90] NIJMEIJER H., VAN DER SCHAFT A., *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[NIJ 99] NIJMEIJER H., FOSSEN T. (dir.), *New Directions in Nonlinear Observer Design*, Springer-Verlag, Berlin, Lecture Notes in Control and Information Sciences 244, 1999.

[ORT] ORTEGA R., LORIA A., NICKLASSON P.J., SIRA-RAMIREZ H., « Passivity-based control of Euler-Lagrange systems ».

[PAN 98] PAN Z., BAŞAR T., « Adaptive design for tracking and disturbance attenuation in parametric strict-feedback nonlinear systems », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, p. 1066-1084, 1998.

[PAN 01] PAN Z., EZAL K., KRENER A., KOKOTOVIĆ P., « Backstepping design with local optimality matching », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, n° 7, 2001.

[PRA 91] PRALY L., D'ANDRÉA-NOVEL B., CORON J.M., « Lyapunov design of stabilizing controllers for cascaded systems », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, n° 10, 1991.

[PRA 93] PRALY L., JIANG Z.P., « Stabilization by output feedback for systems with ISS inverse dynamics », *Systems and Control Letters*, vol. 21, p. 19-33, 1993.

[PRA 96] PRALY L., WANG Y., « Stabilization in spite of matched unmodelled dynamics and an equivalent definition of input-to-state stability », *Mathematics of Control, Signal, and Systems*, vol. 9, p. 1-33, 1996.

[PRA 01] PRALY L., « An introduction to forwarding », dans Astrom K., Albertos P., Blanke M., Isidori A., Schaufelberger W., Sanz R. (dir.), *Control of Complex Systems*, chapitre 4, Springer, New York, 2001.

[RYA 93] RYAN E., « Adaptive stabilization of multi-input nonlinear systems », *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 3, p. 169-181, 1993.

[SCHA 96] VAN DER SCHAFT A., « L_2-gain and passivity techniques in nonlinear control », dans *Lecture Notes in Control and Information Sciences 218*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[SCHW 70] SCHWARTZ L., *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1970.

[SCHW 99] SCHWARTZ B., ISIDORI A., TARN T., « Global normal forms for MIMO nonlinear systems, with applications to stabilization and disturbance attenuation », *Math. Control Signals Systems*, vol. 12, p. 121-242, 1999.

[SEP 97] SEPULCHRE R., JANKOVIĆ M., KOKOTOVIĆ P., *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[SON 89a] SONTAG E., « A "universal" construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization », *Systems and Control Letters*, vol. 13, p. 117-123, 1989.

[SON 89b] SONTAG E., « Smooth stabilization implies coprime factorization », *IEEE Transactions on Automatic Control*, avril 1989.

[SON 90] SONTAG E., « Further facts about input to state stabilization », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, p. 473-476, 1990.

[SON 98] SONTAG E., « Comments on integral variants of ISS », *Systems and Control Letters*, vol. 34, p. 93-100, 1998.

[SON 95a] SONTAG E., WANG Y., « On characterizations of the input-to-state stability property », *Systems and Control Letters*, vol. 24, p. 351-359, 1995.

[SON 95b] SONTAG E., WANG Y., « On characterizations of set input-to-state stability », dans *Proceedings of IFAC Non-Linear Control Systems Design Symposium (NOLCOS'95, Tahoe City, Californie)*, p. 226-231, juin 1995.

[TEE 95] TEEL A., PRALY L., « Tools for semi-global stabilization by partial state and output feedback », *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 33, n° 5, 1995.

[TEE 96] TEEL A., « A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation », *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, n° 9, 1996.

[TEE 99] TEEL A., PRALY L., « On assigning the derivative of a disturbance attenuation CLF », 1999 (à paraître dans *MCSS*).

[TSI 89] TSINIAS J., « Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization », *Math. Control Signals Systems*, vol. 2, p. 343-357, 1989.