COMMANDE ADAPTATIVE PAR MODELE DE REFERENCE : STABILITE ET ROBUSTESSE

OUTILS ET MODELES MATHEMATIQUES POUR L'AUTOMATIQUE, L'ANALYSE DES SYSTEMES ET LE TRAITEMENT DU SIGNAL, vol. 3. Editions du CNRS 1983

PAGES 805-816

Résumé
Nous étudions la stabilité du schéma de commande adaptative proposé dans [Landau, Lozano] dans le cas d'une modèlisation imparfaite uniquement caractérisée par le rapport bruit sur signal. Nous devons pour cela modifier l'algorithme d'adaptation en y introduisant en particulier une projection pour limiter le gain de l'opérateur d'adaptation. Nous supposons le retard parfaitement connu.

Abstract : We study the stability of the model reference adaptive control presented in [Landau, Lozano]. We deal with mismodeling quantified in terms of noise to signal ratio. The adaptation mechanism is modified with in particular the introduction of a projection to limit the gain of the adaptation operator. We assume the delay to be perfectly known.

Introduction

L'analyse de la stabilité des schémas de commande adaptative a été l'objet d'une recherche intensive ces dernières années. Cependant la plupart des résultats établis aujourd'hui le sont pour des systèmes linéaires stationnaires d'ordre connu soumis à des perturbations bien modélisées. De nombreux progrès restent encore à faire pour rapprocher ce contexte théorique des applications potentielles. En particulier pour étudier ce qu'il se passe lorsque le système réel diffère du modèle linéaire en ce qu'il est d'un ordre plus élevé, contient des non linéarités ou est sujet à des perturbations de structure ou d'état.

Ce problème a déjà reçu quelques éléments de réponses dans le cas du temps continu. Par une approche de Lyapounov, Ioannou et Kokotovic [Ioannou, Kokotovic] exhibent un domaine de stabilité pour un schéma direct et lorsque les effets non modélisés sont des perturbations singulières. Dans [Kosut, Friedlander], Kosut et Friedlander utilisent la passivité de la loi d'identification pour donner un théorème général de stabilité robuste ; la vérification de ses hypothèses se traduit sur l'incertitude tolérée par une condition de type secteur conique dans la relation entrée-sortie. Dans [Kreisselmeier], Kreisselmeier montre l'existence de domaines stables pour un schéma indirect et sous des hypothèses assez larges sur les effets non modélisés ; pour cela, au contraire des précédents, il étudie séparément identification et commande.

Nous allons étudié ici le cas du temps discret en retenant de ces trois références : l'intérêt de modifier l'algorithme d'identification [Ioannou, Kokotovic], [Kosut, Friedlander], la caractérisation des incertitudes par une condition de type secteur conique [Kosut, Friedlander], et enfin l'étude de la bornitude en séparant identification et commande [Kreisselmeier]. Nous obtiendrons ainsi un résultat de bornitude globale sous des conditions plus faibles et plus explicites que dans [Kosut, Friedlander] et portant essentiellement sur une limitation du rapport bruit sur signal. Notons cependant que nous demandons une connaissance parfaite du retard du système et que notre résultat est conditionné au fait que la loi de commande reste strictement causale.

Pour simplifier l'exposé, nous présenterons notre résultat sur le schéma proposé par Landau et Lozano dans [Landau, Lozano]. Cependant l'outil et les concepts présentés ici sont très généraux et peuvent être utilisés pour d'autres schémas [Praly 1], [Praly 2].

Auchapitre II, nous caractérisons le type de systèmes auquel nous nous intéressons. Au chapitre III nous décrivons le schéma et nous établissons sa propriété de stabilité. Enfin nous donnons notre conclusion au chapitre IV.

Le Systeme

Puisque la caractérisation d'un système réel est impossible, nous nous contenterons de définir une classe de modèles susceptible de l'englober. Soit $u(k)$, $y(k)$ respectivement la commande et la sortie monovariable du système. On définit un modèle linéaire en choisissant des entiers n_A, n_B, d et des paramètres a_i, b_i tels que la sortie $\hat{y}(k)$ de ce modèle s'écrive

$$\hat{y}(k) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{n_B} b_i\, u(k-i-d) \tag{1}$$

La comparaison de cette sortie modèle à la sortie réelle donne le résidu de modélisation :

$$w(k) = y(k) - \hat{y}(k) \tag{2}$$

Les résultats connus aujourd'hui concernent le cas où $w(k)$ est nul

[Landau, Lozano], borné [Egardt], ou une moyenne mobile [Goodwin et al.].
Nous considérons ici le cas où on a :

$$\frac{|w(k)|}{v(k)} \leq \eta \tag{3}$$

avec

$$v(k) = \sigma\, v(k-1) + \mathrm{Max}\{|y(k-1)|+|u(k-d)|, v\} \tag{4}$$

$$0 < \sigma < 1 \quad , \quad v > 0 \tag{5}$$

En effet ceci nous permet de considérer dans le même formalisme le cas où le modèle néglige des poles ou des zéros rapides, des non linéarités linéairement dominées, ou autres perturbations additives bornées. Par exemple, supposons qu'on ait :

$$w(k) = a(n_A+1)y(k-n_A-1)+b(n_B+1)u(k-n_B-d-1) \tag{6}$$

puisque

$$|y(k-n_A-1)| \leq \sigma^{-n_A}\, v(k) \tag{7}$$

$$|u(k-n_B-d-1)| \leq \sigma^{-(n_B+1)} v(k) \tag{8}$$

on aurait alors

$$\left|\frac{w(k)}{v(k)}\right| \leq \left|\frac{a(n_A+1)}{\sigma^{n_A}}\right| + \left|\frac{b(n_B+1)}{\sigma^{n_B+1}}\right| \tag{9}$$

Ainsi η dans (3) donnerait une majoration des paramètres négligés $a(n_A+1)$, $b(n_B+1)$.
Notons que la présence de $u(k-d)$ dans (4) et non de $u(k-d+1)$ imposera une connaissance parfaite du retard d du système.
Réécrivons (2) sous la forme suivante :

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + w(k) \tag{10}$$

où q^{-1} est l'opérateur de retard

$$A(q^{-1}) = 1 = a_1 q^{-1} + \ldots + a_{n_A} q^{-n_A} \tag{11}$$

$$B(q^{-1}) = b_o + b_1 q^{-1} + \ldots + B_{n_B} q^{-n_B} \tag{12}$$

L'hypothèse complète que nous ferons sur le système est la suivante :

Il existe des polynomes en q^{-1} inconnus $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ tels que :
- une borne supérieure de leurs coefficients est connue (H1)
- $B(q^{-1})$ est asymptotiquement stable (ce qui implique que b_o est non nul) (H2)
- $\frac{|w(k)|}{v(k)} \leq \eta$ (H3)

où $w(k)$ est défini par (10) et $v(k)$ par (4).

Remarque: De H3 on déduit que pour tout entier l, on a :

$$\frac{|w(k-1)|}{v(k)} < \frac{\eta}{\sigma^{1}} \qquad (13)$$

Commande Adaptative par modèle de référence

Procèdant comme dans [Landau, Lozano], soit $y^M(k)$ la sortie d'un modèle de référence et $C_2(q^{-1})$ un polynôme asymptotiquement stable. On peut réécrire (10) sous la forme :

$$C_2(q^{-1})y(k) = p^t\,\Phi(k-d) + S(q^{-1})w(k) \qquad (14)$$

où - $S(q^{-1})$ est un polynôme de degré $(d-1)$ défini par

$$C_2(q^{-1}) = A(q^{-1})\,S(q^{-1}) + q^{-d}R(q^{-1}) \qquad (15)$$

- $\Phi(k)$ est le vecteur

$$\Phi(k)^t = (u(k) \ldots u(k-d-n_B+1)\,y(k) \ \ldots\ y(k-n_R)) \qquad (16)$$

avec

$$n_R = \mathrm{Max}\{n_A-1,\ n_{C_2}-d\} \qquad (17)$$

- p est un vecteur de paramètre dont la première composante est b_o.

On a les propriétés suivantes :

1 - Les coefficients de $S(q^{-1})$ dépendent continuement de ceux de $A(q^{-1})$. On vérifie aussi qu'il existe une constante L_S telle que (utiliser H3) :

$$\frac{|S(q^{-1})w(k)|}{v(k)} < L_S\,\eta \qquad (18)$$

2 - Les composantes de p dépendent continuement des coefficients de $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$. Nous pouvons alors préciser l'hypothèse H1 de la façon suivante :

H1 : il existe $\hat{p}(0)$ et ρ_o connus tels que : $\|p-\hat{p}(0)\| < \rho_o$.

Le schéma proposé au paragraphe 4.1 de [Landau, Lozano] consiste alors à définir une estimation $\hat{p}(k)$ de p à partir de (14), puis de calculer la commande $u(k)$ comme :

$$\hat{p}(k)^t\,\Phi(k) = C_2(q^{-1})\,y^M(k+d) \qquad (19)$$

ou encore en prenant le coefficient de $u(k)$ unitaire :

$$\frac{\hat{p}(k)^t}{b_o(k)}\,\Phi(k) = \frac{1}{b_o(k)}\ C_2(q^{-1})\,y^M(k+d) \qquad (20)$$

Cependant les caractéristiques du résidu $w(k)$ imposent une modification de la loi d'adaptation proposée dans [Landau, Lozano]. Nous proposons l'algorithme suivant :

$$\hat{e}(k) = C_2(q^{-1})y(k) - \hat{p}(k-1)^t\,\Phi(k-d) \tag{21}$$

$$g(k) = \frac{\alpha(k)}{\mu(k)v^2(k) + \Phi(k-d)^t\,F_{k-1}\Phi(k-d)} \tag{22}$$

$$\hat{p}(k-\tfrac{1}{2}) = \hat{p}(k-1) + g(k)\,F_{k-1}\Phi(k-d)\,\hat{e}(k) \tag{23}$$

$$F_{k-\frac{1}{2}} = F_{k-1} - g(k)\,F_{k-1}\,\Phi(k-d)\,\Phi(k-d)^t\,F_{k-1} \tag{24}$$

$$\hat{p}(k) = \hat{p}(0) + \mathrm{Min}\,\left\{1, \frac{\rho(k)}{\|\hat{p}(k-\frac{1}{2})-\hat{p}(0)\|}\right\}\,(\hat{p}(k-\tfrac{1}{2})-\hat{p}(0)) \tag{25}$$

$$F_k > F_{k-\frac{1}{2}} \tag{26}$$

Avec

$$0 < \alpha \leq \alpha(k) \leq 1 \tag{27}$$

$$0 < \mu \leq \mu(k) \leq M \tag{28}$$

Cet algorithme diffère de (52), (53) de [Landau, Lozano] par la présence de $v(k)$ dans (22) et les opérations de projection (25) et de régularisation (26). En particulier (26) signifie que F_k doit être prise comme n'importe qu'elle matrice symétrique définie positive telle que: (26) est satisfait avec :

$$0 < \Lambda_o \leq \lambda\min F_k \leq \lambda\max F_k \leq \Lambda_1 \tag{29}$$

Par exemple, on pourra prendre

$$F_o = \Lambda_1\, I, \quad F_k = \beta(k)\, F_{k-\frac{1}{2}} + (1-\beta(k))\,\Lambda_1\, I \tag{30}$$

avec

$$0 \leq \beta(k) \leq 1 - \frac{\Lambda_o}{\Lambda_1} \tag{31}$$

La projection, quant à elle, assure la bornitude des paramètres adaptés conformément à l'hypothèse H1, en prenant :

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_o}\rho_o \leq \rho(k) \leq \rho\ , \quad \rho(k-1) - \rho(k) \leq (\overline{\rho}-1)\|\hat{p}(k-\tfrac{1}{2})-\hat{p}(k-1)\| \tag{32}$$

Notons que cette opération limite le gain des opérateurs de gain infini dénoncés par Rohrs et al. [Rohrs et al.] comme source d'instabilité.

Remarque : Par un choix judicieux de $\alpha(k)$ et $\rho(k)$ on pourra toujours trouver une première composante $b_o(k)$ de $\hat{p}(k)$ non nulle.

On a :

Théorème 1 : Si H1, H3 sont satisfaites alors la suite $\hat{p}(k)$ définie par (21)-(26) a les propriétés suivantes :

I1 : $\|\hat{p}(k)-p\| \leq \overline{M}_p$

I2 : $\forall(q,K),\ \frac{1}{K}\sum_{k=q+1}^{q+K}\left|\frac{\hat{e}(k)}{v(k)}\right| \leq \frac{1}{K}M_e + L_e L_S \eta$

I3 : $\forall(q,K),\ \frac{1}{K}\sum_{k=q+1}^{q+K}\|\hat{p}(k)-\hat{p}(k-1)\| \leq \frac{1}{K}M_p + L_p L_S \eta$

où $\overline{M}_p$, M_p, M_e, L_p, L_e sont des constantes positives indépendantes de η, en particulier :

$$L_e = \frac{\mu\sigma^{2n}+\Lambda_1}{\mu\sigma^{2n}}\quad,\quad L_p = \frac{\Lambda_1(1+\overline{\rho})}{\mu\sigma^{2n}+\Lambda_o}L_e\ ,\quad n = \mathrm{Max}\{n_R,n_B\}+d-1 \tag{33}$$

preuve : voir l'annexe A.

Si on utilise alors la loi de commande (20), on obtient la propriété suivante pour les signaux d'entrée-sortie :

Théorème 2 : Si :
- H2, H3 sont satisfaites.
- la suite $\hat{p}(k)$ satisfait I1 - I3.
- la suite des $b_o(k)$, première composante de $\hat{p}(k)$ satisfait :

$$\frac{1}{|b_o(k)|} \leq M_b \tag{H4}$$

- le polynôme $C_2(q^{-1})$ est asymptotiquement stable et $y^M(k)$ est bornée,

alors :

$\exists\eta_o,\ \forall\eta : T\eta < \eta_o \Rightarrow u(k),\ y(k)$ sont bornées.

T est ici une fonction positive croissante de L_S, L_e, L_p, $\overline{M}_p$, M_b.

preuve : voir l'annexe B.

Conclusion : Puisque T ne dépend pas de η, ce théorème permet de déduire que :

pour un modèle inconnu mais fixé $(A(q^{-1}),\ B(q^{-1}),\ \hat{p}(0),\ \rho_o)$, pour un algorithme d'adaptation fixé $(\sigma,\ \alpha,\ \mu,\ M,\ \Lambda_o,\ \Lambda_1,\ \rho,\overline{\rho})$, pour une contrainte H4 fixée (M_b),

tous les systèmes réels donnant un résidu de modélisation $w(k)$ satisfaisant H3 avec

$$\eta < \frac{\eta_o}{T} \tag{34}$$

auront des signaux d'entrée-sortie bornés.

De plus d'après I2, I3, on voit que si η est nul alors $\hat{e}(k)$ et $\|\hat{p}(k)-\hat{p}(k-1)\|$ tendent vers 0. Ceci implique que l'objectif de commande est atteint asymptotiquement

$$\lim_{k\to\infty} C_2(q^{-1})(y(k)-y^M(k)) = 0 \tag{35}$$

En ce sens nous disons que le schéma décrit par (20)-(26) a une stabilité robuste. Notons que ce résultat est conditionné au fait que la contrainte H4 soit satisfaite. Ceci n'est pas assuré par notre méthode.

Conclusion

Nous avons analysé la stabilité du schéma de commande adaptative proposé dans [Landau, Lozano], dans le cas où l'écart entre le modèle et le système est mal modélisé. Plus précisément nous avons montré la bornitude des signaux entrée-sortie lorsque le rapport bruit sur signal satisfait.

$$\left|\frac{w(b)}{v(b)}\right| \leq \eta$$

où $w(k)$ est cet écart, $v(k)$ est un filtré du premier ordre de la norme des signaux entrée-sortie et η est déduit des caractéristiques du schéma. Pour cela nous avons dû introduire des modifications dans l'algorithme d'adaptation. En particulier une opération de projection nous permet de limiter le gain des opérateurs de gain infini dénoncés par Rohrs et al. [Rohrs et al] comme sources d'instabilité. Ce nouvel algorithme redonne le comportement normal du schéma lorsque η est nul. Ceci nous permet de conclure à la robustesse de cette commande adaptative par modèle de référence. Notons que dans cette étude nous avons supposé que le retard était parfaitement connu et que la loi de commande obtenue restait strictement causale.

ANNEXE A

Résumé de la preuve du théorème 1.

Définissons une suite $V(k)$ de la façon suivante :

$$V(k) = (\hat{p}(k)-p)^t F_k^{-1} (\hat{p}(k)-p) \tag{A1}$$

De (14), H1, (21)-(26), (32) on peut déduire les relations suivantes :

$$V(k-\frac{1}{2}) = V(k-1) + \frac{g(k)}{1-g(k)\Phi(k-d)^t F_{k-1}\Phi(k-d)} (S(q^{-1})w(k))^2 - g(k)\hat{e}(k)^2 \qquad (A2)$$

$$V(k) \leq V(k-\frac{1}{2}) \qquad (A3)$$

$$\|\hat{p}(k)-\rho\| \leq \rho(k) + \rho_o \leq \rho + \rho_o \qquad (A4)$$

(A4) donne directement I1 et utilisant (29) on conclut à la bornitude de $V(k)$.

Notons que de (4), (16) on peut obtenir

$$\|\Phi(k-d)\| \leq \frac{v(k)}{\sigma^n}, \qquad n = \mathrm{Max}\ \{n_R, n_B\} + d-1 \qquad (A5)$$

De plus de part les propriétés de la projection, on a:

$$\|\hat{\bar{p}}(k)-\hat{p}(k-\frac{1}{2})\| \leq \|\bar{p}(k-\frac{1}{2})-\hat{p}(k-1)\|\ \overline{\rho} \qquad (A6)$$

On peut donc déduire I2, I3 de l'inégalité de Schwartz et de :

$$(\frac{\hat{e}(k)}{v(k)})^2 \leq \frac{M\sigma^{2n}+\Lambda_1}{\alpha\sigma^{2n}} (V(k-1)-V(k)) + \frac{\mu\sigma^{2n}+\Lambda_1}{\mu\sigma^{2n}} (\frac{S(q^{-1})w(k)}{v(k)})^2 \qquad (A7)$$

$$\|\hat{p}(k-\frac{1}{2})-\hat{p}(k-1)\| \leq \frac{\Lambda_1}{\mu\sigma^{2n}+\Lambda_o} \frac{|\hat{e}(k)|}{v(k)} \qquad (A8)$$

ANNEXE B

Lemme : Soit φ_i, ψ_i deux suites de réels positifs tels que :

L1 : $\forall i,\ 0 \leq \psi_{i+1} \leq (\gamma+\varphi_i)\psi_i + M_\psi \quad , \quad 0 \leq \gamma < 1$

L2 : $\forall j, n : \sum_{i=j}^{n} \varphi_i \leq M_\varphi + (n+1-j)\eta_\varphi$

Alors :

$\eta_\varphi < 1-\gamma \Rightarrow \psi_i$ est bornée

Preuve : D'après L1, on a :

$$\psi_{n+1} \leq (\prod_{j=0}^{n} (\gamma+\varphi_j))\ \psi_o + (1 + \sum_{j=1}^{n} (\prod_{i=j}^{n} (\gamma+\varphi_i)))M_\psi \qquad (B1)$$

Mais :

$$\gamma + \varphi_i \leq \exp(\gamma+\varphi_i-1) \qquad (B2)$$

D'où d'après I2 :

$$\prod_{i=j}^{n} (\gamma+\varphi_i) < \xi^{n+1-j} \quad (\exp \ M_\varphi) \tag{B3}$$

avec

$$\xi = \exp - (1-\gamma-\eta_\varphi) \tag{B4}$$

On en déduit

$$\psi_{n+1} < (\exp M_\varphi)(\xi^{n+1} \ \psi_o + (1+\xi \ \frac{1-\xi^n}{1-\xi}) M_\psi) \tag{B5}$$

<u>Résumé de la preuve du théorème 2</u>

<u>1ère étape</u> : Représentation d'état du système bouclé.

Reprenons (10), (20), (21)

$$B(q^{-1}) \ u(k-d) = A(q^{-1})y(k) - w(k) \tag{B6}$$

$$C_2(q^{-1}) \ y(k) = \hat{p}(k-1)^t \ \Phi(k-d) + \hat{e}(k) \tag{B7}$$

$$\frac{1}{b_o(k-d)} \ C_2(q^{-1})y^M(b) = \frac{\hat{p}(k-d)^t}{b_o(k-d)} \Phi(k-d) \tag{B8}$$

et posons $\delta(k)$ le vecteur (sa première composante est nulle) :

$$\delta(k) = \hat{p}(k-1) - \frac{b_o(k-1)}{b_o(k-d)} \ \hat{p}(k-d) \tag{B9}$$

et $y^*(k)$ la suite

$$y^*(k) = C_2(q^{-1}) \ y^M(k) \tag{B10}$$

De (B6), (B7), (B8) on obtient

$$C_2(q^{-1})y(k) = \frac{b_o(k-1)}{b_o(k-d)} \ y^*(k) + \delta(k)^t\Phi(k-d) + \hat{e}(k) \tag{B11}$$

$$C_2(q^{-1})B(q^{-1})u(k-d) = A(q^{-1}) \ \frac{b_o(k-1)}{b_o(k-d)} \ y^*(k) + A(q^{-1}) \ \delta(k)^t\Phi(k-d) \tag{B12}$$

$$+ A(q^{-1})\hat{e}(k) - C_2(q^{-1})w(k)$$

On introduit alors le vecteur suivant

$$X(k)^t = (y(k-1) \ \dots \ y(k-n_Y) \ u(k-d-1) \ \dots \ u(k-n_U))^t \tag{B13}$$

avec

$$n_Y = n_R + n_A + d, \quad n_U = \mathrm{Max}\{n_{C_2}, \ n_A+2d-1\} + n_B \tag{B14}$$

On peut réécrire (B11), (B12) sous la forme :

$$X(k+1) = (F+\Delta F_k)\ X(k) + HY^*(k) + HE(k) + GW(k) \qquad (B15)$$

où F est une matrice de polynôme caractéristique $C_2(q^{-1})^2 B(q^{-1})$, ΔF_k est une matrice dont les éléments sont des composantes de $\delta(k)$ ou $a_i\ \delta(k-i)$, (a_i coefficient de $A(q^{-1})$), H est une matrice dont les éléments sont les coefficients a_i, G est une matrice dont les éléments sont les coefficients de $C_2(q^{-1})$,

$$E(k)^t = (\hat{e}(k) \ldots \hat{e}(k-n_A)) \qquad (B16)$$

$$Y^*(k)^t = \left(\frac{b_o(k-1)}{b_o(k-d)}\, y^*(k) \ldots \frac{b_o(k-1-n_A)}{b_o(k-d-n_A)}\, y^*(k-n_A)\right) \qquad (B17)$$

$$W(k)^t = (w(k) \ldots w(k-n_{C_2})) \qquad (B18)$$

Puisque F est asymptotiquement stable, il existe une norme telle que :

$$\|X(k+1)\| \leq (\xi+\|\Delta F_k\|)\|X(k)\| + \|HY^*(k)\| + \|HE(k)\| + \|GW(k)\| \qquad (B19)$$

avec

$$\xi < 1 \qquad (B20)$$

<u>2e étape</u> : une inégalité sur $v(k)$.

D'après (B8) et en utilisant les définitions de $X(k)$ et $\Phi(k-d)$, on a :

$$|u(k-d)| \leq \frac{1}{b_o(k-d)} (\|\hat{p}(k-d)\|.\|X(k)\| + |y^*(k)|) \qquad (B21)$$

D'où en reprenant la définition (4) de $v(k)$

$$v(k) \leq \sigma\, v(k-1) + \left(1+\frac{\|\hat{p}(k-d)\|}{|b_o(k-d)|}\right)\|X(k)\| + v + \frac{|y^*(k)|}{|b_o(k-d)|} \qquad (B22)$$

<u>3e étape</u> : utilisation du lemme.

Rassemblant (B19) et (B22), on obtient le système :

$$\begin{aligned} \|X(k+1)\| &\leq (\xi+\Delta_k^1)\ \|X(k)\| + \sigma\ \Delta_k^2\ v(k-1) + M_x \\ v(k) &\leq J\ \|X(k)\| + \sigma\ v(k-1) + M_v \end{aligned} \qquad (B23)$$

où utilisant les bornitudes données par (13), I1, I2, H4, on a :

$$\Delta_k^1 = \|\Delta F_k\| + J\ \Delta_k^2 \qquad (B24)$$

$$\Delta_k^2 = \|H\| \frac{\|E(k)\|}{v(k)} + \|G\| \frac{\|W(k)\|}{v(k)} \tag{B25}$$

$$J > 1 + \frac{\|\hat{p}(k-d)\|}{|b_o(k-d)|} \tag{B26}$$

$$M_x > \|H\| \|Y*(k)\| + M_v \Delta_k^2 \tag{B27}$$

$$M_v > v + \frac{|y*(k)|}{|b_o(k-d)|} \tag{B28}$$

Alors puisque ξ et σ sont strictement plus petits que 1, on peut choisir γ (fonction de ξ et σ) et p_1, p_2 (fonction de ξ, σ et J) tels que L1 soit établie avec :

$$\phi_k^2 = p_1^2 \|X(k)\|^2 + p_2^2 v(k-1)^2, \quad \varphi_k = \Delta_k^1 + \sigma \frac{p_1}{p_2} \Delta_k^2 \tag{B29}$$

Par ailleurs d'après la définition de ΔF_i, on a :

$$\sum_{i=j}^{n} \|\Delta F_i\| < (1+ \operatorname*{Max}_{1\leq i\leq n_A} |a_i|)(n_A+1) \sum_{i=j-n_A}^{n} \|\delta(i)\| \tag{B30}$$

Mais on a aussi avec (B9), (B26) et I3 :

$$\sum_{i=j-n_A}^{n} \|\delta(i)\| < J(d-1) \sum_{k=j-n_A-d+2}^{n} \|\hat{p}(k-1) - \hat{p}(k-2)\| \tag{B31}$$

$$< J(d-1)[(M_p+(n_A+d-2)L_pL_s\eta)+(n-j+1)L_pL_s\eta] \tag{B32}$$

De même, de (B16), (13), I2, on peut obtenir

$$\sum_{i=j}^{n} \frac{\|E(i)\|}{v(i)} < \frac{n_A+1}{\sigma^{n_A}} \sum_{k=j-n_A}^{n} \frac{|\hat{e}(k)|}{v(k)} \tag{B33}$$

$$< \frac{n_A+1}{\sigma^{n_A}} [(M_e+n_AL_eL_s\eta) + (n-j+1)L_eL_s\eta] \tag{B34}$$

En faisant de même pour $\frac{\|W(i)\|}{v(i)}$, on peut établir L2 avec :

$$\eta_\varphi = [M_1JL_pL_s + (J+\sigma \frac{p_1}{p_2}) (M_2L_e L_s+M_3)] \eta \tag{B35}$$

où M_1, M_2, M_3 ne dépendent que de σ, n_A, n_{c_2}, d et des coefficients de $A(q^{-1})$, $C_2(q^{-1})$. Rappelons que $\frac{p_1}{p_2}$ décroit avec J et que J croit avec $\overline{M}_p$ dans I1 et M_b dans H4.

REFERENCES

[Ioannou, Kokotovic] P.A. Ioannou, P.V. Kokotovic : "Singular perturbations and robust redesign of adaptive control". 21st IEEE Conference on Decision and Control, Decembre 1982.

[Kosut, Friedlander] R.L. Kosut, B. Friedlander : "Performance robustness properties of adaptive control systems". 21st IEEE Conference on Decision and Control. Décembre 1982.

[Kreisselmeier] G. Kreisselmeier : "On adaptive state regulation". IEEE Trans AC, February 1982.

[Landau, Lozano] I.D. Landau, R. Lozano : "Unification of discrete time explicit model reference adpative Control designs". Automatica Vol. 17, No 4. 1981.

[Praly 1] L. Praly : "MIMO indirect adaptive control : stability and robustness". CAI Ecole des Mines de Paris. Novembre 1982. Soumis pour publication.

[Praly 2] L. Praly : "Towards a direct adaptive control scheme for general disturbed MIMO systems". Conférence de l'INRIA Versailles, Décembre 1982.

[Egardt] B. Egardt : "Stability of adaptive controllers". Lecture notes in Control and Information Sciences no 20. Springer Verlag, 1979.

[Goodwin et al.] G.C. Goodwin, K.S. Sin, K.K. Saluja : "Stochastic adaptive control and prediction - the general delay colored noise case". IEEE Trans. AC, Octobre 1980.

[Rohrs et al.] C.E. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, G. Stein : "Robustness of adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics". 21st IEEE Conference on Decision and Control, Décembre 1982.