

École Nationale Supérieure des Mines de Paris

SYSTÈMES DYNAMIQUES :

Nombre de rotation et dynamique symbolique

Laurent PRALY

Révision d'octobre 2007



# Table des Matières

<b>1 Synchronisation et nombre de rotation</b>	<b>3</b>
1.1 Le phénomène de synchronisation dans la nature . . . . .	3
1.2 Mise en évidence d'un homéomorphisme du cercle . . . . .	4
1.2.1 Cas des deux oscillateurs faiblement couplés . . . . .	4
1.2.2 Cas du potentiel d'action . . . . .	6
1.3 Homéomorphismes de $\mathbb{S}^1$ . . . . .	10
1.4 Stabilité structurelle de l'accrochage de phase . . . . .	11
1.5 Encore plus d'arithmétique . . . . .	12
1.6 Exercices corrigés . . . . .	15
1.6.1 Exercice 1 . . . . .	15
1.6.2 Exercice 2 . . . . .	19
<b>2 Chaos déterministe et dynamique symbolique</b>	<b>25</b>
2.1 Dynamique de la balle rebondissant sur une table oscillante . . . . .	25
2.2 Modèle simplifié : le fer à cheval de Smale . . . . .	31
2.2.1 Construction de l'homéomorphisme $f$ . . . . .	31
2.2.2 Dynamique symbolique . . . . .	33
2.2.3 $\phi$ est un homéomorphisme . . . . .	35
2.2.4 Conclusion . . . . .	38
2.3 Exercices corrigés . . . . .	39
2.3.1 Exercice 1 . . . . .	39
2.3.2 Exercice 2 . . . . .	45
<b>Bibliographie</b>	<b>49</b>
<b>Annexes</b>	<b>51</b>
<b>A Application de Poincaré et Solutions périodiques</b>	<b>53</b>
A.1 Introduction . . . . .	53
A.2 Rappels sur les propriétés d'un flot . . . . .	54
A.3 Construction et propriétés de l'application de Poincaré . . . . .	55
A.4 Solution périodique . . . . .	59
<b>B Nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle</b>	<b>65</b>
B.1 Introduction . . . . .	65
B.2 Relèvements et propriétés . . . . .	66
B.3 Nombre de rotation et propriétés . . . . .	73

B.4	Nombre de rotation fonction de l'homéomorphisme . . . . .	80
B.5	Conjugaison . . . . .	86

# Chapitre 1

## Synchronisation et nombre de rotation

Ce chapitre aborde un aspect de la théorie des oscillations non linéaires, théorie qui a retenu l'attention de grands esprits comme Henri Poincaré qui fut élève des Mines de Paris dans les années 1870.

### 1.1 Le phénomène de synchronisation dans la nature

En 1665, Christiaan Huygens qui avait accroché au mur côte à côte deux horloges à pendule de fabrication identique observa un phénomène curieux qu'il appela "sympathie" : quelles que soient les positions de départ des balanciers, au bout d'environ une demie-heure ils se mettaient à osciller en opposition de phase avec exactement la même période. (Voir [2]).

Certaines<sup>1</sup> lucioles d'Asie du Sud-Est offrent un autre exemple de "sympathie" ou plus exactement selon la terminologie actuelle de "synchronisation". Des lucioles mâles se regroupent dans les arbres la nuit et se mettent à lancer des éclairs en parfaite synchronie dans le but d'attirer les femelles. Cette synchronisation ne se produit pas spontanément et ce n'est que vers le milieu de la nuit que les lucioles finissent par émettre des flashes synchronisés.

De nombreux exemples de synchronisation existent aussi dans l'espace. Le plus connu est celui de la lune dite en résonance spin-orbite 1:1 du fait que la période de rotation autour de son axe est égale à celle de la révolution autour de la terre. Ainsi, la lune nous présente toujours la même face alors que l'autre face nous est toujours cachée. Un autre cas de résonance spin-orbite est celui de Mercure. La planète fait trois tours sur elle-même pendant qu'elle effectue deux révolutions autour du Soleil d'où une résonance spin-orbite 3:2. Citons encore que tous les satellites de Saturne pour lesquels la période de rotation est connue, à l'exception de Pœbé et d'Hypérion, sont synchrones. Les orbites des trois paires Mimas-Téthys, Encelade-Dioné et Titan-Hypérion sont en résonance : Mimas et Téthys sont en résonance 1:2, i.e. la période de révolution de Mimas est exactement la moitié de celle de Téthys; Encelade et Dioné sont également en résonance 1:2; Titan et Hypérion sont en résonance 3:4.

Dans les trois types d'exemple que nous venons de mentionner une explication du phénomène de synchronisation peut-être donnée à partir d'un modèle de la dynamique décrite par le système suivant d'oscillateurs faiblement couplés :

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \Omega_1 + \varepsilon g_1(\theta_1, \theta_2, \varepsilon) \quad , \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \Omega_2 + \varepsilon g_2(\theta_1, \theta_2, \varepsilon). \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Ce paragraphe est une reproduction du cours de modélisation de l'électrophysiologie cardiaque de J.-P. Françoise de l'université P.-M. Curie.

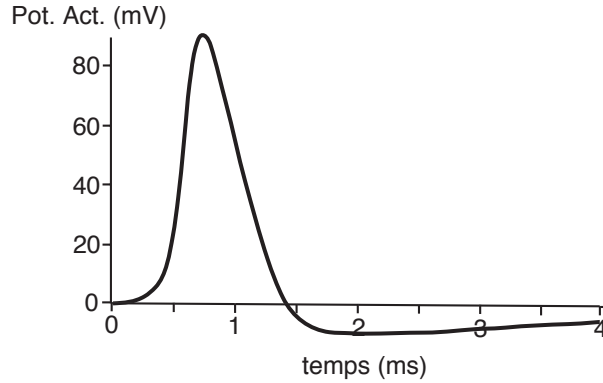


Figure 1.1: Potentiel d'action induit par des courants ioniques

Ici les  $\theta_i$ , définis modulo  $2\pi$ , sont les abscisses curvilignes de chaque oscillateur sur son cycle – la position des pendules de Huygens, la position de la lune par rapport à son axe et par rapport à la terre, ... – les  $\Omega_i$  sont les vitesses de rotation nominales hors couplage, les  $g_i$  décrivent les termes de couplages et  $\varepsilon$  est un petit paramètre. On obtient une résonance  $p:q$  si il existe une solution périodique à ce système tel que  $\theta_1$  fait  $p$  rotations lorsque  $\theta_2$  en fait  $q$ . On dit alors qu'il y a accrochage de phase.

Le<sup>2</sup> phénomène d'accrochage phase n'est pas limité aux oscillateurs couplés. Ainsi par exemple, lorsqu'on injecte un courant électrique pour stimuler un neurone, la différence de potentielle entre l'intérieur et l'extérieur de sa membrane est modifiée. Si l'intensité est faible, le potentiel varie en proportion. Mais si elle est plus élevée, on constate une montée brutale, dite dépolarisation, puis une descente rapide correspondant à une décharge dite hyperpolarisation (voir la figure 1.1). On appelle ce phénomène le potentiel d'action. Il a été observé expérimentalement, par exemple dans la rétine [1], dans le nerf auditif [11] ou dans l'axone du calamar [7] que, dans le cas où le stimulus est périodique, en faisant varier sa valeur moyenne et elle seule, la période des potentiels d'action engendrés reste constante pour certaines plages de variations. Et lorsque cette constante est un rationnel, disons  $\frac{p}{q}$ , il y a accrochage de la phase des potentiels d'action sur celle du stimulus puisqu'il y a  $q$  potentiels engendrés pendant  $p$  périodes du stimulus.

Dans ce chapitre nous allons montrer que l'étude de tous les phénomènes que nous venons de décrire peut être réduite à celle des itérés successifs d'une application du cercle et que c'est des questions d'arithmétiques et de théorie des nombres qui permettent d'expliquer les observations.

## 1.2 Mise en évidence d'un homéomorphisme du cercle

### 1.2.1 Cas des deux oscillateurs faiblement couplés

Reprenons le système (1.1) des deux oscillateurs faiblement couplés. En posant :

$$\tau = \frac{t}{\Omega_1} \quad , \quad \omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \quad , \quad \alpha_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{\theta_2}{2\pi} \quad , \quad \lambda = \frac{\varepsilon}{\Omega_1} \quad ,$$

<sup>2</sup>Ce paragraphe est largement inspiré de [3].

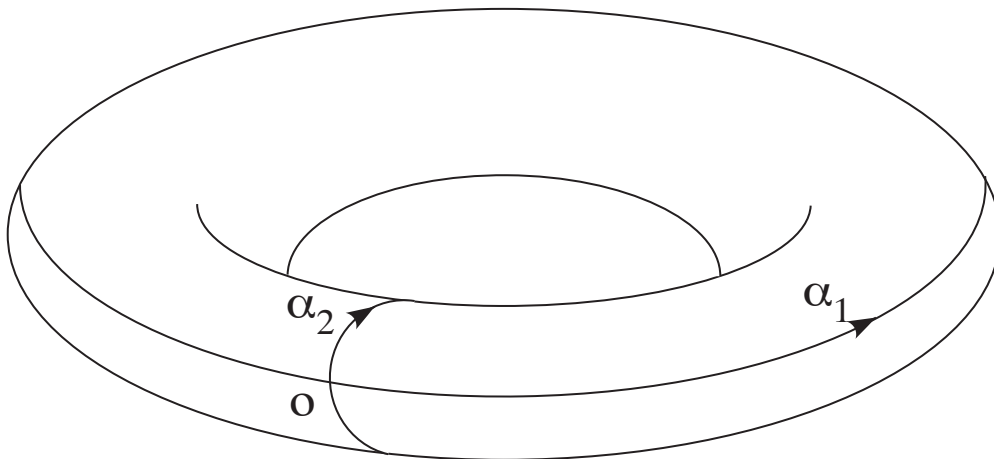


Figure 1.2: Espace d'état des deux oscillateurs.

nous pouvons nous ramener au cas où l'évolution sur le cycle de chaque oscillateur est définie modulo 1 avec une dynamique simplifiée en :

$$\frac{d\alpha_1}{d\tau} = 1 + \lambda a_1(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) \quad , \quad \frac{d\alpha_2}{d\tau} = \omega + \lambda a_2(\alpha_1, \alpha_2, \lambda). \quad (1.2)$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont des fonctions régulières, périodiques en  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de période 1. L'espace d'état pour ce système est donc le produit cartésien du cercle  $\mathbb{S}^1$  avec lui-même. C'est le tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  (voir la figure 1.2).

Pour réduire encore plus la complexité, nous allons mettre en évidence une application dont les itérés permettent de reconstituer le comportement des solutions du système (1.2). Pour cela nous commençons par observer que, si  $\lambda$  est assez petit, nous avons  $\frac{d\alpha_1}{d\tau} > 1/2$ . Donc, les solutions sur le tore reviennent régulièrement couper le cercle du tore donné par  $\{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1 = 0 \pmod{1}\}$ . Nous faisons alors de la stroboscopie, chaque flash de lumière étant déclenché par le passage à 0 de l'angle  $\alpha_1$  et nous nous intéressons à la succession de points de la solution au moment des flashes et plus précisément à la succession de leur composante  $\alpha_2$  puisque leur composante  $\alpha_1$  est nulle par définition. La transformation d'une valeur  $\alpha_2$  en sa suivante selon ce procédé définit une application  $f_\lambda$ , dite application du premier retour ou de Poincaré. Cette application dépend régulièrement de  $\alpha_2$  et est inversible car, du fait de l'unicité des solutions du problème de Cauchy, son inverse consiste à utiliser la même construction mais pour des temps négatifs. Aussi les propriétés des solutions des équations différentielles à second membre continûment différentiable implique que cette application de Poincaré est un homéomorphisme et même un difféomorphisme (un changement de variable) du cercle  $\mathbb{S}^1$  sur lui-même. Pour plus de détails nous renvoyons à l'annexe A sur les applications de Poincaré. Insistons seulement sur le fait que  $f_\lambda$  est un homéomorphisme du cercle  $\mathbb{S}^1$ , que c'est une perturbation de l'application

$$f_0(\alpha) = \alpha + \omega \pmod{1} \quad , \quad (1.3)$$

qui est tout simplement une rotation du cercle, et que, de ce fait, au moins pour  $\lambda$  proche de 0,  $f_\lambda$  préserve l'orientation sur le cercle, i.e. si  $x, y, z$  sont trois points qui se suivent dans cet ordre sur le cercle selon son orientation, alors il en est de même de  $f_\lambda(x), f_\lambda(y)$  et  $f_\lambda(z)$ . Comprendre ce qui se passe après de nombreux cycles des deux oscillateurs revient à étudier les itérés de ce difféomorphisme  $f_\lambda$ .

### 1.2.2 Cas du potentiel d'action

Pour analyser le phénomène de synchronisation observé pour les potentiels d'action des neurones, nous faisons appel à un modèle dit de type impulsif ou “intègre-et-tire”. Il décrit l'évolution du potentiel  $V$  au cours du temps comme celle d'une solution d'une équation différentielle du type :

$$\frac{dV}{dt}(t) = \phi(t, V(t)) \quad (1.4)$$

avec  $V$  partant d'une valeur  $V_r$  dite de *réinitialisation*, mais ceci que tant que  $V(t)$  reste inférieur à une valeur  $V_s$  dite *seuil*. Au moment  $t_s$  où le seuil  $V_s$  est franchi, le potentiel  $V$  est réinitialisé à  $V_r$ . Louis Lapicque a proposé en 1907 dans [12] le tout premier modèle de ce type en représentant le comportement de la membrane du neurone comme un circuit électrique fait d'une résistance et d'une capacité en parallèle. Dans ce cas l'équation différentielle (1.4) est simplement :

$$C \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{R}(V - V_0) + I(t) \quad (1.5)$$

où  $C$  est la capacité membranaire,  $V_0$  est le potentiel de repos,  $R$  est la résistance membranaire et  $I$  est le courant à travers la membrane, le stimulus. Nous nous intéressons au cas où ce stimulus est  $T$ -périodique, i.e. s'écrit :

$$I(t) = \lambda + I_0(t)$$

où  $I_0$  satisfait :

$$\int_0^T I_0(s) ds = 0 \quad , \quad I_0(t+T) = I_0(t) \quad \forall t .$$

Pour travailler avec des variables normalisées et une période de 1, nous posons :

$$\tau = \frac{t}{T} \quad , \quad v = \frac{V - V_r}{V_s - V_0} \quad , \quad a = \frac{T}{RC} \quad , \quad b = \frac{T}{C} .$$

Dans ce cas, (1.5) devient simplement :

$$\frac{dv}{d\tau} = -av + bI(\tau) \quad , \quad (1.6)$$

où le potentiel normalisé  $v$  évolue entre une réinitialisation à 0 et un seuil à 1 et la période du stimulus est 1. Pour illustrer notre propos dans la suite, suivant [3], nous prenons :

$$a = \frac{1}{500} \quad , \quad I(\tau) = \lambda + \frac{a}{b} [0.5 \cos(2\pi\tau) + 0.2 \sin(4\pi\tau)] \quad . \quad (1.7)$$

Dénotons par  $\Phi_\lambda(s, t)$  la solution de (1.6) à l'instant  $s$ , issue d'une réinitialisation à 0 à l'instant  $t$ . Puisque le stimulus est 1-périodique, nous avons :

$$\Phi_\lambda(s+1, t+1) = \Phi_\lambda(s, t) .$$

L'instant de décharge  $\tilde{f}_\lambda(t)$  qui suit l'instant de réinitialisation  $t$  est donné par :

$$\tilde{f}_\lambda(\tau) = \inf_{s \geq t: \Phi_\lambda(s, t) > 1} s \quad . \quad (1.8)$$

Il est établi dans [3] :



**Proposition 1** *Pour tout  $\lambda$  tel que le stimulus 1-périodique satisfait :*

$$I(t) > \frac{a}{b} \quad \forall t \in [0, 1) \quad (1.9)$$

*l'application  $t \mapsto \tilde{f}_\lambda(t)$  est bien définie pour tout  $t$ . Elle est strictement croissante, aussi régulière que la fonction  $t \mapsto I(t)$ , et satisfait :*

$$\tilde{f}_\lambda(t+1) = \tilde{f}_\lambda(t) + 1. \quad (1.10)$$

*Aussi, pour tout  $t$ , l'application  $\lambda \mapsto f_\lambda(t)$  est strictement décroissante pour  $\lambda$  tel que (1.9) est satisfait.*

Pour  $a$ ,  $b$  et  $I$  donnés en (1.7), la condition (1.9) est satisfaite pour :

$$\frac{b\lambda}{a} > 1.6073.$$

Du fait de la propriété (1.10), nous pouvons de nouveau définir un homéomorphisme  $f_\lambda$  du cercle  $\mathbb{S}^1$  en posant :

$$f_\lambda(t) = \tilde{f}_\lambda(t) \pmod{1}. \quad (1.11)$$

Nous donnons à la figure 1.3.a le graphe de cet homéomorphisme dans le cas de (1.7) avec  $\frac{b\lambda}{a} = 1.61350000$ .

Partant d'un instant  $t_0$ , les instants successifs  $t_n$  de décharge sont donnés récursivement par :

$$t_{n+1} = \tilde{f}_\lambda(t_n).$$

La durée moyenne des potentiels d'action  $\tilde{\rho}_\lambda(t_0)$  est donc donnée par :

$$\tilde{\rho}_\lambda(t_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_n - t_0}{n}. \quad (1.12)$$

D'après la Proposition 9 en annexe B (voir aussi [3])  $\tilde{\rho}_\lambda$  ne dépend pas de  $t_0$ .

Nous donnons à la figure 1.4 le graphe de  $\tilde{\rho}_\lambda$ , la durée moyenne des potentiels d'action, que nous avons obtenu en simulation, dans le cas de (1.7), pour des valeurs de  $\frac{b\lambda}{a}$  comprises entre 1.6085 et 1.6105. Nous observons bien des plages de valeurs de  $\frac{b\lambda}{a}$  pour lesquelles cette durée moyenne est constante comme nous l'avions mentionné à la fin du paragraphe 1.1. Du fait du calcul numérique, nous ne pouvons bien sûr rien dire sur la rationalité des valeurs de ces constantes. Par contre nous observons que, pour  $\frac{b\lambda}{a}$  pris dans une de ces plages et par exemple pour  $\frac{b\lambda}{a} = 1.61350000$  dans l'intervalle  $[1.61344, 1.61351]$ , le graphe de l'homéomorphisme  $f_\lambda$  composé avec lui même, soit le graphe de  $f_\lambda^2 = f_\lambda \circ f_\lambda$ , présenté à la figure 1.3.b coupe la diagonale.  $f_\lambda^2$  a donc un point fixe. D'après la Proposition 9 en annexe B, nous sommes donc assurés dans ce cas que  $\tilde{\rho}_\lambda$  est bien rationnel (le calcul donne  $\tilde{\rho}_\lambda = 483.50000 \pm 0.000005$ ).

Encore plus intéressante est la forme du graphe, fait d'une succession de marches d'escalier de durée "aléatoire", dit en escalier du diable.

Les paragraphes qui suivent et l'annexe B sont dédiés à l'étude théorique des itérés des homéomorphismes du cercle. Elle va nous permettre d'établir des liens entre rationalité et périodicité ( $\Rightarrow$  accrochage de phase) et de voir comment un escalier du diable apparaît très naturellement lorsqu'un paramètre varie.

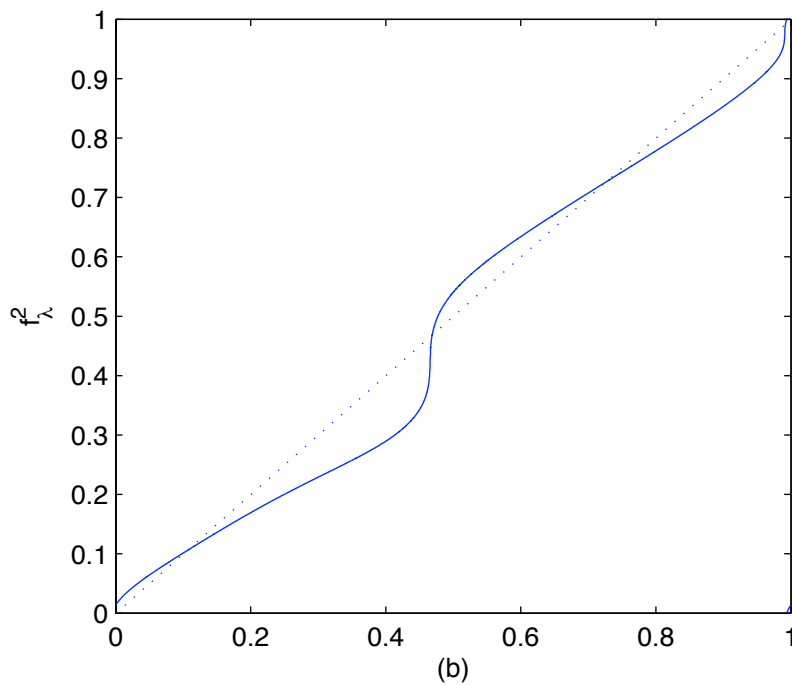
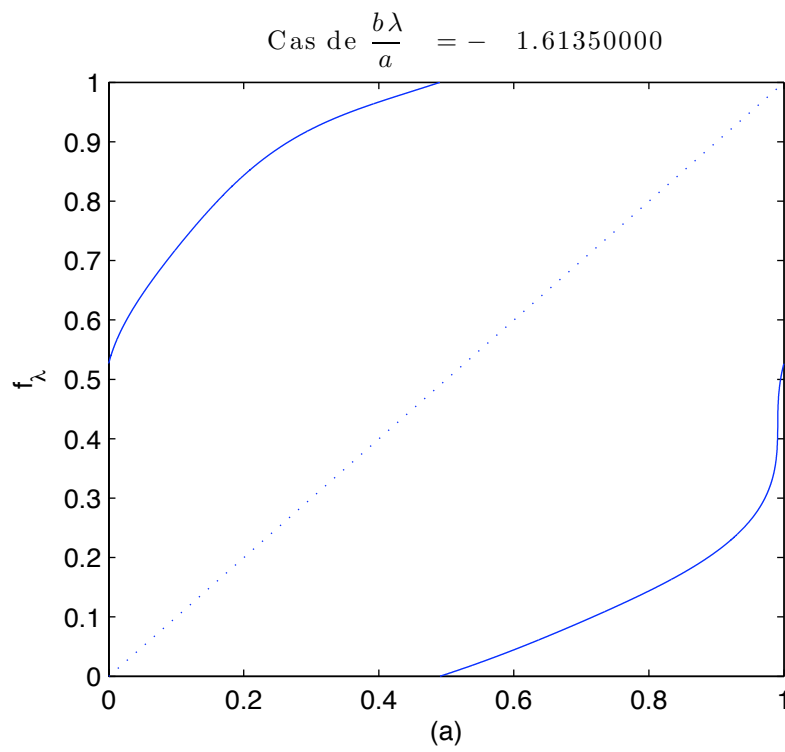


Figure 1.3: Graphes d'homéomorphismes du cercle (identifier les côtés opposés du rectangle).

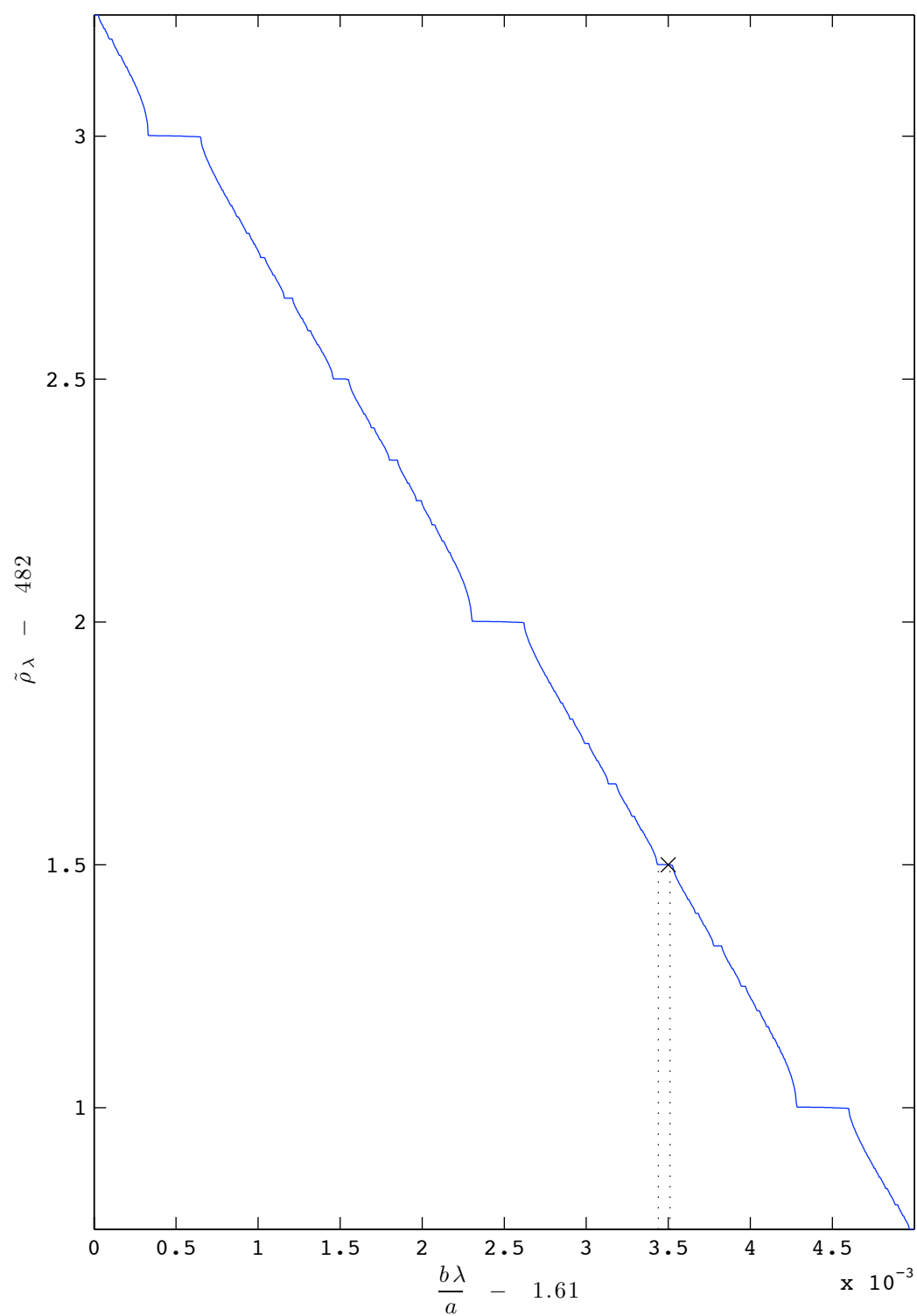
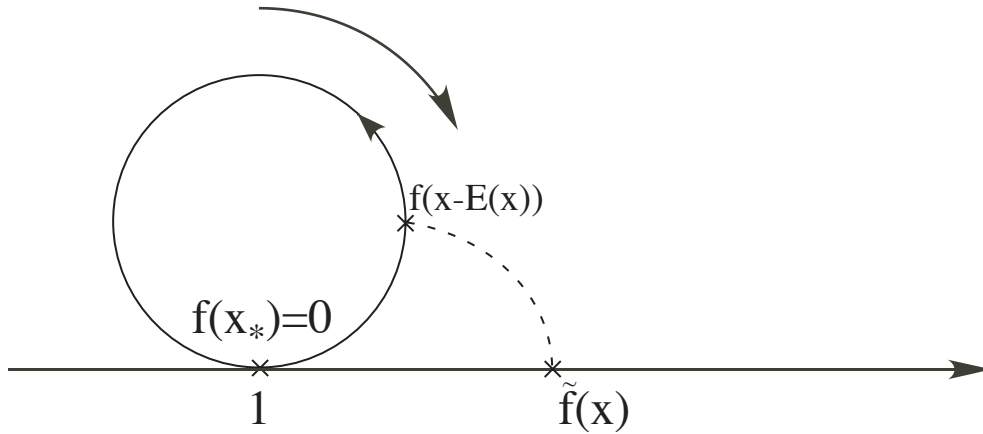


Figure 1.4:  $\tilde{\rho}_\lambda$  en fonction de  $\frac{b\lambda}{a}$

Figure 1.5:  $\tilde{f} = \text{rel\`evement de } f$ .

### 1.3 Homéomorphismes de $\mathbb{S}^1$

Considérons un homéomorphisme  $f : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$ , c'est à dire une application a priori non linéaire, régulière, inversible et d'inverse régulière. Un graphe typique d'une telle application est représenté à la figure 1.3. Un point du cercle  $\mathbb{S}^1$  est associé à un réel modulo 1. Voyons comment associer à  $f$  une bijection notée  $\tilde{f}$  et définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier en déroulant le cercle. Nous considérons ici le cas où  $f$  ne change pas l'orientation sur  $\mathbb{S}^1$  (localement,  $f$  est croissante en quelque sorte). L'autre cas se ramène au cas "croissant" en considérant  $f \circ f = f^2$  au lieu de  $f$ . Soit  $x_*$ , l'unique point de  $[0, 1[$ , tel que  $f(x_*) = 0 \pmod{1}$ . Alors  $\tilde{f}$  est définie sur l'intervalle  $[0, 1[$  par (voir la figure 1.5)

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x < x_* \\ f(x) + 1 & \text{si } x_* \leq x < 1 \end{cases}$$

Maintenant, pour  $x$  est en dehors de  $[0, 1[$ ,  $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x - E(x)) + E(x)$  où  $E(x)$  est la partie entière de  $x$ . On définit ainsi une bijection régulière et d'inverse régulière de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $x \in [0, 1[$  et tout entier  $n$ , considérons le réel

$$\tilde{\rho}_n(x) = \frac{\tilde{f}^n(x) - x}{n} = \frac{[\tilde{f}^n(x) - \tilde{f}^{n-1}(x)] + [\tilde{f}^{n-1}(x) - \tilde{f}^{n-2}(x)] + \dots + [\tilde{f}(x) - x]}{n},$$

c'est à dire la moyenne des incréments  $u_{n+1} - u_n$  de la suite :

$$u_{n+1} = \tilde{f}(u_n) \quad , \quad u_0 = x .$$

D'après la Proposition 9 en annexe B, cette suite converge et sa limite est indépendante de  $x$ . On note  $\rho_f$  cette limite modulo 1.

Si  $f$  est une simple rotation d'une fraction  $\alpha \in [0, 1[$  de tour, i.e. on a  $\tilde{f}(x) = x + \alpha$ , alors  $\rho_f = \alpha$ . Ceci justifie la dénomination:  $\rho_f$  est appelé nombre de rotation. Il a été introduit par Poincaré.

D'après les Propositions 9, 12 et 11 en annexe B,

1. nous avons  $\rho_{f^r} = r\rho_f \pmod{1}$ ;

2.  $\rho_f$  est le rationnel  $p/q$ , avec  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux ( $0 < p < q$ ), si et seulement si il existe  $\bar{x} \in [0, 1[ \pmod{1}$  tel que  $f^q(\bar{x}) = \bar{x}$ . Alors toute trajectoire issue de  $\bar{x}$  du système sur  $\mathbb{S}^1$  :

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1.13)$$

est périodique de période  $q$  (et fait  $p$  fois le tour du cercle avant de revenir en  $\bar{x}$ ). C'est dans ce cas qu'il y a accrochage de phase tant pour les deux oscillateurs couplés que pour les potentiels d'action.

3. si  $f$  est suffisamment régulier et  $\rho_f$  est irrationnel, pour tout  $x$ , les itérés de  $f$  donne un ensemble  $\{f^n(x) \mid n > 0\}$  dense dans  $[0, 1[ \pmod{1}$ . Alors toute trajectoire de (1.13) est partout dense sur le cercle (comportement dit ergodique).
4.  $\rho_f$  est une fonction continue et croissante de  $f$ , i.e.

$$a) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \sup_{x \in \mathbb{S}^1} |f(x) - g(x)| \leq \delta \Rightarrow |\rho_f - \rho_g| \leq \varepsilon,$$

$$b) \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \rho_f \leq \rho_g.$$

Pour plus de détails nous renvoyons à l'annexe B sur le nombre de rotation.

## 1.4 Stabilité structurelle de l'accrochage de phase

Étudions maintenant l'influence du paramètre  $\lambda$  dans (1.2) ou dans (1.8)-(1.11). Dans les deux cas, nous avons vu que l'homéomorphisme  $f_\lambda$  est une fonction continue en  $\lambda$ . Soit  $\rho(\lambda)$  son nombre de rotation. Ce n'est rien d'autre que  $\tilde{\rho}_\lambda$  modulo 1 lorsque  $\tilde{\rho}_\lambda$  est donné par (1.12) dans le cas (1.8)-(1.11). C'est aussi une fonction continue de  $\lambda$  (voir la Proposition 12 en annexe B). Supposons que les fonctions  $a_1$  et  $a_2$  pour (1.2) ou  $I_0$  pour (1.8)-(1.11) n'ont pas de structures particulières hormis leur régularité. On parle alors de fonctions génériques. Dans ce cas, on peut s'attendre à ce que  $\lambda \mapsto \rho(\lambda)$  ne soit pas une fonction constante et que donc elle prenne une infinité de fois des valeurs rationnelles.

Supposons d'abord que, pour une certaine valeur  $\lambda_*$  de  $\lambda$ ,  $\rho(\lambda_*) = 0$ . Cela veut dire que  $f_{\lambda_*}$  admet au moins un point fixe noté  $\alpha_1$ . Comme, les fonctions  $a_1$  et  $a_2$  ou  $I_0$  sont génériques, nous pouvons supposer que le graphe de  $f_{\lambda_*}$  coupe de façon transverse la première diagonale en  $\alpha_1$ . Mais alors, le fait que  $f_{\lambda_*}$  est une bijection sur  $\mathbb{S}^1$  implique l'existence d'un autre point fixe  $\alpha_2$  différent de  $\alpha_1$ . Par généralité, on peut encore supposer qu'en  $\alpha_2$ , le graphe de  $f_{\lambda_*}$  coupe de façon transverse la première diagonale. (Voir la figure 1.3.b). Ainsi, dans le cas générique,  $f_{\lambda_*}$  admet un nombre  $2m$  qui ne peut être que pair de points fixes distincts notés  $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_{2m} < 1$ . Il est alors facile de voir qu'ils sont alternativement stables et instables pour le système dynamique sur  $\mathbb{S}^1$  :

$$x_{n+1} = f_\lambda(x_n).$$

Précisément, on a

– soit

$$\frac{df_{\lambda_*}}{d\alpha}(\alpha_{2i-1}) > 1, \quad \frac{df_{\lambda_*}}{d\alpha}(\alpha_{2i}) < 1$$

et alors  $\alpha_{2i-1}$  est instable et  $\alpha_{2i}$  est stable,

– soit

$$\frac{df_{\lambda_*}}{d\alpha}(\alpha_{2i-1}) < 1, \quad \frac{df_{\lambda_*}}{d\alpha}(\alpha_{2i}) > 1$$

et alors  $\alpha_{2i-1}$  est stable et  $\alpha_{2i}$  est instable.

Maintenant, faisons varier un petit peu  $\lambda$  autour de  $\lambda_*$ , puisque, pour chaque  $\alpha_i$ ,  $\frac{df_{\lambda_*}}{d\alpha}(\alpha_i) \neq 1$  du fait de la transversalité de l'intersection, nous sommes assurés (d'après le Théorème des fonctions implicites) que  $f_\lambda$  conserve pour  $\lambda$  voisin de  $\lambda_*$  ses  $2m$  points fixes avec  $m$  points stables et  $m$  points instables et donc que  $\rho(\lambda)$  reste égal à 0.

Ce qui vient d'être énoncé pour le cas où  $\rho(\lambda_*)$  est nul aurait pu l'être pour le cas où c'est le rationnel  $\frac{p}{q}$  puisqu'il suffit de raisonner alors non pas avec  $f_\lambda$  mais avec  $f_\lambda^q$ .

Ainsi, nous avons "établi" que, dans le cas générique, la fonction  $\lambda \mapsto \rho(\lambda)$  est localement constante là où sa valeur est rationnelle et ne peut être stationnaire là où elle est irrationnelle (voir la Proposition 15 en annexe B.) Ceci confirme bien ce que nous observons sur la figure 1.4. Le graphe de  $\rho$  a la forme d'un escalier un peu spécial dit escalier du diable: entre deux marches correspondant à des valeurs rationnelles, il y a une infinité d'autres marches à valeurs rationnelles (continuité de  $\rho$  et densité des nombres rationnels), la croissance stricte de  $\rho$  étant réalisée à ses valeurs irrationnelles ou à ses valeurs rationnelles correspondant à des situations non génériques d'intersection non transverse du graphe de  $f_\lambda$  avec la première diagonale.

Voyons ce que cela veut dire dans le cas des deux oscillateurs faiblement couplés du paragraphe 1.2.1. Supposons que, dans la situation nominale sans couplage, donc pour  $\lambda = 0$ , nous ayons accrochage de phase et donc que  $\omega$  dans (1.2) est le rationnel  $\frac{p}{q}$ . Dans le cas des pendules de Huygens,  $\omega = 1$  puisque les deux pendules sont fabriqués et réglés à l'identique. D'après (1.3) nous avons alors :

$$f_0(x) = x + \frac{p}{q} \pmod{1} \quad \forall x,$$

ou encore :

$$f_0^q(x) = x \pmod{1} \quad \forall x.$$

Nous avons donc  $\rho(0) = \frac{p}{q}$ . Mais, pour  $\lambda = 0$ , nous sommes dans une situation non générique puisque le graphe de  $f_0^q$  est confondu avec la première diagonale. Par contre, puisque la dépendance en  $\lambda$  est générique, en faisant varier un peu  $\lambda$ , on peut s'attendre à ce que le graphe de  $f_\lambda^q$  se distingue de la première diagonale. Alors, soit il ne la coupe pas et le nombre de rotation augmente. Soit il la coupe de façon transverse et, du fait de sa continuité en  $\lambda$ , le nombre de rotation reste égal à  $\frac{p}{q}$  pour  $\lambda$  proche de 0. Dans ce second cas, sauf si la condition initiale  $\alpha$  est un point fixe instable de  $f_\lambda^q$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $f_\lambda^{nq}(\alpha)$  converge vers un point fixe stable de  $f_\lambda^q$  et donc  $f_\lambda^n(\alpha)$  tend vers une orbite périodique de période  $q$ . Ainsi, après un transitoire plus ou moins long on sait ainsi que, lorsque le premier oscillateur fait  $p$  oscillations, le second fait exactement  $q$  oscillations. C'est bien ce qu'a observé Huygens avec ses deux horloges qui ont exactement les mêmes périodes. De plus, cette situation est robuste car, localement autour de ce point fixe,  $f_\lambda^q$  est une contraction stricte.

## 1.5 Encore plus d'arithmétique

Le rôle de l'arithmétique dans le comportement des homéomorphismes du cercle ne s'arrête pas dans l'explication de la dichotomie orbite périodique (nombre de rotation rationnel) ou orbite

dense (nombre de rotation irrationnel). Il apparaît aussi dans la régularité de la transformation sur le cercle qui permet de transformer un difféomorphisme du cercle en une simple rotation.

Pour illustrer ceci, commençons par remarquer, avec l'aide de la Proposition 16 en annexe B, que si  $\phi$  est un changement de variable sur  $\mathbb{S}^1$ , alors le nombre de rotation de  $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$  est le même que celui de  $f$ . Ainsi  $\rho_f$  est invariant par tout changement de paramétrage sur le cercle.

Considérons maintenant la relation d'équivalence suivante (relation de conjugaison): deux homéomorphismes  $f$  et  $g$  sont conjugués si il existe un changement de variables sur  $\mathbb{S}^1$ ,  $\phi$  tel que  $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ . Cette relation d'équivalence veut simplement dire que  $f$  et  $g$  sont, à un changement de variables près, les mêmes. Ainsi deux éléments d'une même classe ont même nombre de rotation.

La réciproque est vraie pour des nombres de rotation irrationnels. C'est le théorème de Denjoy dont la démonstration est dans le paragraphe B.5 de l'annexe B.

**Théorème 1 (Théorème de Denjoy (1932))** *Soient deux homéomorphismes  $C^2$  de  $\mathbb{S}^1$ ,  $f$  et  $g$  de même nombre de rotation  $\rho_f = \rho_g = \alpha \in [0, 1[$  irrationnel. Alors il existe un changement de variables  $\phi$  sur  $\mathbb{S}^1$  continu et tel que  $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ .*

Dans cet énoncé, il est remarquable que, même si les deux homéomorphismes  $f$  et  $g$  sont très réguliers, l'homéomorphisme  $\phi$  qui les conjuguent n'est en général que continue. La régularité de ce dernier se trouve être liée à la façon dont le nombre de rotation irrationnel est approximé par les rationnels. Pour comprendre ce phénomène, il faut remonter aux propriétés arithmétiques et diophantiennes de l'irrationnel  $\alpha$ . Supposons  $g(x) = x + \alpha \pmod{1}$  et  $f$  proche de  $g$  avec  $\rho_f = \alpha$ . On écrit  $f = g + F$  avec  $F$  petit. On cherche donc  $\phi$  proche de l'identité tel que

$$\phi(x + \alpha + F) = \phi(x) + \alpha.$$

On pose  $\phi(x) = x + \Phi(x)$  et on cherche la fonction  $\Phi$  proche de 0 satisfaisant

$$\Phi(x + \alpha + F(x)) - \Phi(x) = -F(x)$$

Si on fait l'approximation au premier ordre  $\Phi(x + \alpha + F(x)) \approx \Phi(x + \alpha)$ , on se ramène à trouver une fonction  $\Phi$ , 1-périodique satisfaisant

$$\Phi(x + \alpha) - \Phi(x) = -F(x).$$

Supposons nos données  $f$  et  $g$  suffisamment régulières pour qu'on puisse décomposer  $F$  en série de Fourier

$$F(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}/\{0\}} a_m \exp(2\pi i m x).$$

Cherchons si, au moins formellement,  $\Phi$  admet une décomposition de même type en

$$\Phi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}/\{0\}} b_m \exp(2\pi i m x).$$

Dans ce cas les  $b_m$  sont liés aux  $a_m$  par

$$b_m = \frac{a_m}{\exp(2\pi i m \alpha) - 1}.$$

Noter que les dénominateurs ne s'annulent jamais ( $\alpha$  est irrationnel). La solution formelle a donc un sens. Mais, pour passer d'une expression formelle à l'existence d'une fonction régulière, nous devons nous poser la question de la convergence. Il s'avère que  $|\exp(2\pi im\alpha) - 1|$  peut être très petit pour une infinité de valeurs de  $m$ . C'est ce qui est appelé le problème des petits diviseurs. En particulier, même si  $\sum |a_m|^2 < +\infty$ , la série en  $b_m$  peut ne pas être convergente. Les  $m$  pour lesquels le diviseur  $\exp(2\pi im\alpha) - 1$  est petit en norme correspondent à des entiers  $n$  tels que  $|m\alpha - n| \ll 1$ . Mais alors, comme

$$\exp(2\pi im\alpha) - 1 = \exp(2\pi im\alpha) - \exp(2\pi in) = 2i \exp(\pi i(m\alpha + n)) \sin(\pi(m\alpha - n)) ,$$

on a

$$|\exp(2\pi im\alpha) - 1| \geq |m\alpha - n| .$$

À ce stade, il convient de faire l'hypothèse que  $\alpha$  est un nombre irrationnel qui s'approche mal par des rationnels au sens suivant: il existe  $c, \epsilon > 0$  tel que

$$\left| \alpha - \frac{n}{m} \right| \geq \frac{c}{m^{2+\epsilon}}, \quad \forall m, n > 0.$$

Plus  $\epsilon$  est petit, moins bonne est l'approximation. La motivation est que, d'après le Théorème de Liouville (voir le Théorème 3 en annexe B), pour tout nombre réel positif  $x$  et tout entier  $n$ , il existe des entiers relatifs  $p_n$  et  $q_n \geq n$  satisfaisant :

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} .$$

Comme  $\alpha$  est irrationnel, le terme de gauche ne peut être nul. Avec la présence de  $\epsilon$ , l'hypothèse ci-dessus quantifie combien meilleure est la qualité de l'approximation par rapport à celle que l'on peut obtenir pour un nombre quelconque.

Avec cette hypothèse, on obtient

$$|\exp(2\pi im\alpha) - 1| \geq \frac{c}{m^{1+\epsilon}} .$$

Ainsi, si  $f$  est régulière, disons  $C^2$ , alors

$$\sum |a_m|^2 < \infty, \quad \sum m^2 |a_m|^2 < \infty, \quad \sum m^4 |a_m|^2 < \infty,$$

car on peut dériver terme à terme la série de Fourier au moins deux fois sans avoir de problème de convergence (en restant dans les suites de carré sommable). Comme

$$|b_m| \leq |a_m| \frac{m^{1+\epsilon}}{c}$$

on voit que

$$\sum |b_m|^2 < \infty$$

et  $\Phi$  est bien définie.

Ainsi, nous avons besoin que l'irrationnel  $\rho_f = \alpha$  soit suffisamment mal approché par des fractions rationnelles pour avoir une transformation régulière de coordonnées qui permette d'exprimer  $f$  comme une simple rotation  $x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$ .

Les cas où le nombre de rotation est rationnel est nettement plus compliqué. Deux homéomorphismes peuvent très bien avoir le même nombre de rotation rationnel sans appartenir pour autant à la même classe de conjugaison. En effet, nous savons que, si le nombre de rotation de  $f$  est tel que  $\rho_f = p/q$  avec  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux ( $0 < p < q$ ), alors  $f^q$  admet un point fixe. Maintenant, il suffit de prendre  $f^q$  et  $g^q$  avec des nombres différents de points fixes: leur nombre de rotation est nul bien qu'ils ne soient pas conjugués.



## 1.6 Exercices corrigés

### 1.6.1 Exercice 1

#### Préambule

Dans cet exercice, nous travaillons avec le cercle  $\mathbb{S}^1$  orienté, muni d'une mesure de longueur d'arc  $\ell$  et de la topologie induite par celle de  $\mathbb{R}^2$ . Pour faciliter les notations, nous prenons le rayon du cercle égal à  $\frac{1}{2\pi}$ . Une fois choisie une origine sur le cercle, l'abscisse curviligne de tout point est définie modulo 1. Alors  $\mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  ou encore l'intervalle  $[0, 1[$  de  $\mathbb{R}$  où 1 est identifié à 0 sont des espaces topologiques homéomorphes. Aussi, profitant de l'orientation de  $\mathbb{S}^1$ , nous pouvons faire rouler le cercle sur la droite réelle orientée à partir de la coïncidence des origines. De la sorte, à tout point  $x$  de  $\mathbb{S}^1$  correspond tous les points  $x + p$  de  $\mathbb{R}$  où  $p$  est un entier relatif quelconque. Inversement, à tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , il correspond un unique point de  $\mathbb{S}^1$  d'abscisse curviligne  $x - E(x)$  où  $E(x)$  est la partie entière de  $x$ , le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ . Enfin, grâce à l'orientation, nous pouvons définir un ordre cyclique sur le cercle.

#### Questions :

1. Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Sous quelles conditions sur  $a$  et  $b$  la fonction  $x \mapsto ax^2 + b$  de  $[0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$  définit-elle une fonction continue sur le cercle. Lorsque ces conditions sont satisfaites, est-ce que la fonction obtenue préserve l'orientation ?

Dans la suite nous posons :

$$f_b(x) = x^2 + b - E(x^2 + b)$$

avec le paramètre  $b$  pris dans  $]0, 1]$ .

2. Justifier brièvement le fait que  $f_b$  admet un nombre de rotation  $\rho(f_b)$ .
3. Démontrer que  $\rho(f_b)$  est nul si et seulement si  $b$  est dans  $]0, \frac{1}{4}]$  ou égal à 1.
4. À partir du comportement en  $b$  de la fonction  $\tilde{f}_b$  donnée par

$$\tilde{f}_b(x) = (\tilde{x} - E(\tilde{x}))^2 + b + E(\tilde{x}) \quad x \in \mathbb{R} ,$$

justifier le fait que  $b \mapsto \rho(f_b)$  est une fonction continue et non décroissante (modulo 1).

5. Quelle est la valeur dans  $\mathbb{R}$  de  $\lim_{b \rightarrow 1} \rho(f_b)$ .
6. Démontrer que, pour tout entier  $q$  positif, il existe  $x_q$  dans  $[0, 1[$  et  $b_q$  dans  $]0, 1]$  satisfaisant

$$f_{b_q}^q(x_q) = f_{b_q}(\dots f_{b_q}(\dots f_{b_q}(x_q))) = x_q$$

7. Soit  $x_n$ , la suite donnée par

$$x_{n+1} = x_n^2 + b \quad , \quad x_0 = 0 .$$

En application du Théorème des valeurs intermédiaires, démontrer que, pour tout entier  $q > 1$ , il existe un unique réel  $b_q$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$x_q = 1 .$$

Montrer que  $\lim_{q \rightarrow \infty} b_q$  existe et vaut  $\frac{1}{4}$ .

### Corrigé

1. La fonction  $x \mapsto h(x) = ax^2 + b$  de  $[0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$  est une fonction continue. Elle permet de définir une fonction continue sur  $\mathbb{S}^1$  si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow 1} ax^2 + b = b \pmod{1} ,$$

est un entier et donc si et seulement si  $a$  est un entier. Dans ce cas on peut se restreindre à prendre  $b$  dans  $]0, 1]$ .

La fonction  $\tilde{x} \mapsto \tilde{h} = (\tilde{x} - E(\tilde{x}))^2 + b + E(\tilde{x})$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un relèvement de  $h$  puisque c'est une fonction continue satisfaisant :

$$\tilde{h}(\tilde{x}) = h(\tilde{x} - E(\tilde{x})) \pmod{1} .$$

Ce relèvement étant une fonction croissante,  $h$  définit une application préservant l'orientation.

2. Pour tout  $b$  dans  $]0, 1]$ ,  $f_b$  est une bijection de l'intervalle  $[0, 1[$  sur lui-même. La fonction  $f_b$  donne donc lieu à un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation. De ce fait, elle admet un nombre de rotation.
3. Le nombre de rotation  $\rho(f_b)$  est nul si et seulement si  $f_b$  a un point fixe qui est solution dans  $[0, 1[$  de l'équation

$$x = x^2 + b - E(x^2 + b) .$$

Puisque  $b$  est dans  $]0, 1]$ ,  $x^2 + b$  est dans  $]0, 2[$  et donc  $E(x^2 + b)$  ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

L'équation

$$x = x^2 + b$$

admet une racine réelle si et seulement si  $b$  est inférieur ou égal à  $\frac{1}{4}$  et donc dans  $]0, \frac{1}{4}]$ . De plus dans ce cas les deux racines sont dans  $[0, 1[$  et satisfont

$$E(x^2 + b) = E(x) = 0 .$$

L'équation

$$x = x^2 + b - 1$$

admet une racine réelle si et seulement si  $b$  est inférieur ou égal à  $\frac{5}{4}$ . Mais cette racine n'est dans  $[0, 1[$  que si  $b$  est supérieur ou égal à 1 et donc si  $b = 1$ .

4. Nous avons

$$\tilde{f}_{b_1}(x) < \tilde{f}_{b_2}(x) \quad \forall x, \forall b_1 < b_2 .$$

La famille de relèvements  $b \in ]0, 1] \mapsto \tilde{f}_b$  est donc strictement croissante et continue. Il s'en suit que la fonction  $b \mapsto \rho(f_b) \pmod{1}$  est non décroissante et continue.

5. D'après la réponse ci-dessus à la question 3, nous savons que  $\rho(f_1)$  est nul. Donc d'après la question 4, nous avons

$$\lim_{b \rightarrow 1} \rho(f_b) = 1 .$$

6. Puisque la fonction  $b \mapsto \rho(f_b)$  est non décroissante et continue sur  $]0, 1[$  et

$$\rho(f_{\frac{1}{4}}) = 0 \quad , \quad \lim_{b \rightarrow 1} \rho(f_b) = 1 ,$$

c'est une surjection sur  $[0, 1[$ . Donc, pour tout entier  $q > 1$ , il existe  $b_q$  dans  $] \frac{1}{4}, 1[$  tel que

$$\rho(f_{b_q}) = \frac{1}{q} .$$

Alors  $\frac{1}{q}$  étant rationnel, il existe  $x_q$  dans  $[0, 1[$ , solution de

$$f_{b_q}^q(x_q) = x_q .$$

7. Par récurrence, nous avons

$$x_n = e_n(b) = (\dots(((b^2 + b)^2 + b)^2 \dots)^2 + b ,$$

où la puissance 2 apparaît  $n - 1$  fois. Puisque la fonction  $e$  ainsi définie est continue, strictement croissante et satisfait

$$e(0) = 0 \quad , \quad e(1) > 1 ,$$

il existe un unique réel  $b_q$  dans  $]0, 1[$  satisfaisant

$$x_q = e(b_q) = 1 .$$

Puisque nous avons

$$x_n = f_{b_q}^n(0) \quad , \quad x_q \pmod{1} = x_0 = 0$$

et que  $x_n$  ne parcourt qu'une seule fois le cercle lorsque  $n$  varie de 0 à  $q$ , nous avons

$$\rho(f_{b_q}) = \frac{1}{q} .$$

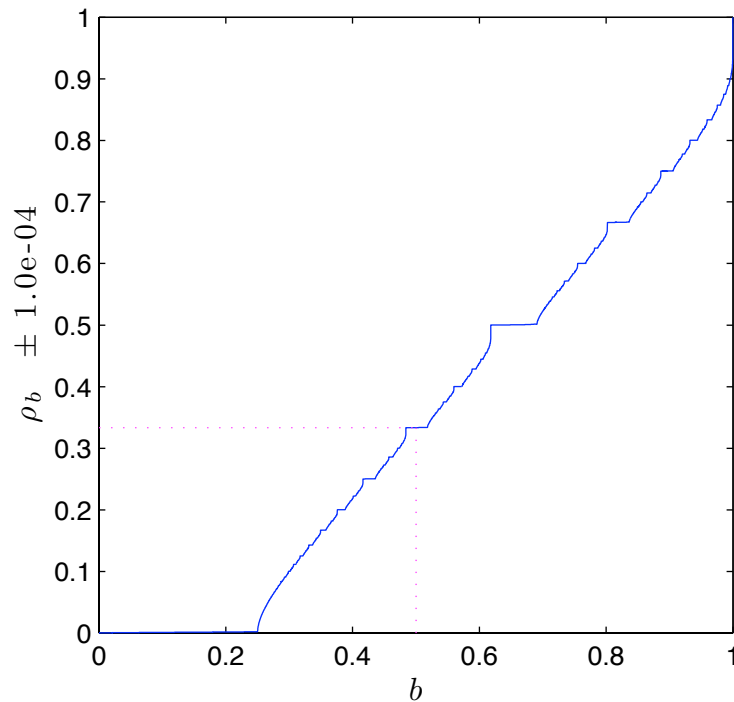
Puisque la fonction  $b \mapsto \rho(f_b)$  est non décroissante, cette égalité implique que la suite  $b_q$  est décroissante. Puisqu'elle est dans  $]0, 1[$ , elle est convergente. Soit  $b_\infty$  sa limite.

Montrons que  $b_\infty = \frac{1}{4}$ . Rappelons que nous avons

$$\rho(f_{\frac{1}{4}}) = 0 \quad , \quad \rho(f_b) > 0 \quad \forall b \in ] \frac{1}{4}, 1[ .$$

Si nous avons  $b_\infty > \frac{1}{4}$ , nous aurions

$$\rho(f_{b_\infty}) > 0 .$$

Figure 1.6: Graphe de la fonction  $b \mapsto \rho(f_b)$ 

Mais, la fonction  $b \mapsto \rho(f_b)$  étant continue sur  $]0, 1[$ , ceci contredit le fait que nous avons :

$$\rho(f_{b_\infty}) = \lim_{q \rightarrow \infty} \rho(f_{b_q}) = 0 .$$

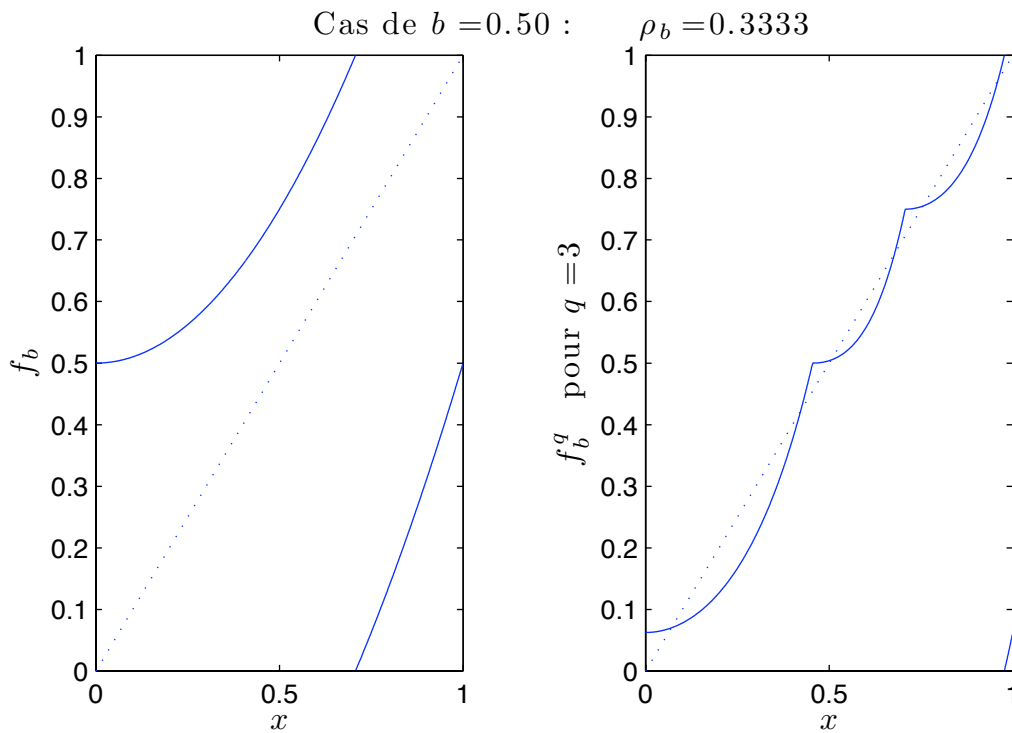
Aussi, si nous avons  $b_\infty < \frac{1}{4}$ , nous aurions

$$\rho(f_{b_\infty}) = 0 .$$

Mais, la fonction  $b \mapsto \rho(f_b)$  étant non décroissante, pour tout  $q$  suffisamment grand pour que  $b_q$  soit inférieur à  $\frac{1}{4}$ , nous aurions aussi

$$\rho(f_{b_q}) = 0 \neq \frac{1}{q} .$$

Pour compléter ce corrigé, nous donnons à la figure 1.6 la graphe de la fonction  $b \mapsto \rho(f_b)$  et à la figure 1.7 les graphes des fonctions  $f_b$  et  $f_b^3$  pour  $b = \frac{1}{2}$  pour lequel le calcul numérique donne  $\rho(f_b) = \frac{1}{3} \pm 10^{-4}$ . Ceci laisse présager le fait  $f_b^3$  a un point fixe ce qui est confirmé par simulation.

Figure 1.7: Graphe des fonctions  $f_b$  et  $f_b^3$  pour  $b = \frac{1}{2}$ 

## 1.6.2 Exercice 2

### Les données

Soient deux oscillateurs couplés :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = 1 - \lambda \sin(2\pi[\theta_1 - \theta_2]) , \\ \dot{\theta}_2 = \omega + \lambda \sin(2\pi[\theta_1 - \theta_2]) , \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $\omega$  est dans  $[0, 1]$ . Nous voulons étudier l'effet sur le comportement des solutions du couplage dont l'effet est quantifié par  $\lambda$ , paramètre pouvant prendre les valeurs :

$$0 \leq \lambda < \frac{1 - \omega}{2} .$$

Une grandeur remarquable pour ce problème est :

$$\sigma = \sqrt{(1 - \omega)^2 - 4\lambda^2} .$$

Nous admettons que la solution de (1.14) issue du point  $(\theta_1, \theta_2) = (0, \theta)$  s'écrit, pour  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{\theta}{2} + \frac{1 + \omega}{2} t + \frac{\arctan(f(t))}{2\pi} + \frac{E\left(\sigma t + \frac{c(\theta)}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{2} , \\ \theta_2(t) &= \frac{\theta}{2} + \frac{1 + \omega}{2} t - \frac{\arctan(f(t))}{2\pi} - \frac{E\left(\sigma t + \frac{c(\theta)}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{2} , \end{aligned}$$

où :

- $E(a)$  représente la partie entière de  $a$ , i.e. le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $a$ ,
- $f$  est la fonction définie par :

$$f(t) = \frac{2\lambda + \sigma \tan(t\pi\sigma + c(\theta))}{1 - \omega},$$

- et  $c$ , la fonction prenant en compte la condition initiale  $\theta$ , est définie sur  $[0, 1[$  par :

$$\begin{aligned} c(\theta) &= -\arctan\left(\frac{(2\lambda+(1-\omega)\tan(\pi\theta))}{\sigma}\right) & \text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}, \\ &= -\pi - \arctan\left(\frac{(2\lambda+(1-\omega)\tan(\pi(\theta-1)))}{\sigma}\right) & \text{si } \frac{1}{2} < \theta < 1. \end{aligned}$$

Cette fonction  $c$  est étendue à  $\mathbb{R}$  en posant :

$$c(\theta + 1) = c(\theta) - \pi.$$

Enfin, nous définissons pour chaque entier  $n$  une fonction  $\tau_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  implicitement par :

$$n = \frac{\theta}{2} + \frac{1 + \omega}{2} \tau_n(\theta) + \frac{\arctan(f(\tau_n(\theta)))}{2\pi} + \frac{E\left(\sigma\tau_n(\theta) + \frac{c(\theta)}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{2}. \quad (1.15)$$

Nous admettons la propriété :

$$\tau_n(\theta + 1) = \tau_n(\theta). \quad (1.16)$$

## Questions

1. (a) Justifier le fait que, pour chaque  $\lambda$  de  $[0, \frac{1-\omega}{2}[$ , nous pouvons définir une application de Poincaré  $\theta \in \mathbb{S}^1 \mapsto P_\lambda(\theta) \in \mathbb{S}^1$  à partir du cercle  $\{(\theta_1, \theta_2) : \theta_1 = 0\}$  sous-ensemble du tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .
- (b) Justifier le fait que cette application et son  $n$ -ième itéré s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} P_\lambda(\theta) &= \theta - 1 + (1 + \omega) \tau_1(\theta) \pmod{1}, \\ P_\lambda^n(\theta) &= \theta - n + (1 + \omega) \tau_n(\theta) \pmod{1} \end{aligned}$$

où  $\tau_n$  est la fonction définie en (1.15).

- (c) Justifier brièvement le fait que l'application  $(\lambda, \theta) \in [0, \frac{1-\omega}{2}[ \times \mathbb{S}^1 \mapsto P_\lambda(\theta) \in \mathbb{S}^1$  est continûment différentiable et que, pour chaque  $\lambda$  de  $[0, \frac{1-\omega}{2}[$ , l'application  $\theta \in \mathbb{S}^1 \mapsto P_\lambda(\theta) \in \mathbb{S}^1$  est un difféomorphisme.

Nous admettons que ce difféomorphisme préserve l'orientation du cercle.

2. (a) Pour quelles valeurs de  $\sigma$  (et donc de  $\lambda$ ), exprimées en fonction de  $\omega$ , existe-t'il  $\theta^* \in \mathbb{S}^1$  et  $T > 0$  tels que la solution  $(\theta_1(t), \theta_2(t))$  de (1.14) issue de  $(0, \theta^*)$  vérifie :

$$\theta_1(T) = 0 \quad , \quad \theta_2(T) = \theta^* .$$

- (b) Montrer que, pour un tel  $\theta^*$  (de la question 2a), il existe un entier  $q$  tel que nous avons :

$$\frac{dP_\lambda^q}{d\theta}(\theta^*) = 1 .$$

3. Montrer que, si :

$$\sigma = \frac{1 + \omega}{(1 + \sqrt{2})^2},$$

pour toutes paires  $(\theta_{10}, \theta_{20})$  et  $(\theta_1^*, \theta_2^*)$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $T$  telle que la solution  $(\theta_1(t), \theta_2(t))$  de (1.14) issue de  $(\theta_{10}, \theta_{20})$  satisfait :

$$|\theta_1(T) - \theta_1^*| + |\theta_2(T) - \theta_2^*| \leq \varepsilon.$$

### Corrigé

Commençons par observer que le second membre des équations (1.14) étant une fonction continûment différentiable et bornée de  $(\theta_1, \theta_2, \lambda)$ , les solutions de ce système sont uniques, définies sur  $] -\infty, \infty[$  et, pour chaque  $t$  fixé, elles sont des fonctions continûment différentiables de leur condition initiale  $(\theta_1(0), \theta_2(0))$  et de  $\lambda$ . De plus ce second membre étant périodique en  $\theta_1$  et  $\theta_2$  de période 1, nous pouvons considérer que les composantes  $\theta_1$  et  $\theta_2$  de chaque solution évoluent dans le cercle  $\mathbb{S}^1$  (de rayon  $\frac{1}{2\pi}$ ), i.e. le système (1.14) peut être considéré comme un système dynamique sur le tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

1. (a) Pour  $\lambda$  dans  $[0, \frac{1-\omega}{2}]$ , nous avons

$$\dot{\theta}_1 \geq 1 - \lambda > \frac{1 + \omega}{2} > 0.$$

Ainsi, quelque soit  $\theta$  dans  $\mathbb{S}^1$ , la composante  $\theta_1$  de la solution de (1.14) issue de  $(0, \theta)$ , point du cercle  $\{(\theta_1, \theta_2) : \theta_1 = 0\}$  recoupe ce cercle avant le temps  $\frac{2}{1+\omega}$ . Le point d'intersection donne l'image par l'application de Poincaré de  $\theta$ .

(b) L'application de Poincaré  $\theta \in \mathbb{S}^1 \mapsto P_\lambda(\theta) \in \mathbb{S}^1$  est définie par la valeur de la composante  $\theta_2$  de la solution de (1.14) issue de  $(0, \theta)$  à l'instant où la composante  $\theta_1$  atteint la valeur  $1 = 0 \pmod{1}$ . Ainsi  $P_\lambda(\theta)$  est obtenue comme :

$$P_\lambda(\theta) = \tilde{P}_\lambda(\theta) \pmod{1}$$

où  $\tilde{P}_\lambda(\theta)$  est défini implicitement par les équations :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\theta}{2} + \frac{1 + \omega}{2} t + \frac{\arctan(f(t))}{2\pi} + \frac{E\left(\sigma t + \frac{c(\theta)}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{2}, \\ \tilde{P}_\lambda(\theta) &= \frac{\theta}{2} + \frac{1 + \omega}{2} t - \frac{\arctan(f(t))}{2\pi} - \frac{E\left(\sigma t + \frac{c(\theta)}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{2}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

En ajoutant ces 2 équations, nous obtenons bien :

$$\tilde{P}_\lambda(\theta) = \theta - 1 + (1 + \omega) \tau_1(\theta),$$

où  $\tau_1(\theta)$  est donné dans l'énoncé.

De même, le  $n$ -ième itéré  $P_\lambda^n$  de  $P_\lambda$  est donné par la valeur de la composante  $\theta_2$  de la solution de (1.14) issue de  $(0, \theta)$  à l'instant où la composante  $\theta_1$  a effectué  $n$  tours complets, i.e.

$$P_\lambda^n(\theta) = \tilde{P}_{n,\lambda}(\theta) \pmod{1}$$

où  $\tilde{P}_{n,\lambda}(\theta)$  est définie implicitement par :

$$\begin{aligned} n &= \frac{\theta}{2} + \frac{1+\omega}{2}t + \frac{\arctan(f(t))}{2\pi} + \frac{E\left(\sigma t + \frac{c(\theta)}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{2}, \\ \tilde{P}_{n,\lambda}(\theta) &= \frac{\theta}{2} + \frac{1+\omega}{2}t - \frac{\arctan(f(t))}{2\pi} - \frac{E\left(\sigma t + \frac{c(\theta)}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{2}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

De nouveau, en ajoutant ces 2 équations, nous obtenons les expressions de l'énoncé.

- (c) D'après les remarques faites en préambule, en application du Théorème des fonctions implicites, pour chaque  $\lambda$  de  $[0, \frac{1-\omega}{2}[$ , l'application  $\theta \in \mathbb{S}^1 \mapsto \tau_1(\theta) \in \mathbb{S}^1$  est un difféomorphisme. Il en est de même de  $\theta \in \mathbb{S}^1 \mapsto P_\lambda(\theta) \in \mathbb{S}^1$ .

Par ailleurs, du fait de la continuité en  $\lambda$  et parce que  $P_\lambda$  est une bijection,  $P_\lambda$  préserve l'orientation du cercle si c'est le cas pour  $P_0$ . Comme nous avons simplement :

$$P_0(\theta) = \theta + \omega,$$

nous déduisons que  $P_\lambda$  préserve l'orientation.

2. Des questions précédentes, nous déduisons que  $P_\lambda$  admet un nombre de rotation. Celui-ci est donné par :

$$\rho(P_\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{P}_\lambda^n(0)}{n} \pmod{1}$$

où  $\tilde{P}_\lambda$  est un relèvement de  $P_\lambda$ . D'après la propriété (1.16) de la fonction  $\tau_n$ , la fonction  $\tilde{P}_\lambda$  définie en (1.17) ci-dessus est un tel relèvement. De plus il satisfait :

$$\tilde{P}_\lambda^n = \tilde{P}_{n,\lambda} = \theta - n + (1+\omega)\tau_n(\theta).$$

Nous en déduisons :

$$\rho(P_\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+\omega) \frac{\tau_n(0)}{n} - 1 \pmod{1}.$$

D'après (1.18), nous avons :

$$1 = \frac{1+\omega}{2} \frac{\tau_n(0)}{n} + \frac{\arctan(f(\tau_n(0)))}{2n\pi} + \frac{E\left(\sigma\tau_n(0) + \frac{c(0)}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{2n}.$$

Il s'en suit que  $\tau_n(0)$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $\infty$  et donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E\left(\sigma\tau_n(0) + \frac{c(0)}{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{2n} - \frac{\sigma\tau_n(0)}{2n} = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\omega + \sigma \frac{\tau_n(0)}{n}}{2} = 1.$$

Ceci donne :

$$\rho(P_\lambda) = \frac{2(1+\omega)}{1+\omega+\sigma} - 1 = \frac{1+\omega-\sigma}{1+\omega+\sigma}.$$



(a) Si il existe  $\theta^* \in \mathbb{S}^1$  et un entier  $q$  tel que

$$P_\lambda^q(\theta^*) = \theta^* , \quad (1.19)$$

alors, par construction de  $P_\lambda$ , la solution de (1.14) issue de  $(0, \theta^*)$  satisfait :

$$\theta_1(T) = 0 \quad , \quad \theta_2(T) = \theta_2(0) = \theta^*$$

si :

$$T = \tau_q(\theta^*) .$$

L'existence de  $\theta^*$  satisfaisant (1.19) est équivalente à l'existence d'un entier  $p$  tel que :

$$\frac{1 + \omega - \sigma}{1 + \omega + \sigma} = \rho(P_\lambda) = \frac{p}{q} .$$

Une condition nécessaire et suffisante est donc que  $\sigma$  s'exprime comme :

$$\sigma = \frac{q - p}{p + q} (1 + \omega)$$

ou de façon équivalente au fait que  $\frac{\sigma}{1 + \omega}$  est un nombre rationnel.

(b) Le nombre de rotation de  $P_\lambda$  est une fonction strictement croissante de  $\lambda$ . Or si nous avons :

$$\frac{dP_\lambda^q}{d\theta}(\theta^*) \neq 1$$

pour une valeur donnée de  $\lambda$ , d'après le Théorème des fonctions implicites, il existerait un voisinage de cette valeur telle que, pour tout  $\lambda$  dans ce voisinage, nous pourrions trouver  $\theta^*$  solution de :

$$P_\lambda^q(\theta^*) = \theta^* .$$

Ceci aurait pour conséquence le fait que  $\rho(P_\lambda)$  serait constant sur ce voisinage, en contradiction avec sa monotonie.

3. Soit une paire quelconque  $(\theta_{10}, \theta_{20})$ . La solution qui en est issue coupe le cercle  $\{(\theta_1, \theta_2) : \theta_1 = 0\}$  en le point noté  $(0, \theta_0)$  après un instant  $t_0$ . De même pour une autre paire quelconque  $(\theta_1^*, \theta_2^*)$ , nous pouvons associer un instant  $t^*$  et un point  $\theta^*$  du cercle. Par continuité du flot et finitude de  $t^*$ , il existe un voisinage  $V$  de  $\theta^*$ , tel que pour tout  $\theta$  dans ce voisinage, la solution de (1.14), issue de  $(0, \theta)$  est après le temps  $-t^*$  dans une boule de rayon  $\varepsilon$  centrée en  $(\theta_1^*, \theta_2^*)$ .

Pour répondre à la question, il suffit donc de trouver  $t$  tel que la solution de (1.14) issue de  $(0, \theta_0)$  est à l'instant  $t$  dans le voisinage  $V$ .

Pour  $\sigma = \frac{1 + \omega}{(1 + \sqrt{2})^2}$ , nous obtenons :

$$\rho(P_\lambda) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^2}}{1 + \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Le nombre de rotation de  $P_\lambda$  est ainsi irrationnel. Il s'en suit que, pour tout  $\theta$ , la suite  $P_\lambda^n(\theta)$  est dense dans  $\mathbb{S}^1$ . Ceci implique l'existence d'un entier  $n$  tel que la solution de (1.14), issue de  $(0, \theta)$  est à l'instant  $\tau_n(\theta)$  dans le voisinage  $V$  donné.



# Chapitre 2

## Chaos déterministe et dynamique symbolique<sup>1</sup>

Nous établissons un nouveau lien entre une dynamique continue, en l'occurrence celle d'une balle rebondissant sur une table oscillante, et une dynamique discrète, celle agissant sur une suite binaire de longueur infinie, appartenant à la famille des dynamiques dites symboliques. L'existence de ce lien résulte directement de l'existence de trajectoires de la balle à caractère fortement irrégulier et instable. Pour étudier ce lien plus précisément, nous introduisons un modèle simplifié de la dynamique de la balle connu sous le nom de fer à cheval de Smale.

### 2.1 Dynamique de la balle rebondissant sur une table oscillante

Nous étudions la dynamique verticale d'une balle pesante rebondissant avec des chocs dissipatifs sur une table oscillant verticalement<sup>2</sup>.

Soit  $-\beta \sin(\omega t)$  la position verticale de la table oscillante. Sa vitesse est :

$$W(t) = -\beta\omega \cos(\omega t) .$$

Soit  $t_i$  la suite des instants des impacts de la balle sur cette table. Soit  $U(t_j)$  la vitesse (négative) de la balle juste avant l'impact et  $V(t_j)$  (positive) celle juste après. Soit  $\alpha$  dans  $[0, 1]$  le coefficient de restitution de l'énergie lors du choc. En supposant la table suffisamment massive pour que sa vitesse ne soit pas affectée par le choc, nous avons :

$$V(t_j) - W(t_j) = -\alpha (U(t_j) - W(t_j)) .$$

Suite au choc, la balle remonte jusqu'à un instant  $T_j$  donné par :

$$\frac{0 - V(t_j)}{g} = -(T_j - t_j) .$$

Elle redescend ensuite jusqu'à sa nouvelle rencontre avec la table. Pour simplifier nous supposons que cette rencontre se fait toujours à la même altitude  $h(t_j) = cste$  (ce qui est justifié

---

<sup>1</sup>Ce chapitre est inspiré de [10] et de [14].

<sup>2</sup>Dans ce qui suit, les vitesses sont orientées positivement vers le haut.

si  $\beta$  est très petit). La conservation de l'énergie mécanique nous donne alors, juste avant le choc à l'instant  $t_{j+1} = t_j + 2(T_j - t_j)$ ,

$$U(t_{j+1}) = -V(t_j)$$

et donc :

$$\frac{U(t_{j+1}) - 0}{g} = -(t_{j+1} - T_j) .$$

En résumé, nous avons :

$$\begin{aligned} t_{j+1} &= t_j + \frac{2V(t_j)}{g} , \\ V(t_{j+1}) &= \alpha V(t_j) + (1 + \alpha)W(t_{j+1}) = \alpha V(t_j) - (1 + \alpha)\beta\omega \cos(\omega t_{j+1}) . \end{aligned}$$

Pour normaliser ces équations, posons :

$$\phi(j) = \omega t_j \quad , \quad v(j) = \frac{2\omega}{g} V(t_j) \quad , \quad \gamma = \frac{2(1 + \alpha)\beta\omega^2}{g} .$$

Nous avons obtenu le modèle :

$$\begin{aligned} \phi(j+1) &= \phi(j) + v(j) , \\ v(j+1) &= \alpha v(j) - \gamma \cos(\phi(j) + v(j)) . \end{aligned}$$

Ce modèle ne peut représenter le phénomène physique que tant que  $v(j)$  est positif ou nul. Si  $v(j)$  devient négatif, le modèle cesse d'être représentatif. Par ailleurs, comme nous ne nous intéressons qu'à la dynamique des retours de la balle sur la table oscillante, et du fait de la périodicité de la fonction cosinus, nous pouvons prendre dans ces équations  $\phi(j)$  modulo  $2\pi$ . Cette dynamique est donc :

$$x(j+1) = \begin{pmatrix} \phi(j+1) \\ v(j+1) \end{pmatrix} = f(\phi(j), v(j)) = f(x(j)) ,$$

où  $f$  est l'application :

$$f(\phi, v) = \begin{pmatrix} f_\phi(\phi, v) \\ f_v(\phi, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi + v \pmod{2\pi} \\ \alpha v - \gamma \cos(\phi + v) \end{pmatrix} . \quad (2.1)$$

C'est un difféomorphisme sur le cylindre  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  dont l'inverse est :

$$f^{-1}(\phi, v) = \begin{pmatrix} \phi - \frac{1}{\alpha}[v + \gamma \cos(\phi)] \pmod{2\pi} \\ \frac{1}{\alpha}[v + \gamma \cos(\phi)] \end{pmatrix} .$$

Notre intérêt pour ce système vient du fait que, pour des chocs presque élastiques, i.e. pour  $\alpha$  très proche de 1 et pour une fréquence d'oscillation de la table très élevée, i.e.  $\gamma$  grand, il existe des conditions initiales de vitesse telles que les trajectoires associées exhibent un comportement erratique. Une telle trajectoire est représentée par la figure 2.1. La caractéristique de cette trajectoire est qu'elle a, sur un intervalle de temps, un graphe très similaire à celui qu'elle a pu avoir déjà sur un intervalle précédent. Mais par la suite, au lieu de continuer dans cette similarité, comme le ferait une trajectoire périodique, son comportement diverge à nouveau. Ce type de comportement est associé dans la théorie des systèmes dynamiques à la notion de point dit non-errant :

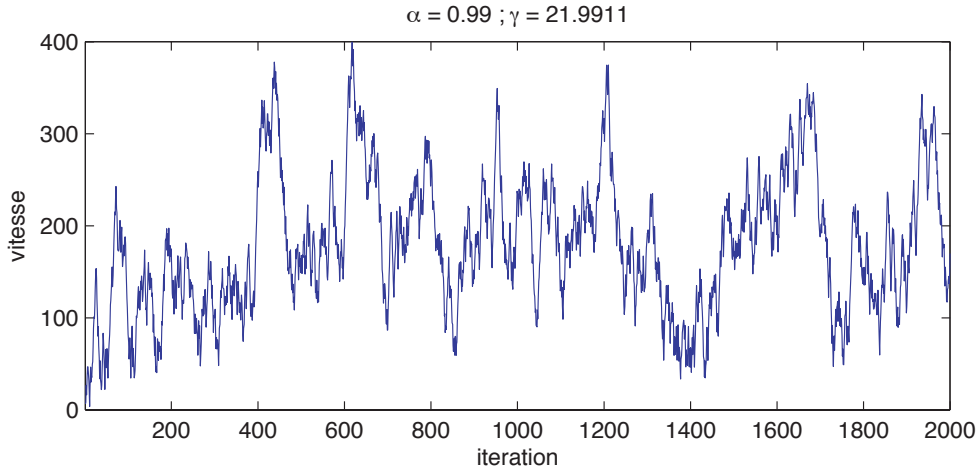


Figure 2.1: Vitesse après rebond

**Définition 1** Pour le système dynamique :

$$x(j+1) = f(x(j)) = f^j(x(0)) ,$$

on dit que le point  $x(0)$  est non-errant si, pour tout voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x(0)$  et tout entier  $n > 0$ , il existe un entier  $j \geq n$  tel que :

$$f^j(\mathcal{V}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset .$$

Selon cette définition est point est non-errant s'il donne lieu à une trajectoire qui revient infiniment de fois aussi près de lui qu'on veut sans nécessairement y repasser. Par construction l'ensemble  $\Lambda$  des points non-errants satisfait:

$$f(\Lambda) \subset \Lambda$$

et même, si  $f$  est un homéomorphisme :

$$f(\Lambda) = \Lambda . \tag{2.2}$$

De plus c'est un fermé<sup>3</sup>.

Les points fixes ou les points des orbites périodiques sont trivialement des points non-errants. Mais il peut y en avoir d'autres, plus difficiles à déceler. Une voie pour le faire consiste à étudier comment des objets se déforment. Avant d'entrer dans cette étude pour le cas de la balle rebondissant sur une table oscillante, faisons deux observations :

---

<sup>3</sup>En effet soit  $x_*$  est une limite de points non-errants. Si  $x_*$  n'est pas non-errant, il existe un voisinage  $\mathcal{V}_*$  de  $x_*$  et un entier  $n > 0$  tel que, pour tout entier  $j \geq n$ , nous avons :

$$f^j(\mathcal{V}_*) \cap \mathcal{V}_* = \emptyset .$$

Comme par hypothèse il existe un point  $x$  non-errant dans  $\mathcal{V}_*$  qui est donc aussi un voisinage de  $x$ . Il existe alors  $j \geq n$  satisfaisant :

$$f^j(\mathcal{V}_*) \cap \mathcal{V}_* \neq \emptyset .$$

Ce qui est une contradiction.

1. Soit  $O$  un ouvert quelconque dans  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ . Sa surface est :

$$S_O = \int_O d\phi dv .$$

Cet ouvert est transformé par la dynamique en l'ouvert  $f(O)$  de surface :

$$S_{f(O)} = \int_{f(O)} d\phi dv = \int_O |\text{Det}(Df(v, \phi))| d\phi dv$$

où nous avons appliqué le changement de variables (2.1) et où  $Df$  est la matrice jacobienne de  $f$  :

$$Df(\phi, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\phi + v) & \alpha + \gamma \sin(\phi + v) \end{pmatrix} .$$

Son déterminant est constant et égal à  $\alpha$ . Donc, pour  $\alpha < 1$ , ce qui correspond à des chocs dissipatifs, l'application  $f$  contracte les aires, alors que, pour  $\alpha = 1$  qui correspond à des chocs élastiques,  $f$  préserve les aires.

2. En notant  $f_v(\phi, v)$  la composante de vitesse de  $f(\phi, v)$ , nous avons :

$$|f_v(\phi, v)| \leq \alpha |v| + \gamma \quad \forall (\phi, v) .$$

Il s'en suit que, pour  $\alpha < 1$ , la composante  $v$  est, le long d'une solution, attirée vers l'intérieur d'un segment  $[-\frac{\gamma}{1-\alpha}, \frac{\gamma}{1-\alpha}]$ . Comme d'un autre côté nous limitons  $\phi$  à évoluer sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ , nous concluons que, pour  $\alpha < 1$ , le compact :

$$\mathfrak{C} = \left\{ (\phi, v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} : -\frac{\gamma}{1-\alpha} \leq v \leq \frac{\gamma}{1-\alpha} \right\}$$

est positivement invariant et exponentiellement attractif. Il suffit donc d'étudier le comportement des solutions dans ce compact.

Étudions maintenant les déformations d'un objet particulier. Pour mieux suivre ce qui suit, nous suggérons au lecteur de se reporter à la figure 2.2. C'est une représentation dans le plan  $(\phi, \phi + v)$ , où rappelons-le  $\phi$  est défini modulo  $2\pi$ . La ligne en pointillés est la droite  $v = 0$  en dessous de laquelle le modèle ne représente plus la physique, la vitesse après rebond étant négative. Le rectangle  $R$  de sommets

$$\begin{aligned} & (\phi, v) \quad , \quad (\phi, \phi + v) \\ A & = \quad (0, 2\pi) \quad , \quad (0, 2\pi) \\ B & = \quad (0, 4\pi) \quad , \quad (0, 4\pi) \\ C & = \quad (2\pi, 2\pi) \quad , \quad (2\pi, 4\pi) \\ D & = \quad (2\pi, 0) \quad , \quad (2\pi, 2\pi) \end{aligned}$$

est l'objet auquel nous nous intéressons. Il est contenu dans le compact positivement invariant et attracteur  $\mathfrak{C}$  si  $\gamma \geq (1 - \alpha)2\pi$ . Ces sommets  $A, B, C$  et  $D$  sont transformés en ce qui suit,

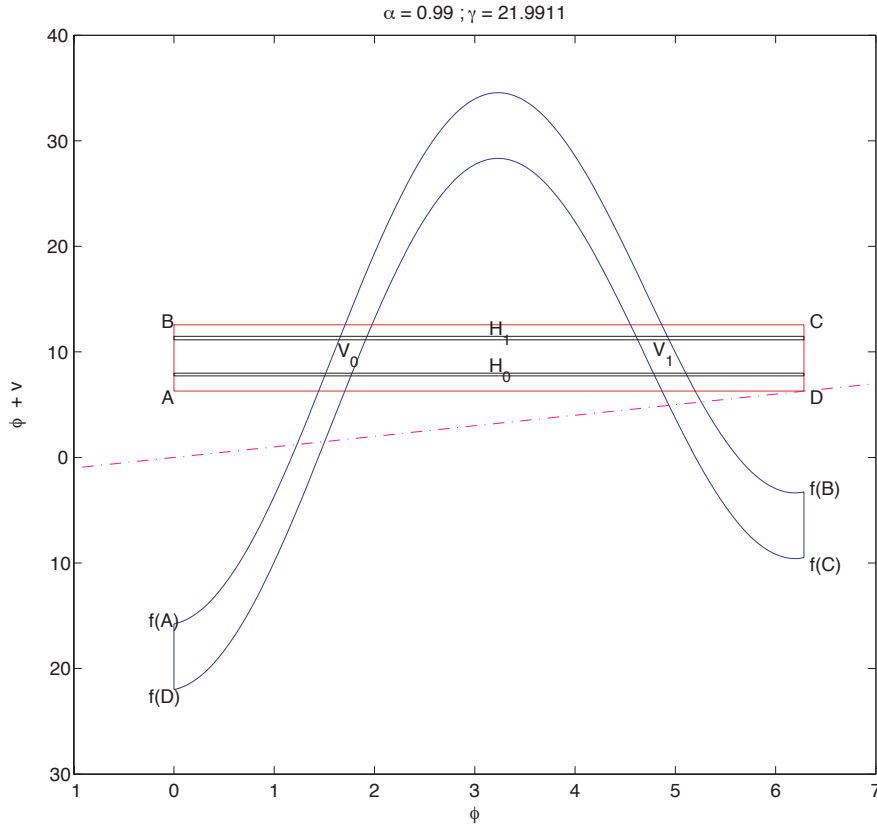


Figure 2.2: Transformation du rectangle  $ABCD$ .

en enlevant  $2\pi$  à  $\phi$  puisque cette variable est définie modulo  $2\pi$  et en notant  $f$  l'expression de  $f$  dans les coordonnées  $(\phi, \phi + v)$ ,

$$\begin{aligned}
 & (\phi, v) \quad , \quad (\phi \pmod{2\pi}, \phi + v) \\
 f(A) &= (0, 2\alpha\pi - \gamma) \quad , \quad (0, 2\alpha\pi - \gamma) \\
 f(B) &= (2\pi, 4\alpha\pi - \gamma) \quad , \quad (2\pi, 2(1 + 2\alpha)\pi - \gamma) \\
 f(C) &= (2\pi, 2\alpha\pi - \gamma) \quad , \quad (2\pi, 2(1 + \alpha)\pi - \gamma) \\
 f(D) &= (0, -\gamma) \quad , \quad (0, -\gamma)
 \end{aligned}$$

Le point  $f(B)$  est donc le plus haut, mais en-dessous du segment  $\overline{AD}$  si :

$$2(1 + 2\alpha)\pi - \gamma \leq 2\pi .$$

Le rectangle  $R$ , un compact, est déformé en une bande  $f(R)$ , un autre compact, limitée par :

- deux segments  $\overline{f(A)f(D)}$  et  $\overline{f(B)f(C)}$  de longueur  $\alpha 2\pi$  et parallèles à l'axe des ordonnées  $\phi + v$ , i.e. :

$$\begin{aligned}
 \overline{f(A)f(D)} &= \{(\phi, \phi + v) : \phi = 0, \phi + v \in [-\gamma, 2\alpha\pi - \gamma]\} , \\
 \overline{f(B)f(C)} &= \{(\phi, \phi + v) : \phi = 2\pi, \phi + v \in [2(1 + \alpha)\pi - \gamma, 2(1 + 2\alpha)\pi - \gamma]\} ;
 \end{aligned}$$

- et par deux courbes, en forme de chapeau de gendarme ou, plus usuellement dites dans le jargon des théoriciens des systèmes dynamiques, en forme de fer à cheval,  $\overline{f(A)f(B)}$  et  $\overline{f(D)f(C)}$  identiques mais décalée selon les ordonnées de  $2\alpha\pi$ , i.e. :

$$\begin{aligned}\overline{f(A)f(B)} &= \{(\phi, \phi + v) : \phi + v = (1 + \alpha)\phi - \gamma \cos(\phi) + 2\alpha\pi, \phi \in [0, 2\pi]\}, \\ \overline{f(D)f(C)} &= \{(\phi, \phi + v) : \phi + v = (1 + \alpha)\phi - \gamma \cos(\phi), \phi \in [0, 2\pi]\}.\end{aligned}$$

La courbe  $\overline{f(D)f(C)}$  est en-dessous de la courbe  $\overline{f(A)f(B)}$  et passe au-dessus du segment  $\overline{BC}$  si par exemple :

$$(1 + \alpha)\pi + \gamma \geq 4\pi.$$

Ainsi, pour  $\gamma$  assez grand, disons  $\gamma \geq 5\pi$ , nous avons les trois propriétés suivantes :

1. le rectangle  $R$  et son transformé, la bande  $f(R)$ , se coupent en deux bandes presque verticales, des compacts disjoints notés  $V_0$  et  $V_1$ , i.e.

$$R \cap f(R) = V_0 \cup V_1 ;$$

2. les antécédents de  $V_0$  et  $V_1$  sont contenus dans des bandes horizontales de  $R$ , des compacts,  $H_0$  et  $H_1$  respectivement, i.e.

$$f^{-1}(V_0) \subset H_0 \quad , \quad f^{-1}(V_1) \subset H_1 ;$$

3. l'action de  $f$  est telle que, dans les intersections  $H_i \cap V_j$ , la matrice jacobienne  $Df$  étire les distances verticales alors que  $Df^{-1}$  étire les distances horizontales. En effet nous avons :

$$Df = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & (1 + \alpha) + \gamma \sin(\phi + v) \end{pmatrix}$$

et, lorsque  $\gamma$  est grand, on constate que les points dans ces intersections  $H_i \cap V_j$  sont tels que  $|\sin(\phi + v)|$  est grand, disons supérieur à  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Ceci fait que  $\gamma|\sin(\phi + v)|$  est grand devant  $(1 + \alpha)$ . Dans ce cas,  $\gamma \sin(\phi + v)$  et  $\frac{\alpha}{\gamma \sin(\phi + v)}$  sont de bonnes approximations des valeurs propres. Celles-ci sont associées aux vecteurs propres approximatés par  $\begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \sin(\phi + v) \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha}{\gamma \sin(\phi + v)} \end{pmatrix}$  respectivement. Le premier, presque vertical, est donc associé à une valeur propre grande en module, d'où une dilatation des directions verticales par  $Df$ . Le second est presque horizontal et associé à une valeur propre petite en module d'où une dilatation des directions horizontales par  $Df^{-1}$ .

Ainsi une partie des points des bandes horizontales  $H_0$  et  $H_1$  de  $R$  est envoyée par  $f$  dans  $R$ , l'autre partie en échappant ou même menant à des valeurs sans signification physique. De plus l'image de certains points sont dans  $H_i \cap V_j$ , ouvrant la possibilité que leur image suivante soit elle aussi dans  $R$  ou même dans  $H_i \cap V_j$ . Appelons  $\Lambda$  l'ensemble des points dont toutes les images successives par  $f$  sont dans  $R$  et dont tous les antécédents successifs sont aussi dans  $R$ . Cet ensemble, s'il est non vide est candidat à être un ensemble de points non-errants (au moins il satisfait (2.2), du fait même de sa définition). Quelles sont la nature et les propriétés de cet ensemble ? Est-ce l'ensemble des points non-errants ? Est-il celui des conditions initiales de trajectoires ayant un comportement erratique du type de ce que nous voyons à la figure 2.1 ?



Il est possible de répondre à ces questions en poursuivant l'analyse de la dynamique de cette balle rebondissant sur une table oscillante. Ceci est fait dans [10] (voir aussi [6]). Ici, pour simplifier notre exposé et ne pas nous encombrer de détails anecdotiques, nous préférons continuer avec une idéalisation de cette dynamique, connue sous le nom de fer à cheval de Smale.

## 2.2 Modèle simplifié : le fer à cheval de Smale

### 2.2.1 Construction de l'homéomorphisme $f$

Nous proposons une idéalisation de l'homéomorphisme  $f$ , donné par la dynamique de la balle rebondissant sur une table oscillante lorsqu'il est restreint au rectangle  $R$ .

Pour commencer, nous prenons  $R$  simplement comme :

$$R = [0, 1] \times [0, 1].$$

de sommets :

$$A = (0, 0), \quad B = (0, 1), \quad C = (1, 1), \quad D = (1, 0).$$

Ensuite nous faisons jouer aux deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  le rôle de  $\frac{\alpha}{\gamma \sin(\phi+v)}$  et  $\gamma \sin(\phi+v)$ , les approximations des valeurs propres de  $Df$ . Nous imposons :

$$0 < \lambda \leq \frac{1}{2}, \quad 2 < \mu.$$

Enfin, nous partageons  $R$  en trois bandes horizontales (voir la figure 2.3) :

–  $H_0$  ayant  $\overline{AB}$  comme côté et de hauteur  $\frac{1}{\mu}$ , i.e. le compact

$$H_0 = \left\{ (x, y) \in R : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{\mu} \right\},$$

–  $H_1$  ayant  $\overline{DC}$  comme côté et de même hauteur  $\frac{1}{\mu}$ , i.e. le compact

$$H_1 = \left\{ (x, y) \in R : 0 \leq x \leq 1, 1 - \frac{1}{\mu} \leq y \leq 1 \right\},$$

–  $\mathcal{H}$  entre les deux, sans les côtés de  $H_0$  et  $H_1$ , i.e.

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y) \in R : 0 \leq x \leq 1, \frac{1}{\mu} < y < 1 - \frac{1}{\mu} \right\}.$$

Avec tout ceci, nous définissons  $f : R \rightarrow \mathbb{R}^2$  comme :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (\lambda x, \mu y) && \text{si } (x, y) \in H_0, \\ &= \left( \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \left[ (1 - 2\lambda x) \cos \left( \frac{\pi(\mu-1-\mu y)}{\mu-2} \right) \right] \right) \right], 1 + \left[ (1 - \lambda x) \sin \left( \frac{\pi(\mu-1-\mu y)}{\mu-2} \right) \right] \right) \\ &&& \text{si } (x, y) \in \mathcal{H} \\ &= (1 - \lambda x, \mu - \mu y) && \text{si } (x, y) \in H_1. \end{aligned}$$

Cette fonction  $f$  est la composition (voir la figure 2.4) d'une contraction horizontale d'un facteur  $\lambda$ , d'une dilatation verticale d'un facteur  $\mu$  puis d'un repliement de la partie supérieure vers la droite et vers le bas.  $f(R)$  a ainsi la forme d'un fer à cheval. Aussi on voit que  $f$  est inversible. Les propriétés intéressantes à retenir de cette application sont :

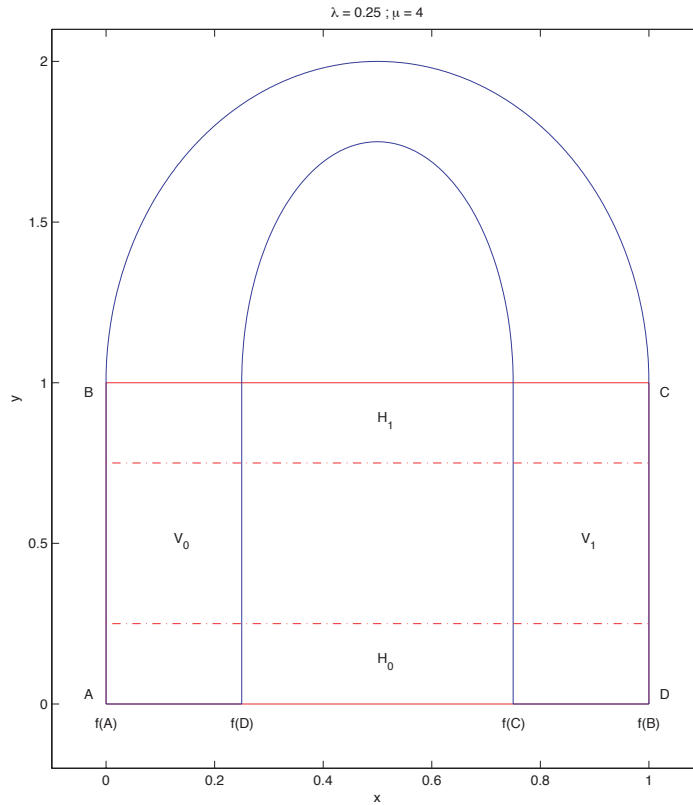


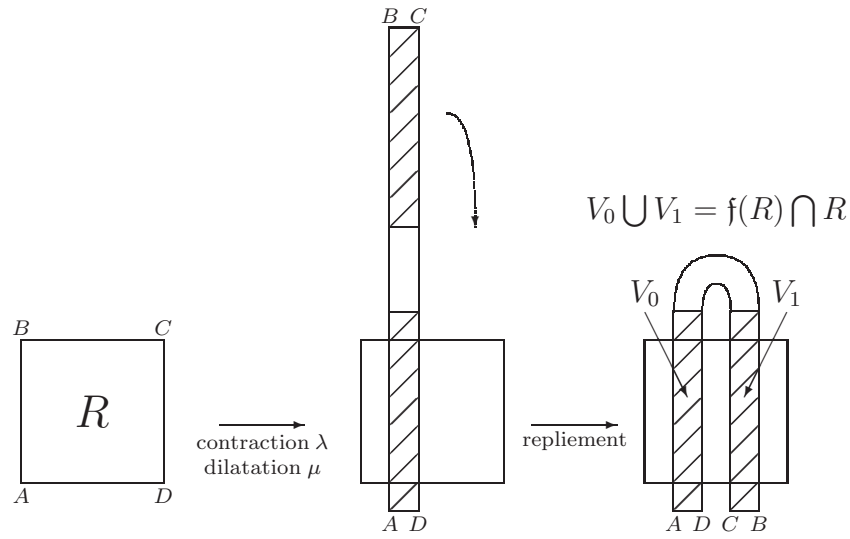
Figure 2.3: Transformation du rectangle en le fer à cheval de Smale.

1. l'image  $f(\mathcal{H})$  de la troisième bande ne rencontre pas  $R$ ;
2. les bandes horizontales  $H_0$  et  $H_1$ , des compacts, sont transformées respectivement en les bandes verticales compactes :

$$V_0 = f(H_0) = \{(x, y) \in R : 0 \leq x \leq \lambda, 0 \leq y \leq 1\} ,$$

$$V_1 = f(H_1) = \{(x, y) \in R : 1 - \lambda \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} ;$$

3. la restriction à  $H_0 \cup H_1$  est une contraction horizontale d'un facteur  $\lambda$  et une dilatation verticale d'un facteur  $\mu$ ;
4. pour toute bande verticale compacte non vide  $V$  de  $R$ ,  $f(V) \cap R$  est la réunion de deux bandes verticales compactes non vides, l'une dans  $V_0$ , l'autre dans  $V_1$ , chacune ayant une largeur égale à  $\lambda$  fois celle de  $V$ . De plus, seuls les points dans les intersections de  $V$  avec  $H_0$  et  $H_1$  ont des images par  $f$  dans  $f(V) \cap R$ ;
5. pour toute bande horizontale compacte non vide  $H$  de  $R$ ,  $f^{-1}(H) \cap R$  est la réunion de deux bandes horizontales compactes non vides, l'une dans  $H_0$ , l'autre dans  $H_1$ , chacune ayant une hauteur égale à  $\frac{1}{\mu}$  fois celle de  $H$ . De plus, seuls les points dans les intersections de  $H$  avec  $V_0$  et  $V_1$  ont des antécédents par  $f$  dans  $f^{-1}(H) \cap R$ ;
6.  $f$  est un homéomorphisme de  $H_0 \cup H_1$  sur  $V_0 \cup V_1$ .


 Figure 2.4: Décomposition de l'application  $f$ .

Nous retrouvons donc en particulier les propriétés trouvées pour la balle rebondissant sur une table oscillante.

Dans ce contexte, l'ensemble  $\Lambda$  des points dont toutes les images successives par  $f$  sont dans  $R$  et dont tous les antécédents successifs sont aussi dans  $R$  est :

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(R) = \left[ \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(R) \right] \cap \left[ \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(R) \right].$$

D'après ce qui précède, nous avons :

$$\Lambda \subset \left[ H_0 \cup H_1 \right] \cap \left[ V_0 \cup V_1 \right], \quad f(\Lambda) = \Lambda. \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Dynamique symbolique

Pour continuer notre étude<sup>4</sup> de  $\Lambda$ , il est intéressant d'associer à chacun de ses points un code constitué de deux suites infinies de 0 et de 1. Précisément à  $\mathbf{x}$  dans  $\Lambda$ , et à  $n$  un entier relatif, nous associons  $a_n$  comme suit :

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \quad \text{si } f^n(\mathbf{x}) \in V_0, \\ &= 1 \quad \text{si } f^n(\mathbf{x}) \in V_1. \end{aligned}$$

Ceci définit une application  $\phi : \Lambda \rightarrow \Sigma(2) = \prod_{-\infty}^{\infty} \{0, 1\}$ ,  $\mathbf{x} \mapsto a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Cette définition a bien un sens puisque, d'après (2.3), si  $\mathbf{x}$  est dans  $\Lambda$ ,  $f^n(\mathbf{x})$  est dans  $V_0 \cup V_1$ . Le point tout à fait remarquable est que, si  $b = \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \phi(f(\mathbf{x}))$  est le code associé à  $f(\mathbf{x})$ , alors nous avons :

$$b_n = a_{n+1}.$$

<sup>4</sup> À ce stade, nous ne savons pas si  $\Lambda$  est vide ou pas !

Ceci signifie qu'appliquer  $f$  à  $\mathfrak{x}$  revient à décaler le code  $a$  de  $\mathfrak{x}$  vers la gauche. Ainsi, en notant  $\sigma_g$  l'opération de décalage vers la gauche agissant sur  $\Sigma(2)$ , nous avons la relation dite de conjugaison :

$$\sigma_g \circ \phi = \phi \circ f .$$

Abandonnons  $\Lambda$  et  $f$  pour un moment et travaillons avec  $\Sigma(2)$  et  $\sigma_g$  et plus exactement considérons la dynamique définie par la récurrence sur  $\Sigma(2)$  :

$$a(i+1) = \sigma_g(a(i)) . \quad (2.4)$$

Cette dynamique est appelée dynamique symbolique.

Pour pouvoir parler de code voisin et de continuité de  $\sigma_g$ , nous avons besoin d'une topologie. Nous la définissons à partir de la distance :

$$d(a, b) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n 2^{-|n|} , \quad \begin{aligned} \delta_n &= 0 & \text{si } a_n = b_n , \\ &= 1 & \text{si } a_n \neq b_n . \end{aligned}$$

Ainsi, si  $b$  est dans la boule ouverte de centre  $a$  et rayon  $2^{-(N+1)}$ , on a :

$$b_n = a_n \quad \forall n : |n| \leq N .$$

Et inversement, si :

$$b_n = a_n \quad \forall n : |n| \leq N .$$

alors  $b$  est dans la boule fermée de rayon  $2^{-(N-1)}$ .

Muni de la topologie induite par cette distance, il est possible de montrer (voir [16, Proposition 4.2.4]) que  $\Sigma(2)$  est compact (Théorème de Tychonov [5, Theorem XI.1.4.4]), parfait (i.e. fermé et sans point isolé) et donc non dénombrable ([16, Theorem 4.2.3]), et totalement non connexe (i.e. pour tout point, l'union des connexes qui le contiennent est réduite au point lui-même [5, Exemple V.5.3])). Un ensemble avec de telles propriétés topologiques est parfois appelé ensemble de Cantor.

Aussi

**Théorème 2** *Pour cette topologie,  $\sigma_g$  est un homéomorphisme sur  $\Sigma(2)$  et le système dynamique (2.4) a*

- une infinité dénombrable d'orbites périodiques de période arbitraire;
- une infinité non dénombrable d'orbites non périodiques;
- une orbite dense.
- De plus chaque orbite est un point col.
- Enfin l'ensemble des points non-errants de  $\sigma_g$  est  $\Sigma(2)$  tout entier.

*Preuve :*

Il est évident que  $\sigma_g$  est une bijection, le décalage à droite étant son inverse. De plus étant donné  $\varepsilon > 0$ , soit  $N$  le plus grand entier satisfaisant  $2^{-(N-2)} < \varepsilon$ . Posons  $\delta = \frac{1}{2^{N+1}}$ . Nous avons vu que, si  $d(a, b) < \delta$ , nous avons, pour  $n : |n| \leq N$ ,  $b_n = a_n$  et donc  $\sigma_g(a)_n = \sigma_g(b)_n$

pour  $n : |n| \leq N - 1$ . Cette dernière inégalité implique  $d(\sigma_g(a), \sigma_g(b)) \leq 2^{-(N-2)} < \varepsilon$ .  $\sigma_g$  est donc continue. De plus, puisque  $\Sigma(2)$  est compact, cette application est un homéomorphisme.

Pour obtenir une orbite périodique de (2.4), il suffit de choisir un "motif" fait d'une suite finie de longueur  $N$  de 0 et de 1 sans périodicité et de créer un code  $a$  en le recopiant indéfiniment à gauche et à droite. Il donne la condition initiale d'une orbite périodique  $a(i)$  de période  $N$ .

Pour obtenir une orbite non périodique, il suffit de prendre le développement binaire d'un nombre irrationnel qui, on le sait, est non périodique. On obtient un code en prenant ce développement comme partie droite et son image par un miroir comme partie gauche.

Une orbite dense  $a$  est obtenue en concaténant à droite et à gauche

$$\begin{aligned} &0, 1, \\ &00, 01, 10, 11, \\ &000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 \\ &\dots \end{aligned}$$

En effet de la sorte, pour tout  $N$ , toutes les configurations possibles de  $b_n$  pour  $n : |n| \leq N$  seront quelque part dans la partie droite de  $a$  et ceci une première, puis une infinité de fois. Donc, pour tout code donné  $b$ , il existe  $i$  tel que  $a(i)$  (i.e. après  $i$  décalages à gauche de  $a$ ) est à une distance inférieure à  $2^{-(N-1)}$  de  $b$ .

Enfin l'orbite associée à un code  $a$  quelconque est un point col puisque, pour tout  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ , si  $N$  est donné par  $2^{-(N+1)} > \varepsilon$  et si  $b$  est le code obtenu en conservant les  $a_n$  pour  $n : |n| > N$  et en prenant la négation des  $a_n$  pour  $n : |n| \leq N$ , la distance entre  $a$  et  $b$  est supérieure à  $\varepsilon$ . Mais, si  $b$  est la condition initiale de  $b(i)$ , après  $2(N+1)$  décalages à gauche, la distance entre  $a(i)$  et  $b(i)$  décroît et tend vers 0 lorsque le nombre  $i$  de décalage tend vers l'infini. Aussi, si  $c$  est le code donné par les négation des  $b_n$ , la distance de  $a$  à  $c$  est inférieure à  $2^{-(N-1)}$ , mais la distance à  $a(i)$  de la suite  $c(i)$  finit par croître de façon strictement monotone.

Pour finir, d'après ce qui précède l'ensemble  $\text{Per}(\sigma_g)$  des conditions initiales d'orbites périodiques est partout dense dans  $\Sigma(2)$ . Comme une telle condition initiale est un point non-errant et que l'ensemble des points non-errants est fermé, la fermeture de  $\text{Per}(\sigma_g)$ , qui est égale à  $\Sigma(2)$ , est contenue dans l'ensemble des points non-errants.

### 2.2.3 $\phi$ est un homéomorphisme

Revenons maintenant à  $\Lambda$  et  $f$ . En quoi ce que nous avons appris sur  $\Sigma(2)$  et  $\sigma_g$  peut-il nous être utile ? Si  $\Lambda$  est équipé de la topologie induite de  $\mathbb{R}^2$ , la réponse est :

Si  $\phi : \Lambda \rightarrow \Sigma(2)$  est un homéomorphisme alors tout ce qui est vrai pour  $(\Sigma(2), \sigma_g)$  l'est pour  $(\Lambda, f)$ .

En effet, les propriétés topologiques que nous avons citées pour  $\Sigma(2)$  sont invariantes par homéomorphisme. Donc  $\Lambda$  est compact, parfait, non dénombrable et totalement non connexe, i.e. c'est un ensemble de Cantor. Puisque par ailleurs  $\phi$  conjugue  $f$  et  $\sigma_g$ , les propriétés des solutions de (2.4) et celles de :

$$\mathbf{x}(i+1) = f(\mathbf{x}(i)) \quad , \quad \mathbf{x}(0) \in \Lambda$$

sont les mêmes. Donc en particulier à l'intérieur de  $\Lambda$ , nous avons

- une infinité dénombrable d'orbites périodiques de période arbitraire;
- une infinité non dénombrable d'orbites non périodiques;
- une orbite dense;
- toute orbite est un point col.
- Enfin  $\Lambda$  est l'ensemble des points non-errants.

Le point clé de cette approche de l'étude des systèmes dynamiques par celle de la dynamique symbolique est donc d'établir que  $\phi$  est un homéomorphisme (voir [14, IV.4.7]).

**Lemme** :  $\phi$  est surjectif et  $\Lambda$  est donc non vide.

*Preuve* :

Soit  $a$  un code dans  $\Sigma(2)$ , nous voulons montrer l'existence dans  $\Lambda$  d'un point  $\mathfrak{x}$  tel que :

$$\phi(\mathfrak{x})_n = a_n \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

En notant  $V_{a_n}$  la bande verticale d'indice  $a_n$  (égale à 0 ou 1), ceci signifie :

$$f^n(\mathfrak{x}) \in V_{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

et est satisfait si :

$$\mathfrak{x} \in f^{-n}(V_{a_n}) \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Il nous suffit donc de montrer que l'intersection :

$$I_\infty = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(V_{a_n})$$

est non vide. Rappelons que, dans un compact, toute suite de fermés non vides qui est décroissante a une intersection non vide. Puisque  $f$  et  $f^{-1}$  sont continues et  $V_{a_n}$  est fermé, l'intersection finie :

$$I_N = \bigcap_{n=-N}^N f^{-n}(V_{a_n})$$

est fermée et incluse dans  $\Lambda$  qui est compact. De plus on a  $I_{N+1} \subset I_N$ . Il suffit donc de montrer que  $I_N$  est non vide pour tout entier non négatif  $N$ .

Nous savons que, pour toute bande verticale compacte non vide  $V$  de  $R$ ,  $f(V) \cap R$  est la réunion de deux bandes verticales compactes non vides, l'une dans  $V_0$ , l'autre dans  $V_1$ . Dans le cas particulier où  $V$  est  $V_0$  ou  $V_1$ , nous obtenons que les 4 intersections suivantes sont des bandes verticales compactes non vides soit dans  $V_0$ , soit dans  $V_1$  :

$$V_0 \cap f(V_0) \quad , \quad V_0 \cap f(V_1) \quad , \quad V_1 \cap f(V_0) \quad , \quad V_1 \cap f(V_1) .$$

Soit alors  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  une suite ordonnée à  $m$  éléments 0 ou 1. Supposons que l'intersection :

$$J_\alpha = V_{\alpha_1} \cap f(V_{\alpha_2}) \cap \dots \cap f^m(V_{\alpha_m})$$

est une bande verticale non vide. D'après ce qui précède, c'est bien le cas si  $\alpha = (0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$ . Aussi nous savons que  $f(J_\alpha) \cap R$  est la réunion de deux bandes verticales compactes non vides, l'une dans  $V_0$ , l'autre dans  $V_1$  et donc les intersections suivantes sont des bandes verticales compactes non vides dans  $R$  :

$$\begin{aligned} V_0 \cap f(J_\alpha) &= V_0 \cap V_{\alpha_1} \cap f(V_{\alpha_2}) \cap \dots \cap f^m(V_{\alpha_m}) , \\ V_1 \cap f(J_\alpha) &= V_1 \cap V_{\alpha_1} \cap f(V_{\alpha_2}) \cap \dots \cap f^m(V_{\alpha_m}) . \end{aligned}$$

La propriété supposée vraie pour  $\alpha$ , l'est donc encore pour  $(0, \alpha) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  et  $(1, \alpha) = (1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ . Donc par récurrence, nous obtenons que, pour toute suite finie  $\alpha$  de longueur  $m$ , de 0 et de 1,  $J_\alpha$  est une bande verticale compacte non vide. C'est en particulier le cas pour :

$$\alpha = (a_N, a_{N-1}, \dots, a_0, \dots, a_{-N}) .$$

i.e.

$$J_\alpha = V_{a_N} \cap f(V_{a_{N-1}}) \cap \dots \cap f^{2N}(V_{a_{-N}})$$

est une bande verticale compacte non vide. Cette bande est contenue dans  $V_{a_N}$  et donc  $f^{-1}(J_\alpha)$  est compact, non vide et contenu dans la bande horizontale  $H_{a_N}$ . Mais aussi puisque :

$$f^{-1}(J_\alpha) = f^{-1}(V_{a_N}) \cap V_{a_{N-1}} \cap \dots \cap f^{2N-1}(V_{a_{-N}}) ,$$

$f^{-1}(J_\alpha)$  est contenu dans  $V_{a_{N-1}}$ ,  $f^{-2}(J_\alpha)$  est compact, non vide et contenu dans  $H_{a_{N-1}}$ . Ainsi de suite,  $f^{-N}(J_\alpha)$  est compact et non vide. De la sorte nous avons établi que  $I_N$  est un compact non vide pour tout entier non négatif  $N$ .

**Lemme** :  $\phi$  est injectif.

*Preuve* :

Soient  $\mathfrak{x}$  et  $\mathfrak{y}$  dans  $\Lambda$  tels que  $\phi(\mathfrak{x}) = \phi(\mathfrak{y})$ . Ceci signifie que, pour tout entier relatif  $n$ ,  $\phi_n(\mathfrak{x}) = \phi_n(\mathfrak{y})$  et donc  $f^n(\mathfrak{x})$  et  $f^n(\mathfrak{y})$  sont dans la même bande verticale  $V_0$  ou  $V_1$ . Mais aussi  $f^n(\mathfrak{x})$  et  $f^n(\mathfrak{y})$  doivent être dans la même bande horizontale  $H_0$  ou  $H_1$ , puisque, sinon  $f^{n+1}(\mathfrak{x})$  et  $f^{n+1}(\mathfrak{y})$  seraient dans des bandes verticales différentes. En notant  $f_x^n(\mathfrak{x})$  et  $\mathfrak{x}_x$  (respectivement  $f_y^n(\mathfrak{x})$  et  $\mathfrak{x}_y$ ) la composante  $x$  (respectivement  $y$ ) de  $f^{n+1}(\mathfrak{x})$  et  $\mathfrak{x}$ , nous obtenons, pour tout entier non négatif  $n$  :

$$\begin{aligned} |f_x^{-(n+1)}(\mathfrak{x}) - f_x^{-(n+1)}(\mathfrak{y})| &= \frac{1}{\lambda} |f_x^{-n}(\mathfrak{x}) - f_x^{-n}(\mathfrak{y})| = \frac{1}{\lambda^{n+1}} |\mathfrak{x}_x - \mathfrak{y}_x| , \\ |f_y^{(n+1)}(\mathfrak{x}) - f_y^{(n+1)}(\mathfrak{y})| &= \mu |f_y^n(\mathfrak{x}) - f_y^n(\mathfrak{y})| = \mu^{n+1} |\mathfrak{x}_y - \mathfrak{y}_y| . \end{aligned}$$

Comme  $\mu$  et  $\frac{1}{\lambda}$  sont strictement supérieurs à 1 et  $f^n(\mathfrak{x})$  et  $f^n(\mathfrak{y})$  sont, pour tout  $n \geq 0$ , dans le borné  $\Lambda$ , nous devons avoir :

$$|\mathfrak{x}_x - \mathfrak{y}_x| = |\mathfrak{x}_y - \mathfrak{y}_y| = 0$$

et donc  $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ .

**Lemme** :  $\phi$  est continue.

*Preuve* :

Puisque  $\Lambda$  est contenu dans  $V_0 \cup V_1$  et  $V_0$  et  $V_1$  sont des compacts disjoints, il existe  $\delta > 0$  tel que, si  $\mathbf{x}$  est dans la bande  $V_i$ , alors la boule ouverte  $B(\mathbf{x}, \delta)$  de  $\mathbb{R}^2$  centrée en  $\mathbf{x}$  et de rayon  $\delta$ , ne rencontre pas l'autre bande  $V_j$ . Nous notons  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$  l'intersection de  $\Lambda$  avec  $B(\mathbf{x}, \delta)$ . C'est un voisinage de  $\mathbf{x}$  dans  $\Lambda$  du fait de la topologie induite.

Soit  $\mathbf{x}$  un point de  $\Lambda$  et  $U$  un voisinage de  $\phi(\mathbf{x})$  dans  $\Sigma(2)$ .  $U$  contenant par définition une boule ouverte centrée en  $\phi(\mathbf{x})$ , il existe  $N$  tel que tout code  $b$  satisfaisant

$$d(b, \phi(\mathbf{x})) < 2^{-N}$$

est dans  $U$ .

$\mathbf{x}$  et  $N$  étant fixés,  $\mathcal{V}(f^n(\mathbf{x}))$  est, comme nous l'avons vu, un voisinage de  $f^n(\mathbf{x})$  dans  $\Lambda$ .  $f^n$  étant continue,  $f^{-n}(\mathcal{V}(f^n(\mathbf{x})))$  est un voisinage de  $\mathbf{x}$  dans  $\Lambda$ . Il en est de même de l'intersection finie :

$$U_N(\mathbf{x}) = \bigcap_{|n| \leq N+2} f^{-n}(\mathcal{V}(f^n(\mathbf{x}))) .$$

Puisque tout  $\mathbf{y}$  de  $U_N(\mathbf{x})$  est dans  $f^{-n}(\mathcal{V}(f^n(\mathbf{x})))$ ,  $f^n(\mathbf{y})$  est dans  $\mathcal{V}(f^n(\mathbf{x}))$ , pour chaque  $n : |n| \leq N + 2$ . Alors, du fait du choix de  $\delta$  plus haut,  $f^n(\mathbf{y})$  est dans la même bande verticale  $V_0$  ou  $V_1$  que  $f^n(\mathbf{x})$ . Ceci signifie :

$$\phi(\mathbf{y})_n = \phi(\mathbf{x})_n \quad \forall n : |n| \leq N + 2$$

et donc :

$$d(\phi(\mathbf{y}), \phi(\mathbf{x})) \leq 2^{-(N+1)} < 2^{-N} .$$

Ceci implique que  $\phi(\mathbf{y})$  est dans  $U$  et donc que  $\phi(U_N(\mathbf{x}))$  est contenu dans  $U$  ou en d'autres termes que  $\phi^{-1}(U)$  est un voisinage de  $\mathbf{x}$ , i.e. l'image réciproque d'un voisinage est un voisinage.

## 2.2.4 Conclusion

C'est en 1963, que le mathématicien américain Stephen Smale [15] a proposé le fer à cheval comme exemple d'homéomorphisme du plan  $f$  qui possède un ensemble de Cantor invariant (non nécessairement attracteur),  $\Lambda$ , pour lequel la restriction  $f|_\Lambda$  peut être très simplement caractérisée et dont les itérés successifs donnent lieu à des trajectoires à comportement erratique dit souvent chaotique. Aussi la structure de  $\Lambda$  fait de lui ce qui est appelé un attracteur étrange.

Une propriété supplémentaire est que  $\Lambda$  hyperbolique, i.e. tous ses points admettent une structure de col avec un espace rentrant et un espace sortant (pour une définition précise voir [6], page 238). L'intérêt principal de la notion d'hyperbolicité est sa persistance par rapport à des petites perturbations sur les équations du système (stabilité structurelle). Ainsi en arguant que la dynamique de la balle rebondissant sur une table oscillante est une perturbation de l'application du fer à cheval de Smale, on obtient que, pour cette balle, il y a aussi un ensemble non vide de points non-errants qui est un ensemble hyperbolique et dans lequel les trajectoires ont un comportement chaotique déterministe. En fait, comme pour le fer à



cheval, ceci se démontre en passant par la dynamique symbolique.

## 2.3 Exercices corrigés

### 2.3.1 Exercice 1

#### Préambule :

Nous notons  $\Sigma(2)$  l'ensemble des suites binaires  $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $\sigma_g$  l'opérateur de décalage à gauche i.e. :

$$\sigma_g(a)_k = a_{k+1} .$$

Nous admettons qu'il existe un ensemble dénombrable dans  $\Sigma(2)$  de suites  $a$  telles que la suite  $(\sigma_g^i(a))_{i \in \mathbb{N}}$  (de suites) est périodique et qu'il existe un ensemble non dénombrable de suites  $a$  telles que la suite  $(\sigma_g^i(a))_{i \in \mathbb{N}}$  ne devient jamais périodique, i.e. :

$$\sigma_g^{n+m}(a) \neq \sigma_g^m(a) \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_*$$

#### Questions

Nous considérons l'application  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , dite en en accent circonflexe, donnée par

$$\begin{aligned} T(x) &= 1 - |1 - 2x| = 2x && \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ &= 2 - 2x && \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 . \end{aligned}$$

1. Nous notons  $I \rightarrow J$  la propriété :  
Il existe un intervalle fermé  $K$  contenu dans  $I$  satisfaisant :

$$T(K) = J .$$

Montrer que, si  $I \rightarrow J$ , alors, pour tout intervalle fermé non vide  $M$  contenu dans  $J$ , il existe un intervalle fermé non vide  $L$  contenu dans  $I$  satisfaisant :

$$T(L) = M .$$

(admettre ce résultat dans un premier temps si besoin.)

2. Soient  $I_0$  et  $I_1$  les intervalles fermés :

$$I_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right] , \quad I_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] .$$

Montrer que nous avons :

$$I_0 \rightarrow I_1 , \quad I_1 \rightarrow I_0 , \quad I_0 \rightarrow I_0 , \quad I_1 \rightarrow I_1 .$$

3. Supposons que, pour toute suite binaire  $a_0 \dots a_{n-1}$  de longueur  $n$ , l'ensemble :

$$J_{a_0 \dots a_{n-1}} = \left\{ x \in [0, 1] : x \in I_{a_0}, T(x) \in I_{a_1}, \dots, T^{n-1}(x) \in I_{a_{n-1}} \right\} .$$

est un intervalle fermé non vide. Montrer qu'il en est de même pour toute suite  $a_0 \dots a_{n-1} a_n$  de longueur  $n + 1$  et que  $J_{a_0 \dots a_n}$  satisfait :

$$J_{a_0 \dots a_{n-1} a_n} \subset J_{a_0 \dots a_{n-1}} .$$

4. Que pouvez-vous dire sur la suite  $(T^i(\frac{1}{2}))_{i \in \mathbb{N}}$  ?
5. À tout  $x$  de  $[0, 1]$ , nous associons la suite  $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dans  $\Sigma(2)$  définie par :

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \quad \text{si } T^k(x) \in I_0 , \\ &= 1 \quad \text{si } T^k(x) \in I_1 . \end{aligned}$$

Dans le cas où il existe  $\ell$  satisfaisant  $T^\ell(x) = \frac{1}{2}$ , nous associons à  $x$  deux suites  $a_k$  et  $b_k$  satisfaisant :

$$a_k = b_k \quad \forall k : k \neq \ell , \quad a_\ell = 0 , \quad b_\ell = 1 .$$

Justifier le choix fait dans ce cas.

6. Montrer qu'à toute suite  $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\Sigma(2)$ , nous pouvons associer au moins un point noté  $x(a)$  de  $[0, 1]$  permettant de retrouver  $a$  selon le procédé ci-dessus.
7. Montrer que, si  $T^i(x_1)$  et  $T^i(x_2)$  sont dans le même intervalle  $I_0$  ou  $I_1$ , alors nous avons :

$$|T_{i+1}(x_1) - T_{i+2}(x_2)| = 2 |T_i(x_1) - T_i(x_2)| .$$

En déduire l'unicité du point  $x(a)$  de la question précédente.

8. Montrer qu'il existe un ensemble dénombrable dans  $[0, 1]$  de points  $x$  tels que la suite  $(T^i(x))_{i \in \mathbb{N}}$  est périodique et qu'il existe un ensemble non dénombrable de points  $x$  tels que la suite  $(T^i(x))_{i \in \mathbb{N}}$  ne devient jamais périodique.
9. Soit  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  et  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  les applications<sup>5</sup> définies par :

$$h(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2 , \quad F(x) = 4x(1-x) .$$

Montrer que nous avons :

$$F \circ h = h \circ T .$$

En déduire qu'il existe un ensemble dénombrable dans  $[0, 1]$  de points  $x$  tels que la suite  $(F^i(x))_{i \in \mathbb{N}}$  est périodique et qu'il existe un ensemble non dénombrable de points  $x$  tels que la suite  $(F^i(x))_{i \in \mathbb{N}}$  ne devient pas périodique.

---

<sup>5</sup>L'application  $F$  est appelée application logistique. Elle a été introduite comme modèle de croissance d'une population animale. Si  $x$  est la population normalisée entre 0 et 1 une année,  $F(x)$  est la population l'année suivante. Cette dernière est prise proportionnelle à  $x$  avec un un taux de croissance en  $r(1-x)$  qui exhibe une saturation pour prendre en compte la limitation en nourriture ou la saturation du milieu naturel.

L'étude du comportement en fonction de  $r$  est particulièrement instructive sur les phénomènes que peuvent exhiber des systèmes dynamiques.

**Corrigé**

1. Commençons par observer que l'ensemble  $J$  est un intervalle puisqu'image par une fonction continue d'intervalle fermé  $K = [w, x]$  contenu dans  $I$ . Posons :

$$M = [u_M, v_M] .$$

$T$  étant continue, l'ensemble  $\{(y, z) \in [w, x]^2 : T(y) = u_M, T(z) = v_M\}$  est compact. Comme la fonction  $(y, z) \mapsto |z - y|$  est continue, il existe  $(y, z)$  dans  $[w, x]^2$  minimisant cette fonction. En posant :

$$u_L = \min\{y, z\} \quad , \quad v_L = \max\{y, z\} \quad ,$$

l'intervalle  $[u_L, v_L]$  est fermé et non vide et nous avons :

$$T([u_L, v_L]) = [u_M, v_M] .$$

En effet puisque, avec la continuité de  $T$ ,  $T([u_L, v_L])$  est un intervalle contenant  $u_M$  et  $v_M$ , nous avons :

$$[u_M, v_M] \subset T([u_L, v_L]) .$$

Supposons qu'il existe  $t$  dans  $T([u_L, v_L])$  satisfaisant  $t < u_M$ , alors, du fait du Théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $s$  dans  $(u_L, v_L)$  satisfaisant  $T(s) = u_M$ , en contradiction de la minimalité de la fonction ci-dessus. Nous montrons de même qu'il n'existe pas  $t$  dans  $T([u_L, v_L])$  satisfaisant  $t > v_M$ .

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} \left[0, \frac{1}{4}\right] &\subset I_0 \quad , \quad T\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right) = I_0 \quad , \\ \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] &\subset I_0 \quad , \quad T\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right) = I_1 \quad , \\ \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] &\subset I_1 \quad , \quad T\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\right) = I_1 \quad , \\ \left[\frac{3}{4}, 1\right] &\subset I_1 \quad , \quad T\left(\left[\frac{3}{4}, 1\right]\right) = I_0 \quad . \end{aligned}$$

et donc :

$$I_0 \rightarrow I_0 \quad , \quad I_0 \rightarrow I_1 \quad , \quad I_1 \rightarrow I_1 \quad , \quad I_1 \rightarrow I_0 \quad .$$

3. Soit  $a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_n$  une suite binaire quelconque de longueur  $n+1$ . Par hypothèse, pour la suite  $a_1 \dots a_{n-1} a_n$  de longueur  $n$ , l'ensemble :

$$J_{a_1 \dots a_n} = \left\{ x \in [0, 1] : x \in I_{a_1}, T(x) \in I_{a_2}, \dots, T^n(x) \in I_{a_n} \right\}$$

est un intervalle fermé non vide contenu dans  $I_{a_1}$ . Puisque nous avons  $I_{a_0} \rightarrow I_{a_1}$ , nous savons d'après les questions 1 et 2 qu'il existe un intervalle fermé non vide  $L$  satisfaisant :

$$L \subset I_{a_0} \quad , \quad T(L) = J_{a_1 \dots a_n} \quad .$$

Nous avons donc :

$$L = \left\{ x \in [0, 1] : x \in I_{a_0}, T(x) \in I_{a_1}, \dots, T^{n-1}(T(x)) \in I_{a_n} \right\} = J_{a_0 a_1 \dots a_n} .$$

Nous avons aussi, du fait de sa définition,

$$J_{a_0 a_1 \dots a_n} = J_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}} \cap T^{-n}(I_{a_n}) \subset J_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}} .$$

4. Nous avons :

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad , \quad T(1) = 1 \quad , \quad T(0) = 0$$

et donc  $T^i\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  pour tout  $i$  plus grand que 2, i.e. la suite  $(T^i(T^2(\frac{1}{2})))_{i \in \mathbb{N}}$  est stationnaire.

5. D'après ce qui précède, si il existe  $\ell$  satisfaisant  $T^\ell(x) = \frac{1}{2}$ , alors nous avons :

$$T^{\ell+1}(x) = 1 \in I_1 \quad , \quad T^{\ell+n}(x) = 0 \in I_0 \quad \forall n > 1 .$$

Donc les symboles  $a_{\ell+n}$  sont bien uniquement définis pour  $n \geq 1$ . Seul le symbole  $a_\ell$  est indéfini. Donc, à tout  $x$  tel qu'il existe  $\ell$  satisfaisant  $T^\ell(x) = \frac{1}{2}$ , il est licite d'associer au plus deux suites de symboles tous identiques sauf le numéro  $\ell$ .

6. Puisque  $I_0$  et  $I_1$  sont des intervalles fermés non vide, nous savons, d'après la question 3, que, pour tout  $n \geq 0$  et toute suite binaire finie  $a_0 \dots a_n$ , l'ensemble :

$$J_{a_0 \dots a_n} = \left\{ x \in [0, 1] : x \in I_{a_0}, T(x) \in I_{a_1}, \dots, T^n(x) \in I_{a_n} \right\} .$$

est un intervalle fermé non vide et :

$$J_{a_0 \dots a_n} \subset J_{a_0 \dots a_{n-1}} .$$

Soit  $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite quelconque dans  $\Sigma(2)$ . Nous cherchons  $x$  dans  $[0, 1]$  satisfaisant :

$$T^k(x) \in I_{a_k} \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Un tel  $x$  existe si :

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} J_{a_0 \dots a_n} \neq \emptyset .$$

C'est bien le cas puisque  $(J_{a_0 \dots a_n})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de fermés non vides contenu dans le compact  $[0, 1]$ .

7. Supposons que  $T^i(x_1)$  et  $T^i(x_2)$  sont dans le même intervalle, disons  $I_0$ , alors nous avons :

$$T_{i+1}(x_1) = 2T_i(x_1) \quad , \quad T_{i+1}(x_2) = 2T_i(x_2)$$

et donc :

$$|T_{i+1}(x_1) - T_{i+1}(x_2)| = 2|T_i(x_1) - T_i(x_2)| .$$

Si c'est dans  $I_1$ , nous obtenons :

$$T_{i+1}(x_1) = 2(1 - T_i(x_1)) \quad , \quad T_{i+1}(x_2) = 2(1 - T_i(x_2))$$

et donc encore :

$$|T_{i+1}(x_1) - T_{i+1}(x_2)| = 2|T_i(x_1) - T_i(x_2)| .$$

Supposons que  $x_1$  et  $x_2$  sont deux points associés à la même suite binaire  $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Ceci signifie :

$$T^k(x_1) \in I_{a_k} \quad , \quad T^k(x_2) \in I_{a_k} \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Donc, pour tout  $k$ ,  $T^i(x_1)$  et  $T^i(x_2)$  sont dans le même intervalle. Nous en déduisons :

$$|T_k(x_1) - T_k(x_2)| = 2|T_{k-1}(x_1) - T_{k-1}(x_2)| = 2^k |x_1 - x_2| \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Comme  $|T_k(x_1) - T_k(x_2)|$  est inférieur à 1, ceci impose  $x_1 = x_2$ .

8. Soit  $x$  associé à une suite  $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  quelconque. Alors nous avons :

$$T^k(x) \in I_{a_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et donc :

$$T^{k-1}(T(x)) \in I_{a_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

ou encore :

$$T^k(T(x)) \in I_{\sigma_g(a)_k} \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Ceci montre que  $T(x)$  est associé à la suite  $\sigma_g(a)$ .

Supposons que  $a$  est une suite telle que la suite  $(\sigma_g^i(a))_{i \in \mathbb{N}}$  est périodique, de période  $n \neq 0$ , i.e. nous avons :

$$\sigma_g^n(a) = a .$$

Alors, si  $x$  est associé à  $a$ ,  $T^n(x)$  est associé d'après ce qui précède à  $\sigma_g^n(a)$  et donc à  $a$ . Mais alors l'unicité établie à la question 7 implique :

$$T^n(x) = x .$$

Donc à toute suite périodique dans  $\Sigma(2)$  correspond une suite périodique dans  $[0, 1]$ .

Maintenant, soit  $a$  une suite telle que la suite  $(\sigma_g^i(a))_{i \in \mathbb{N}}$  ne devient jamais périodique, i.e. nous avons :

$$\sigma_g^{n+m}(a) \neq \sigma_g^m(a) \quad \forall m \in \mathbb{N} , \forall n \in \mathbb{N}_* . \quad (2.5)$$

Alors, si  $x$  est associé à  $a$ , i.e. nous avons :

$$T^k(x) \in I_{a_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

nous ne pouvons avoir

$$T^{n+m}(x) = T^m(x)$$

pour  $n$  non nul. En effet, sinon nous aurions :

$$T^{k+m}(x) = T^{k+n+m}(x) \in I_{a_{k+m}} \cap I_{a_{k+n+m}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et donc soit :

$$T^{k+m}(x) = T^{k+n+m}(x) = \frac{1}{2},$$

soit :

$$a_{k+m} = a_{k+n+m}.$$

Dans le premier cas, nous savons que nous obtenons alors :

$$a_{\ell+m} = 0 \quad \forall \ell > k + 1$$

en contradiction avec (2.5). Donc seul le deuxième cas pourrait être possible. Mais de nouveau ceci contredirait (2.5). Donc à toute suite ne devenant pas périodique dans  $\Sigma(2)$  correspond une suite ne devenant pas périodique dans  $[0, 1]$ .

9. Soit  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  et  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  les applications définies par :

$$h(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2, \quad F(x) = 4x(1-x).$$

Nous avons :

$$F(h(x)) = 4 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2\right) = \sin(\pi x)^2.$$

Mais, si  $x$  est dans  $I_0$ , nous avons aussi :

$$h(T(x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}2x\right)^2 = F(h(x))$$

et, si  $x$  est dans  $I_1$ ,

$$h(T(x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2}2(1-x)\right)^2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}2x\right)^2 = F(h(x)).$$

Ceci établit la relation de commutation :

$$F \circ h = h \circ T.$$

Comme  $h$  est une bijection sur  $[0, 1]$ , nous avons aussi :

$$F = h \circ T \circ h^{-1}$$

et donc :

$$F^i = h \circ T^i \circ h^{-1}.$$

Donc si  $(T^i(x))_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite (respectivement, ne devenant pas) périodique, il en est de même de  $(F^i(h(x)))_{i \in \mathbb{N}}$ .

### 2.3.2 Exercice 2

#### Les données

Soient

- $\mathbb{S}^1$  le cercle unité  $\{\exp(2i\pi\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ , pris comme sous variété du plan complexe  $\mathbb{C}$ .
- $f = (f_1, f_2) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  la fonction définie par

$$f_1(z_1, z_2) = \frac{3z_1^2}{1 + 2|z_1|^2}, \quad f_2(z_1, z_2) = \exp(2i\pi\alpha) \frac{3z_1 z_2}{1 + 2|z_1||z_2|}$$

où  $\alpha$  est un réel donné dans  $[0, 1)$ .

- $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  et  $r : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  les fonctions définies par

$$g(z) = z^2, \quad r(z) = \exp(2i\pi\alpha) z.$$

- $\Sigma(2)_+$  l'ensemble des suites binaires  $\{\{a_j\}_{j=0}^\infty \mid a_j = 0 \text{ ou } 1\}$  muni de la topologie induite par la distance

$$d(a, b) = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j - b_j| 2^{-(j+1)}$$

- $\sigma_g$  l'opérateur sur les suites de décalage vers la gauche.
- $\phi : \Sigma(2)_+ \rightarrow \mathbb{S}^1$  l'application qui associe à une suite  $a$  de  $\Sigma(2)_+$  le complexe  $\exp(2\pi i\theta)$  où

$$\theta = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^{-(j+1)}$$

#### Questions

1. Montrer que,
  - (a) pour certaines valeurs de  $\alpha$  à préciser, il existe  $z$  dans  $\mathbb{S}^1$  tel que l'orbite  $\{r^n(z)\}_{n \geq 0}$  est dense dans  $\mathbb{S}^1$ .
  - (b) pour d'autres valeurs de  $\alpha$  à préciser, il existe  $z$  dans  $\mathbb{S}^1$  tel que l'orbite  $\{r^n(z)\}_{n \geq 0}$  est périodique dans  $\mathbb{S}^1$ .
2. Montrer que  $\phi$  est continue.
3. Montrer l'identité  $g \circ \phi = \phi \circ \sigma_g$ .
4. Des 2 points précédents, déduire que
  - (a) il existe  $z$  dans  $\mathbb{S}^1$  tel que l'orbite  $\{g^n(z)\}_{n \geq 0}$  est dense dans  $\mathbb{S}^1$ .
  - (b) pour tout entier  $q$ , il existe  $z$  dans  $\mathbb{S}^1$  tel que l'orbite  $\{g^n(z)\}_{n \geq 0}$  est périodique de période  $q$  dans  $\mathbb{S}^1$ .

5. Montrer que les sous-ensembles de  $\mathbb{C}^2$

$$\mathcal{T}_1 = \{(\exp(2\pi i\theta_1), \exp(2\pi i\theta_2)) : 0 \leq \theta_1 < 1, 0 \leq \theta_2 < 1\}$$

et

$$\mathcal{T}_2 = \{(\frac{1}{2}\exp(2\pi i\theta_1), \frac{1}{2}\exp(2\pi i\theta_2)) : 0 \leq \theta_1 < 1, 0 \leq \theta_2 < 1\}$$

sont invariants, le premier étant attracteur, pour le système dynamique dans  $\mathbb{C}^2$  :

$$(z_{1(n+1)}, z_{2(n+1)}) = f(z_{1n}, z_{2n}) .$$

6. Des points précédents et des identités :

$$f_1(z_1, z_2) = g(z_1) \quad , \quad f_2(z_1, z_2) = g(z_1) r\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathcal{T}_1 ,$$

déduire que, pour certaines valeurs de  $\alpha$  à préciser, il existe  $(z_1, z_2)$  dans  $\mathbb{C}^2$  tel que l'orbite  $\{f^n(z_1, z_2)\}_{n \geq 0}$  est périodique.

### Corrigé

1. L'application  $r$  est une rotation d'angle  $2\pi\alpha$ . Nous savons, d'après le chapitre 1, que, pour tout  $\theta$  dans  $[0, 1)$ , l'orbite  $\{\theta + n\alpha \pmod{1}\}_{n \geq 0}$  est périodique de période  $q$  si  $\alpha$  est le rationnel  $\frac{p}{q}$  et est dense dans  $[0, 1)$  si  $\alpha$  est irrationnel. Les mêmes propriétés sont valides pour tout  $z$  de  $\mathbb{S}^1$  et l'orbite associée  $\{r^n(z)\}_{n \geq 0}$  dans  $\mathbb{S}^1$ . Donc en particulier, pour le cas où  $\alpha = \frac{p}{q}$ , nous avons

$$r^q(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{S}^1$$

2. Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert dans  $\mathbb{S}^1$ . Soit  $\phi^{-1}(\mathcal{O})$  est vide et donc est un ouvert de  $\Sigma(2)_+$ . Soit il existe  $a = \{a_j\}_{j=0}^\infty$  dans  $\Sigma(2)_+$  tel que  $\phi(a) = \exp\left(2i\pi \sum_{j=0}^\infty a_j 2^{-(j+1)}\right)$  est dans  $\mathcal{O}$ . Mais alors,  $\mathcal{O}$  étant ouvert, il existe  $k$  tel que, pour tout  $\theta$  dans  $[0, 1)$  satisfaisant

$$\left| \theta - \sum_{j=0}^\infty a_j 2^{-(j+1)} \right| \leq 2^{-k} ,$$

$\exp(2i\pi\theta)$  est dans  $\mathcal{O}$ . En particulier, pour tout  $b = \{b_j\}_{j=0}^\infty$  de  $\Sigma(2)_+$  satisfaisant

$$b_j = a_j \quad \forall j < k ,$$

nous avons  $d(a, b) \leq 2^{-k}$  et donc  $\exp\left(2i\pi \sum_{j=0}^\infty b_j 2^{-(j+1)}\right)$  est dans  $\mathcal{O}$ . Ainsi  $\phi^{-1}(\mathcal{O})$  contient le voisinage  $\{b : d(a, b) \leq 2^{-k}\}$  de  $a$  et est donc ouvert.

3. Soit  $z$  quelconque dans  $\mathbb{S}^1$ . Il existe  $\theta$  dans  $[0, 1)$  tel que  $z = \exp(2i\pi\theta)$ . Nous avons alors

$$g(z) = \exp(2i\pi 2\theta)$$



Soit  $a = \{a_j\}_{j=0}^{\infty}$  une suite quelconque dans  $\Sigma(2)_+$ , nous avons  $\sigma_g(a) = \{b_j\}_{j=0}^{\infty}$  où  $b_j = a_{j+1}$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} b_j 2^{-(j+1)} &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} 2^{-(j+1)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-j} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{-(j+1)} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^{-(j+1)} - 2a_0 \\ &= 2 \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^{-(j+1)} \pmod{1} \end{aligned}$$

Nous en déduisons directement  $\phi(\sigma_g(a)) = g(\phi(a))$ .

4. (a) Soit  $a$  la suite particulière dans  $\Sigma(2)_+$  obtenue en prenant:

- pour ses 2 premiers symboles,  $a_0 = 0$  et  $a_1 = 1$ ,
- pour ses  $2 * 2^2$  symboles suivants, les paires

$$(a_2, a_3) = (0, 0), \quad (a_4, a_5) = (0, 1), \quad (a_6, a_7) = (1, 0), \quad (a_8, a_9) = (1, 1)$$

- pour ses  $3 * 2^3$  symboles suivants, les triplets

$$(a_{10}, a_{11}, a_{12}) = (0, 0, 0), \dots, \quad (a_{31}, a_{32}, a_{33}) = (1, 1, 1)$$

- ses  $4 * 2^4$  symboles ...
- ...

La suite ainsi obtenue est telle que, pour toute suite  $b$  de  $\Sigma(2)_+$ ,

- l'une des 2 suites  $a$  ou  $\sigma_g(a)$  est à une distance inférieure à  $\frac{1}{4}$ ,
- l'une des quatre suites  $\sigma_g^2(a)$ ,  $\sigma_g(\sigma_g^2(a))$ ,  $\sigma_g^2(\sigma_g^2(a))$ ,  $\sigma_g^3(\sigma_g^2(a))$  est à une distance inférieure à  $\frac{1}{8}$ ,
- ainsi de suite.

Nous en déduisons que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , et tout  $k$ , il existe  $n \geq k$  tel que  $d(b, \sigma_g^n(a)) \leq \varepsilon$ .

Par ailleurs, pour tout complexe  $z = \exp(2i\pi\theta)$  dans  $\mathbb{S}^1$  et tout  $\varepsilon$ , il existe une suite  $b = \{b_j\}_{j=0}^{\infty}$  dans  $\Sigma(2)_+$  telle que

$$\left| \theta - \sum_{j=0}^{\infty} b_j 2^{-(j+1)} \right| \leq \varepsilon$$

Donc, pour tout  $k$ , il existe  $n$  tel que  $\phi(\sigma_g^n(a)) = g^n(\phi(a))$  est à une distance inférieure à  $2\varepsilon$  de  $z$ . Nous en déduisons que l'orbite  $\{g^n(\phi(a))\}_{n \geq 0}$  est dense dans  $\mathbb{S}^1$  (et même que tout point de l'orbite est non errant).

(b) Soit  $q$  un entier donné, soit  $a_q$  la suite obtenue de la suite particulière  $a$  introduite au point 4a ci-dessus en prenant les  $q$  premiers symboles puis en répétant indéfiniment ce "motif". Par construction, nous avons  $\sigma_g^q(a_q) = a_q$  (notons aussi qu'il n'y a pas d'entier  $n$  plus petit que  $q$  satisfaisant  $\sigma_g^n(a_q) = a_q$ ). Nous en déduisons que l'orbite  $\{g^n(\phi(a_q))\}_{n \geq 0}$  est périodique de période  $q$  dans  $\mathbb{S}^1$ . Donc en particulier, nous avons

$$g^q(\phi(a_q)) = \phi(a_q)$$

5. En posant  $r_1 = |z_1|$  et  $r_2 = |z_2|$ , nous observons que la fonction  $f$  induit une fonction  $h = (h_1, h_2)$  de  $\mathbb{R}_+^2$  sur lui-même définie par

$$\begin{aligned} h_1(r_1, r_2) &= |f_1(z_1, z_2)| = \frac{3|z_1|^2}{1 + 2|z_1|^2} = \frac{3r_1^2}{1 + 2r_1^2} \\ h_2(r_1, r_2) &= |f_2(z_1, z_2)| = \frac{3|z_1||z_2|}{1 + 2|z_1||z_2|} = \frac{3r_1r_2}{1 + 2r_1r_2}. \end{aligned}$$

Cette fonction  $h$  a 5 points fixes

$$(r_1, r_2) = (0, 0) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{ou} \quad (1, 0) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad (1, 1).$$

Nous en déduisons que les ensembles  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sont bien invariants par  $f$ . Par ailleurs le gradient de  $h$  est:

$$\frac{\partial h}{\partial r_1, r_2}(r_1, r_2) = \begin{pmatrix} \frac{6r_1}{(1+2r_1^2)^2} & 0 \\ \frac{3r_2}{(1+2r_1r_2)^2} & \frac{3r_1}{(1+2r_1r_2)^2} \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont  $(0, 0)$  au point  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$  au point  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$  et  $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  au point  $r_1 = r_2 = 1$ . L'attractivité étant liée à la position du module des valeurs propres par rapport à 1, nous déduisons que l'ensemble  $\mathcal{T}_1$  est (hyperboliquement) attracteur et l'ensemble  $\mathcal{T}_2$  est (hyperboliquement) répulseur (=point selle).

6. Si  $\alpha$  est le rationnel  $\frac{p}{q}$ , prenons  $z_1 = \phi(a_q)$  et  $z_2$  quelconque dans  $\mathbb{S}^1$ . Posons  $(z_{1n}, z_{2n}) = f^n(z_1, z_2)$ . Ce point est dans  $\mathcal{T}_1$ . Puisque nous avons

$$f_1(z_1, z_2) = g(z_1) \quad , \quad f_2(z_1, z_2) = g(z_1) r \left( \frac{z_2}{z_1} \right) \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathcal{T}_1,$$

nous en déduisons, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$z_{1n} = g^n(z_1) \quad , \quad z_{2n} = g^n(z_1) r^n \left( \frac{z_2}{z_1} \right)$$

Mais, d'après les points 1 et 4b ci-dessus, nous avons

$$\frac{z_{2q}}{z_{1q}} = r^q \left( \frac{z_2}{z_1} \right) = \frac{z_2}{z_1} \quad , \quad z_{1q} = g^q(z_1) = z_1$$

et donc

$$z_{1q} = z_1 \quad , \quad z_{2q} = z_2.$$

L'orbite  $\{f^n(z_1, z_2)\}_{n \geq 0}$  est donc périodique de période  $q$ .

# Références

- [1] C. Ascoli, M. Barbi, S. Chillemi, and D. Petracchi, Phase-locked responses in the Limulus lateral eye. Theoretical and experimental investigation, *Biophys J*, 19 (1977), pp. 21940.
- [2] M. Bennett, M. F. Schatz, H. Rockwood, K. Wiesenfeld, Huygens's clocks. *Royal Society of London Proceedings Series A*, vol. 458, Issue 2019, p.563
- [3] R. Brette, Modèles impulsionsnels de réseaux de neurones biologiques. Thèse de doctorat en Neurosciences computationnelles. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI. 2003.
- [4] E.A. Coddington, N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill, 1955
- [5] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.
- [6] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, 1983.
- [7] R. Guttman, L. Feldman, and E. Jakobsson, Frequency entrainment of squid axon membrane, *J Membrane Biol*, 56 (1980), pp. 918.
- [8] P. Hartman. *Ordinary differential equations*. Second Edition, Birkhäuser, 1982.
- [9] M. Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Publication mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome 49, (1979), p. 5-233.
- [10] P.J. Holmes, The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table. *Journal of Sound and Vibration* (1982) 84(2), 173-189.
- [11] C. Koppl, Phase locking to high frequencies in the auditory nerve and cochlear nucleus magnocellularis of the barn owl, *Tyto alba*, *J Neurosci*, 17 (1997), pp. 331221
- [12] L. Lapicque, Recherches quantitatives sur l'excitation électrique des nerfs traitée comme une polarisation, *J Physiol Pathol Gen*, 9 (1907), pp. 620635.
- [13] J. Palis, W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*. Springer Verlag 1980.
- [14] M. Shub. Stabilité globale des systèmes dynamiques. *Astérisque* 56. Société Mathématique de France. 1978
- [15] S. Smale. Diffeomorphisms with many periodic points. In *Differential and Combinatorial Topology*, pages 63–80. S.S. Cairns, Princeton University Press, 1963.

- [16] S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Texts in applied mathematics 2. Springer Verlag, 1990.

# Annexes



# Annexe A

## Application de Poincaré et Solutions périodiques<sup>1</sup>

### A.1 Introduction

Nous donnons ici quelques précisions sur l'application de Poincaré en la particularisant pour en faire un outil d'étude de l'existence et de la stabilité de solutions périodiques. Le lecteur doit cependant garder à l'esprit que l'usage qu'on peut faire de cette application est plus vaste. Son intérêt tient à cette généralité et à son caractère intuitif et géométrique liés à la réduction de certains problèmes concernant les solutions d'un système à temps continu en problèmes équivalents mais pour des solutions d'un système à temps discret évoluant dans un espace de dimension plus petite.

Nous considérons le système :

$$\dot{x} = f(x) \tag{A.1}$$

où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continûment différentiable et nous dénotons par  $X(t, x)$  la solution au temps  $t$ , issue de  $x$  au temps 0.

Soit  $\Sigma$  une variété différentielle de dimension  $n - 1$  transverse à  $f$ . Pour fixer les idées dans ce qui suit, nous la définissons comme :

$$\Sigma = \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) = 0\} \tag{A.2}$$

où  $\mathcal{D}_g$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continûment différentiable satisfaisant :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x)f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_g ,$$

i.e.  $f$  est transverse à la variété. Nous supposons que  $\Sigma$  est telle qu'il existe  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $T_0 > 0$  tel que, en posant :

$$x_1 = X(T, x_0) ,$$

nous avons :

$$x_1 \in \mathcal{D}_g \quad , \quad g(x_0) = g(x_1) = 0$$

ou, en d'autres termes (voir la figure A.1), il existe une solution issue de  $\Sigma$  qui revient<sup>2</sup> à  $\Sigma$

---

<sup>1</sup>Le texte de cette annexe est inspiré de [8].

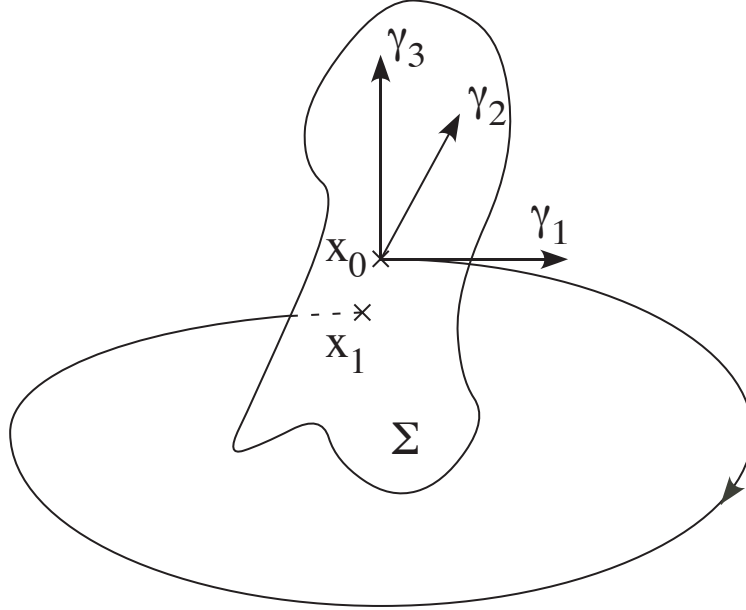


Figure A.1: Application de Poincaré.

au temps  $T_0$ . Du fait de la continuité en la condition initiale  $x$  des solutions  $X(t, x)$ , nous pouvons nous attendre à ce que, pour tout point  $x$  dans  $\Sigma$  et suffisamment proche de  $x_0$ , il existe  $T(x) > 0$  tel que  $X(T(x), x)$  est aussi dans  $\Sigma$  et proche de  $x_1$ . Nous avons ainsi une application  $x \mapsto X(T(x), x)$  de  $\Sigma$  de dimension  $n - 1$  dans  $\Sigma$ . Cette application est appelée application de Poincaré ou du premier retour. Du fait même de sa construction, cette application devrait hériter de nombreuses propriétés de celles du flot  $x \mapsto X(t, x)$ . C'est ce que nous vérifierons au paragraphe A.3, après avoir rappelé ces propriétés au paragraphe A.2.

## A.2 Rappels sur les propriétés d'un flot

Puisque  $f$  est continûment différentiable, il existe une et une seule solution  $X(t, x)$  de (A.1) issue de  $x$  au temps 0. Elle admet un intervalle maximal de définition  $]\sigma_-(x), \sigma_+(x)[$  et, pour tout intervalle  $[\tau_-, \tau_+]$  contenu dans  $]\sigma_-(x), \sigma_+(x)[$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{V}_x$  de  $x$  tel que la fonction  $(t, y) \in ]\tau_-, \tau_+[ \times \mathcal{V} \mapsto X(t, y)$  est continûment différentiable. De plus, nous avons, pour tout  $s$  et  $t$  dans  $]\tau_-, \tau_+[$ ,

$$X(s + t, y) = X(s, X(t, y)) = X(t, X(s, y))$$

et donc :

$$\begin{aligned} f(X(s + t, y)) &= \frac{\partial X}{\partial t}(s, X(t, y)) , \\ &= \frac{\partial X}{\partial x}(t, X(s, y)) \frac{\partial X}{\partial t}(s, y) , \\ &= \frac{\partial X}{\partial x}(t, X(s, y)) f(X(s, y)) . \end{aligned}$$

<sup>2</sup>En pratique on s'intéresse à un retour en  $x_1$  avec le même changement de signe de  $g$  qu'au passage par  $x_0$ . Le rôle de  $\mathcal{D}_g$  est donc aussi de rejeter la partie de  $\Sigma$  où le changement de signe devrait avoir lieu dans l'autre sens comme l'impose la continuité.



En particulier, ceci donne :

$$f(X(s, y)) = \frac{\partial X}{\partial x}(t, y)f(y) \quad \forall (t, y) \in ]\tau_-, \tau_+[ \times \mathcal{V} . \quad (\text{A.3})$$

### A.3 Construction et propriétés de l'application de Poincaré

Supposons donc l'existence de  $x_0$  dans  $\Sigma$  et  $T_0 > 0$  tel que  $x_1 = X(T_0, x_0)$  est aussi dans  $\Sigma$ . Une conséquence immédiate des résultats rappelés au-dessus est qu'il existe  $\eta > 0$  et un voisinage ouvert  $V_{x_0} \subset \mathcal{D}_g$  de  $x_0$  tels que la fonction  $(t, x) \in ]T_0 - \eta, T_0 + \eta[ \times V_{x_0} \mapsto g(X(t, x))$  est continûment différentiable. De plus, nous avons :

$$\begin{aligned} g(X(T_0, x_0)) &= g(x_1) = 0 , \\ \frac{\partial g}{\partial x}(X(T_0, x_0)) \frac{\partial X}{\partial t}(T_0, x_0) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_1) f(x_1) \neq 0 . \end{aligned}$$

D'après le Théorème des fonctions implicites, il existe  $\varepsilon$  dans  $]0, \eta]$ , un voisinage ouvert  $\mathcal{D}_T \subset V_{x_0}$  de  $x_0$  et une fonction  $\mathfrak{T} : \mathcal{D}_T \rightarrow ]T_0 - \varepsilon, T_0 + \varepsilon[$  continûment différentiable et satisfaisant :

$$\mathfrak{T}(x_0) = T_0$$

tels que, pour tout  $x$  dans  $\mathcal{D}_T$ ,  $X(\mathfrak{T}(x), x)$  est dans  $\mathcal{D}_g$  et  $\mathfrak{T}(x)$  est la seule solution dans  $]T_0 - \varepsilon, T_0 + \varepsilon[$  de :

$$g(X(\mathfrak{T}(x), x)) = 0 . \quad (\text{A.4})$$

Aussi nous avons :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(X(\mathfrak{T}(x), x)) \frac{\partial X}{\partial t}(\mathfrak{T}(x), x) \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}(x) + \frac{\partial g}{\partial x}(X(\mathfrak{T}(x), x)) \frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x) = 0$$

et donc :

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}(x) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(X(\mathfrak{T}(x), x)) \frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x)}{\frac{\partial g}{\partial x}(X(\mathfrak{T}(x), x)) f(X(\mathfrak{T}(x), x))} . \quad (\text{A.5})$$

Considérons alors l'application  $P : \mathcal{D}_T \rightarrow \Sigma$  définie par :

$$P(x) = X(\mathfrak{T}(x), x) . \quad (\text{A.6})$$

Elle est continûment différentiable. De plus, du fait de l'unicité des solutions, nous avons :

$$X(-\mathfrak{T}(P(x)), P(x)) = x \quad \forall x \in \Sigma_{x_0} ,$$

avec la notation :

$$\Sigma_{x_0} = \Sigma \cap \mathcal{D}_T .$$

Posons aussi :

$$\Sigma_{x_1} = P(\Sigma_{x_0}) \subset \Sigma .$$

Cet ensemble contient  $x_1$ . Nous avons établi :

**Proposition 2** *Sous les conditions ci-dessus, la restriction  $P_\Sigma$  de  $P$  à  $\Sigma_{x_0}$ , dite application de Poincaré, est une bijection entre  $\Sigma_{x_0}$  et  $\Sigma_{x_1}$ .*

De plus, avec (A.5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x) &= \frac{\partial X}{\partial t}(\mathfrak{T}(x), x) \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}(x) + \frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x) , \\ &= \left( \text{Id}_n - \frac{f(X(\mathfrak{T}(x), x)) \frac{\partial g}{\partial x}(X(\mathfrak{T}(x), x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(X(\mathfrak{T}(x), x)) f(X(\mathfrak{T}(x), x))} \right) \frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x) . \end{aligned}$$

Alors, avec (A.3), nous en déduisons :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x) = \left( \text{Id}_n - \frac{f(P(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(P(x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(P(x)) f(P(x))} \right) \frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x) \left( \text{Id}_n - \frac{f(x) \frac{\partial g}{\partial x}(x)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x)} \right) . \quad (\text{A.7})$$

Nous vérifions bien que, l'application de Poincaré  $P_\Sigma$ , envoyant des points  $x$  de  $\Sigma_{x_0}$  sur des points  $P_\Sigma(x)$  de  $\Sigma_{x_1}$  aussi contenu dans  $\Sigma$ , sa différentielle envoie des vecteurs de l'espace tangent à  $\Sigma$  en des points de  $\Sigma_{x_0}$  sur des vecteurs de l'espace tangent à  $\Sigma$  en des points de  $\Sigma_{x_1}$ . Ceci dérive directement du fait que  $\left( \text{Id}_n - \frac{f(x) \frac{\partial g}{\partial x}(x)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x)} \right)$  est un projecteur sur l'espace tangent à  $\Sigma$  au point  $x$  puisque, si  $v$  est un vecteur dans cet espace, il vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x + tv) - g(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x + tv)}{t} = \frac{\partial g}{\partial x}(x) v = 0 \quad \forall x \in \Sigma .$$

En fait l'expression (A.7) nous dit bien plus. En effet, d'après (A.3), le noyau du projecteur de départ  $\left( \text{Id}_n - \frac{f(x) \frac{\partial g}{\partial x}(x)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x)} \right)$ , engendré par  $f(x)$ , est envoyé par  $\frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x)$  en le noyau du projecteur au point d'arrivée  $\left( \text{Id}_n - \frac{f(P(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(P(x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(P(x)) f(P(x))} \right)$ , engendré par  $f(P(x))$ . Alors puisque, pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}_T$ ,  $\frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x)$  est une bijection, nous avons établi :

**Proposition 3** *Pour  $x$  dans  $\Sigma_{x_0}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x}(x)$  est une bijection entre l'espace tangent à  $\Sigma$  au point  $x$  et l'espace tangent à  $\Sigma$  au point  $P(x)$ .*

Pour aller plus loin dans la compréhension de ce que sous-tend cette Proposition, nous supposons maintenant que  $x_0$  et  $x_1$  sont confondus, i.e. :

$$X(T_0, x_0) = x_0 .$$

Nous reviendrons au prochain paragraphe sur la signification de cette hypothèse pour les solutions du système (A.1). Pour le moment, nous nous contentons d'étudier ce qu'elle implique pour l'application de Poincaré. Pour cela il est intéressant de travailler dans un système de coordonnées particulier. Nous avons :

**Lemme 1** *Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continûment différentiables qui satisfont :*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x) \neq 0 \quad (\text{A.8})$$

*au voisinage d'un point  $x_0$ , il existe un voisinage ouvert  $\Gamma_{x_0}$  de  $x_0$ , un système de coordonnées  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  défini sur  $\Gamma_{x_0}$  et une fonction  $h : \Gamma_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}_*$  continûment différentiable tels que, dans les coordonnées  $(\gamma_i)$  et pour tout point  $x$  dans  $\Gamma_{x_0}$ , nous avons :*

$$f((\gamma_i)) = (h((\gamma_i)), 0, \dots, 0) \quad , \quad g((\gamma_i)) = \gamma_1 . \quad (\text{A.9})$$

*Preuve :*

Ce résultat est une conséquence immédiate de résultats classiques de géométrie différentielle.

Puisque  $f(x_0)$  est non nul, il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  dont l'origine est en  $x_0$  et dont  $f(x_0)$  est le premier vecteur, i.e. :

$$x_0 = (0, \dots, 0) \quad , \quad f(x_0) = (1, 0, \dots, 0) .$$

Nous notons  $(\alpha_i)$  les coordonnées dans cette base.

D'après le Théorème de redressement des champs de vecteurs, il existe un voisinage de  $x_0$  sur lequel est défini un système de coordonnées  $(\beta_i)$  tel que, dans ces coordonnées et pour tout point dans ce voisinage, nous avons :

$$f((\beta_i)) = (1, 0, \dots, 0) .$$

Nous laissons le lecteur vérifier que l'application ci-dessous est un difféomorphisme définissant implicitement de façon licite ce système  $(\beta_i)$  :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = X(\beta_1, (0, \beta_2, \dots, \beta_n)) .$$

(A.8) s'écrit alors :

$$\frac{\partial g}{\partial \beta_1}((\beta_i)) \neq 0 .$$

Ensuite, d'après le Théorème du rang, il existe un un voisinage de  $x_0$  sur lequel est défini le système de coordonnées  $(\gamma_i)$  et la fonction  $h$  de l'énoncé. Nous laissons le lecteur vérifier que l'application ci-dessous est un difféomorphisme définissant de façon licite ce système :

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (g((\beta_i)), \beta_2, \dots, \beta_n) .$$

La fonction  $h$  est alors donnée par :

$$h((\gamma_i)) = \left. \frac{\partial g}{\partial \beta_1}((\beta_i)) \right|_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (g((\beta_i)), \beta_2, \dots, \beta_n)} .$$

Elle est donc à valeurs non nulles sur tout le voisinage.

Nous adoptons le système de coordonnées  $(\gamma_i)$  pour la suite. Soit  $x$  le point de  $\mathbb{R}^{n-1}$  défini par les  $n - 1$  dernières coordonnées  $(\gamma_2, \dots, \gamma_n)$ , i.e. :

$$x = (\gamma_1, x) .$$

D'après (A.9), nous avons :

$$x_0 = (0, 0) \quad , \quad x = (0, x) \quad \forall x \in \Sigma \cap \Gamma_{x_0} .$$

Ensuite, quitte à réduire  $\mathcal{D}_g$ , intervenant dans la définition de  $\Sigma$ , nous supposons que  $\mathcal{D}_g$ , voisinage de  $x_0 (= x_1)$ , est contenu dans  $\Gamma_{x_0} \cap \mathcal{D}_T$  et, pour les coordonnées  $(\gamma_i)$ , est le produit cartésien :

$$\mathcal{D}_g = ] - \nu, \nu[ \times \mathcal{D}_P$$

où  $\nu$  est un réel strictement positif et  $\mathcal{D}_P$  est un voisinage ouvert de l'origine dans  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Alors, l'application de Poincaré est la fonction qui, à  $x$  dans  $\mathcal{D}_P$ , associe les composantes 2 à

$n$  de  $P(0, x) = X(\mathfrak{T}(x), x)$  dans les coordonnées  $(\gamma_i)$ . Elle est continûment différentiable. De plus, toujours d'après (A.9), dans les coordonnées  $(\gamma_i)$  et pour tout  $x$  assez proche de  $x_0$ , nous avons :

$$\left( \text{Id}_n - \frac{f(x) \frac{\partial g}{\partial x}(x)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x)} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \left( \text{Id}_n - \frac{f(P(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(P(x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(P(x)) f(P(x))} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, puisque, dans les coordonnées  $(\gamma_i)$ ,  $f$  est l'opérateur de dérivation  $\frac{\partial}{\partial \gamma_1}$ , en utilisant l'identité (A.3), et la définition (A.6) de  $P$ , nous obtenons

$$\frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x) = \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & M(\gamma_1, x) \end{pmatrix}$$

ce qui définit une fonction  $M$  à valeurs matrices inversibles. Nous avons donc :

$$\frac{\partial P_\Sigma}{\partial x}(x) = \left( \frac{\partial P}{\partial \gamma_i}(0, x) \right)_{i=2, \dots, n} = M(0, x).$$

Nous avons établi :

**Proposition 4** *Si  $x_0 = X(T_0, x_0)$ , alors l'application de Poincaré  $P_\Sigma$  est un difféomorphisme. De plus 1 est valeur propre de  $\frac{\partial X}{\partial x}(T_0, x_0)$  et, si  $(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$  dénotent les  $n - 1$  autres valeurs propres de cette matrice, en comptant la multiplicité, la matrice Jacobienne de  $P_\Sigma$  en  $x_0$  admet pour valeurs propres  $(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Ces  $\lambda_i$  sont appelés multiplicateurs.*

Une autre propriété attendue est que, toujours lorsque  $x_0 = X(T_0, x_0)$ , les multiplicateurs ne dépendent pas de  $\Sigma$ . Précisément,

**Proposition 5** *Si  $x_0 = X(T_0, x_0)$  et si  $\Sigma'$  est une variété différentielle de dimension  $n - 1$  transverse à  $f$  au point  $X(t, x_0)$ , les valeurs propres de la matrice Jacobienne de  $P_{\Sigma'}$  en  $X(t, x_0)$  sont les  $(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$  définies dans la Proposition 4.*

*Preuve :*

Mettons le symbole  $'$  en exposant pour dénoter les objets obtenus de  $\Sigma'$  et  $X(t, x_0)$ . Comme le lecteur peut s'en douter, mais nous le démontrerons dans le paragraphe suivant, nous avons :

$$X(T_0, X(t, x_0)) = X(t, x_0).$$

Alors, en refaisant la construction ci-dessus, nous obtenons :

$$\mathfrak{T}'(X(t, x_0)) = T_0.$$

Ainsi, dans les coordonnées  $(\gamma'_i)$  et pour tout  $x$  assez proche de  $X(t, x_0)$ , nous avons :

$$\frac{\partial P'}{\partial x}(x') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(X(\mathfrak{T}'(x'), x')) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix}$$

et :

$$\frac{\partial P_{\Sigma'}}{\partial x'}(x') = \left( \frac{\partial P'}{\partial \gamma'_i}(0, x') \right)_{i=2, \dots, n}.$$

Donc  $\frac{\partial P_\Sigma}{\partial x'}$  admet en  $X(t, x_0)$ , i.e. en  $x' = 0$ , les mêmes valeurs propres, sauf la première égale à 1, que  $\frac{\partial X}{\partial x}(T_0, X(t, x))$ . Nous observons alors que l'identité en  $x$

$$X(T_0, X(t, x)) = X(t, X(T_0, x)) ,$$

implique :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(T_0, X(t, x)) \frac{\partial X}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial X}{\partial x}(t, X(T_0, x)) \frac{\partial X}{\partial x}(T_0, x) .$$

En  $x_0 = X(T_0, x_0)$ , ceci donne :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(T_0, X(t, x_0)) = \frac{\partial X}{\partial x}(t, X_0) \frac{\partial X}{\partial x}(T_0, x) \left( \frac{\partial X}{\partial x}(t, x_0) \right)^{-1} .$$

Les matrices  $\frac{\partial X}{\partial x}(T_0, x)$  et  $\frac{\partial X}{\partial x}(T_0, X(t, x_0))$  ont donc même valeurs propres, d'où le résultat énoncé.

## A.4 Solution périodique

Supposons à nouveau que  $x_0 = X(T_0, x_0)$ . Cette hypothèse équivaut à dire que l'application de Poincaré a un point fixe en l'origine des coordonnées  $(\gamma_i)$  données par le Lemme 1. Alors, par définition de  $P_\Sigma$ , l'intervalle maximal de définition  $] \sigma_-(x_0), \sigma_+(x_0) [$  de la solution  $X(t, x_0)$  contient  $T_0$ . Aussi, du fait de l'unicité des solutions, nous avons :

$$X(T_0 + t, x_0) = X(t, x_0) \quad \forall t \in ] \sigma_-(x_0), \sigma_+(x_0) - T_0 [ .$$

Il s'en suit que l'intervalle maximal de définition de la solution  $X(t, x_0)$  est en fait  $] -\infty, +\infty [$  et que c'est une solution  $T_0$ -périodique. Nous avons établi :

**Proposition 6** <sup>3</sup> *Si l'application de Poincaré a un point fixe, le système (A.1) admet une solution périodique.*

Sachant que l'existence d'une solution périodique de (A.1) est impliquée par l'existence d'un point fixe de  $P_\Sigma$ , nous voulons maintenant étudier si le comportement des solutions du système dynamique à temps discret (A.10) ci-dessous donne des informations sur celui des solutions de (A.1), initialisées au voisinage de la solution périodique. Ce système est :

$$x_{m+1} = P_\Sigma(x_m) , \tag{A.10}$$

qui n'a de sens que tant que :

$$x_m = (\gamma_2, \dots, \gamma_n) ,$$

est dans  $\mathcal{D}_P$ , (voisinage de 0 dans les coordonnées  $(\gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ). Nous dénotons par  $\mathcal{X}(m, x)$  la solution issue de  $x$ .

À ce point il est utile de définir le cycle  $\mathfrak{C}$ , ou courbe fermée, associé à la solution périodique  $X(t, x_0)$  comme l'ensemble :

$$\mathfrak{C} = \{x : \exists t : x = X(t, x_0)\} ,$$

---

<sup>3</sup>La réciproque est vraie.

i.e. l'ensemble des points visités par la solution périodique. C'est un compact. Nous notons  $d(x, \mathfrak{C})$  la distance à ce compact, soit :

$$d(x, \mathfrak{C}) = \inf_{t \in [0, T_0]} |x - X(t, x_0)| .$$

**Définition 2** Une solution  $T_0$ -périodique  $X(t, x_0)$  est dite orbitalement stable si :

A.11. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x$  pour lequel il existe un temps  $t_0$  satisfaisant :

$$d(X(t_0, x), \mathfrak{C}) \leq \delta ,$$

la solution  $X(t, x)$  existe sur  $[0, +\infty[$  et satisfait :

$$d(X(t, x), \mathfrak{C}) \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty[ ;$$

A.12. il existe  $\mu > 0$  tel que, pour tout  $x$  pour lequel il existe un temps  $t_0$  satisfaisant :

$$d(X(t_0, x), \mathfrak{C}) \leq \mu , \tag{A.13}$$

nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(X(t, x), \mathfrak{C}) = 0 .$$

Si de plus, pour tout  $x$  satisfaisant (A.13), il existe  $\phi$  tel que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |X(t + \phi, x_0) - X(t, x)| = 0$$

alors la stabilité orbitale est dite avoir lieu avec phase asymptotique.

Nous laissons au lecteur la vérification par passage aux coordonnées polaires que le système :

$$\dot{x}_1 = x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2)^3 - x_2 (2 - x_1^2 - x_2^2) , \quad \dot{x}_2 = x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2)^3 + x_1 (2 - x_1^2 - x_2^2)$$

admet le cercle unité comme cycle portant une solution périodique orbitalement stable mais sans phase asymptotique

Supposons que l'origine est asymptotiquement stable pour le système à temps discret (A.10). Précisément, supposons :

A.14. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x$  satisfaisant :

$$|x| \leq \delta ,$$

la solution  $\mathcal{X}(m, x)$  associée de (A.10) est dans  $\mathcal{D}_P$  pour tout  $m$  dans  $\mathbb{N}$  et satisfait :

$$|\mathcal{X}(m, x)| \leq \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N} .$$

A.15. il existe  $\mu > 0$  tel que pour tout  $x$  satisfaisant :

$$|x| \leq \mu ,$$

la solution  $\mathcal{X}(m, x)$  satisfait :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\mathcal{X}(m, x)| = 0 .$$

Choisissons un compact  $\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{D}_P$ , voisinage de l'origine (dans les coordonnées  $(\gamma_2, \dots, \gamma_n)$ ) et tel que :

- du fait de la continuité de la fonction  $\mathfrak{T}$ , il existe  $\mathfrak{T}_{\max}$  satisfaisant :

$$\mathfrak{T}_{\max} = \max_{x \in \mathcal{K}} \mathfrak{T}((0, x)) ;$$

- toutes les solutions de (A.1), issues d'un point  $x$  dans  $\{0\} \times \mathcal{K}$ , existent au moins sur  $[0, \mathfrak{T}_{\max}]$  (voir le paragraphe A.2).

D'après le point A.14 ci-dessus, il existe  $\delta_{\mathcal{K}} > 0$  tel que :

$$\mathcal{X}(m, x) \in \mathcal{K} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x : |x| \leq \delta_{\mathcal{K}} . \quad (\text{A.16})$$

Alors, pour un tel  $x$  et pour chaque  $m$ , nous avons :

$$\mathfrak{T}((0, \mathcal{X}(m, x))) \leq \mathfrak{T}_{\max}$$

et la solution  $X(t, \mathcal{X}(m, x))$  est définie au moins sur  $[0, \mathfrak{T}_{\max}]$ . Aussi la définition de  $P_{\Sigma}$  et de  $\mathfrak{T}$  impliquent :

$$\mathcal{X}(m+1, x) = X(\mathfrak{T}((0, \mathcal{X}(m, x))), \mathcal{X}(m, x)) .$$

Du fait de l'unicité des solutions de (A.1), la concaténation de ces morceaux de solutions  $X(t, \mathcal{X}(m, x))$  donne une unique solution  $X(t, (0, x))$  définie au moins sur  $[0, +\infty[$  et satisfaisant :

$$\mathcal{X}(m, x) = X(\mathcal{T}(m, x), (0, x)) \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.17})$$

avec :

$$\mathcal{T}(m, x) = \mathcal{T}(m-1, x) + \mathfrak{T}((0, \mathcal{X}(m-1, x))) \quad , \quad \mathcal{T}(0, x) = 0 . \quad (\text{A.18})$$

Par ailleurs, les propriétés des solutions de (A.1) font que l'ensemble :

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \bigcup_{t \in [0, \mathfrak{T}_{\max}]} X(t, \mathcal{K}) \quad (\text{A.19})$$

est un compact de  $\mathbb{R}^n$  sur lequel  $f$  admet une constante de Lipschitz  $L_f$ . Alors, pour tout  $x$  dans  $\mathcal{K}$  et  $t$  dans  $[0, \mathfrak{T}_{\max}]$ , nous avons, (puisque  $x_0 = (0, 0)$ ),

$$\begin{aligned} |X(t, (0, x)) - X(t, x_0)| &\leq |(0, x) - x_0| + \int_0^t |f(X(s, (0, x))) - f(X(s, x_0))| ds , \\ &\leq |x| + L_f \int_0^t |X(s, (0, x)) - X(s, x_0)| ds , \\ &\leq \exp(L_f t) |x| , \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient de

**Lemme 2 (Gronwall)** *Si  $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux fonctions continues et  $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction intégrable satisfaisant :*

$$a(t) \leq b(t) + \int_0^t a(s)c(s)ds \quad \forall t \in [0, T] ,$$

*nous avons :*

$$a(t) \leq b(t) + \int_0^t c(s)b(s) \exp\left(\int_s^t c(r)dr\right) ds \quad \forall t \in [0, T] . \quad (\text{A.20})$$

*Preuve :*

La fonction  $t \mapsto \exp\left(-\int_0^t c(r)dr\right) \int_0^t a(s)c(s)ds - \int_0^t c(s)b(s) \exp\left(\int_0^s c(r)dr\right) ds$  est décroissante.

Nous avons donc établi :

$$|X(t, (0, x)) - X(t, x_0)| \leq \exp(L_f \mathfrak{T}_{\max}) |x| \quad \forall x \in \mathcal{K}, \forall t \in [0, \mathfrak{T}_{\max}] .$$

Alors, avec (A.17) et (A.18), nous déduisons que, pour tout  $x$  satisfaisant :

$$|x| \leq \delta_{\mathcal{K}}, \quad (\text{A.21})$$

nous avons :

$$\begin{aligned} d(X(t + \mathcal{T}(m, x), (0, x)), \mathfrak{C}) &\leq |X(t + \mathcal{T}(m, x), (0, x)) - X(t, x_0)|, \\ &\leq |X(t, \mathcal{X}(m, x)) - X(t, x_0)|, \\ &\leq \exp(L_f \mathfrak{T}_{\max}) |\mathcal{X}(m, x)| \quad \forall t \in [0, \mathfrak{T}_{\max}] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

et

$$\mathcal{T}(m, x) - \mathcal{T}(m-1, x) \leq \mathfrak{T}_{\max} .$$

Ceci montre que la stabilité orbitale de la solution périodique de (A.1) découle des points A.14 et A.15 ci-dessus.

Pour ce qui concerne la phase asymptotique, observons que, puisque la fonction  $\mathfrak{T}$  est continûment différentiable sur  $\mathcal{D}_T$  contenant le compact  $\{0\} \times \mathcal{K}$ , elle admet une constante de Lipschitz  $L_T$  sur cet ensemble. Rappelons aussi que nous avons :

$$T_0 = \mathfrak{T}(x_0) = \mathfrak{T}((0, 0)) .$$

Donc, pour toute solution  $\mathcal{X}(m, x)$ , avec  $x$  satisfaisant (A.21), nous avons :

$$|\mathfrak{T}((0, \mathcal{X}(m-1, x))) - T_0| \leq L_T |\mathcal{X}(m-1, x)| .$$

Nous déduisons alors de (A.18) :

$$|(\mathcal{T}(m, x) - mT_0) - (\mathcal{T}(m-1, x) - (m-1)T_0)| \leq L_T |\mathcal{X}(m-1, x)|$$

Donc, si la convergence des solutions de (A.10) est telle que la série de terme  $|\mathcal{X}(i-1, x)|$  est convergente, la suite  $(\mathcal{T}(m, x) - mT_0)$  converge vers une limite notée  $\mathcal{T}_{\infty}(x)$  qui satisfait :

$$|\mathcal{T}_{\infty}(x) - (\mathcal{T}(m, x) - mT_0)| \leq L_T \sum_{i=m}^{\infty} |\mathcal{X}(i, x)| .$$

Puisque  $|f|$  est borné par disons  $F$  sur le compact  $\mathcal{A}(\mathcal{K})$  défini en (A.19), nous avons, pour tout  $t$  dans  $[0, \mathfrak{T}_{\max}]$  (voir (A.22)) :

$$\begin{aligned} &|X(t + mT_0 + \mathcal{T}_{\infty}(x), (0, x)) - X(t, x_0)| \\ &\leq |X(t + mT_0 + \mathcal{T}_{\infty}(x), (0, x)) - X(t + \mathcal{T}(m, x), (0, x))| \\ &\quad + |X(t + \mathcal{T}(m, x), (0, x)) - X(t, x_0)| \\ &\leq F |mT_0 + \mathcal{T}_{\infty}(x) - \mathcal{T}(m, x)| + |X(t, \mathcal{X}(m, x)) - X(t, x_0)|, \\ &\leq F L_T \sum_{i=m}^{\infty} |\mathcal{X}(i, x)| + \exp(L_f \mathfrak{T}_{\max}) |\mathcal{X}(m, x)| . \end{aligned}$$



Puisque  $\mathfrak{T}_{\max}$  est plus grand que  $T_0$ , tout  $s > 0$  peut s'écrire comme  $s = t + mT_0$  avec  $t$  dans  $[0, \mathfrak{T}_{\max}]$ . De plus, nous avons :

$$X(t + mT_0, x_0) = X(t, x_0)$$

et donc :

$$|X(s + \mathcal{T}_\infty(x), (0, x)) - X(s, x_0)| = |X(t + mT_0 + \mathcal{T}_\infty(x), (0, x)) - X(t, x_0)| .$$

Nous avons donc établi que, si la série de terme  $|\mathcal{X}(i, x)|$  est convergente, nous avons :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} |X(s + \mathcal{T}_\infty(x), (0, x)) - X(s, x_0)| = 0 .$$

En résumé, nous avons :

**Proposition 7** <sup>4</sup> *La solution périodique du système (A.1) est orbitalement stable si l'origine est asymptotiquement stable pour le système (A.10) obtenu en itérant l'application de Poincaré. De plus la convergence a lieu avec phase asymptotique si les solutions de (A.10) convergent au sens  $\ell^1$ .*

Il est bien connu qu'une façon d'étudier la stabilité d'un point d'équilibre est d'étudier les valeurs propres du système linéarisé en ce point. Ainsi, supposons que les valeurs propres de

$$A = \frac{\partial P_\Sigma}{\partial x}(0)$$

sont toutes de module strictement inférieur à 1. Alors, grâce à la décomposition de Jordan de  $A$ , nous voyons qu'il existe  $k$  et  $\rho < 1$  tel que, pour la norme euclidienne standard, nous avons :

$$|A^m x| \leq k \rho^m |x| .$$

Choisissons  $\lambda$  dans  $]\rho, 1[$  et définissons :

$$\|x\| = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m} |A^m x| .$$

C'est une norme vérifiant :

$$|x| \leq \|x\| \leq \frac{k\lambda}{\lambda - \rho} |x| \quad , \quad \|Ax\| \leq \lambda (\|x\| - |x|) .$$

Puisque  $P_\Sigma$  est définie et continûment différentiable sur  $\mathcal{D}_P$ , voisinage de 0, quitte à réduire  $\delta_{\mathcal{K}}$  donnant (A.16), nous avons :

$$\|P_\Sigma(x) - Ax\| \leq \frac{1 - \lambda}{2} \|x\| \quad \forall x : \|x\| \leq \delta_{\mathcal{K}} .$$

Il en résulte immédiatement :

$$\|\mathcal{X}(m + 1, x)\| \leq \frac{1 + \lambda}{2} \|\mathcal{X}(m, x)\| \leq \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right)^m \|x\| \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x : \|x\| \leq \delta_{\mathcal{K}} .$$

Nous avons donc :

---

<sup>4</sup>La réciproque est vraie. Ceci résulte du fait que, dans les conditions du Lemme 1,  $x_0$  est un point isolé dans  $\{0\} \times \mathcal{D}_P$ .

**Proposition 8** *Si l'application de Poincaré a un point fixe où sa matrice Jacobienne a toutes ses valeurs propres de module strictement inférieur à 1, le système (A.1) admet une solution périodique qui est orbitalement stable avec phase asymptotique.*

En fait ce résultat s'étend au cas où la matrice Jacobienne aurait aussi des valeurs propres de module strictement supérieures à 1 de sorte que le linéarisé de l'application de Poincaré au point fixe aurait une décomposition en un espace linéaire invariant associé aux valeurs propres de module strictement inférieur à 1 et un espace linéaire invariant complémentaire associé aux valeurs propres de module strictement supérieur à 1. Dans ce cas il existe aussi des ensembles invariants pour le système (A.10), l'un, dit variété stable, dans lequel les solutions convergent exponentiellement vers l'origine, l'autre, dit variété instable, dans lequel elles s'éloignent exponentiellement. La même configuration existe aussi pour le système (A.1), avec cette fois des variétés stable et instable qui bougent de façon périodique avec le temps.

# Annexe B

## Nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle<sup>1</sup>

### B.1 Introduction

Dans cette annexe, nous travaillons avec le cercle  $\mathbb{S}^1$  orienté, muni d'une mesure de longueur d'arc  $\ell$  et de la topologie induite par celle de  $\mathbb{R}^2$ . Pour faciliter les notations, nous prenons le rayon du cercle égal à  $\frac{1}{2\pi}$ . Une fois choisie une origine sur le cercle, l'abscisse curviligne de tout point est définie modulo 1. Alors  $\mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  ou encore l'intervalle  $[0, 1[$  de  $\mathbb{R}$  où 1 est identifié à 0 sont des espaces topologiques homéomorphes. Aussi, profitant de l'orientation de  $\mathbb{S}^1$ , nous pouvons faire rouler le cercle sur la droite réelle orientée à partir de la coïncidence des origines. De la sorte, à tout point  $x$  de  $\mathbb{S}^1$  correspond tous les points  $x + p$  de  $\mathbb{R}$  où  $p$  est un entier relatif quelconque. Inversement, à tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , il correspond un unique point de  $\mathbb{S}^1$  d'abscisse curviligne  $x - E(x)$  où  $E(x)$  est la partie entière de  $x$ , le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ . Enfin, grâce à l'orientation, nous pouvons définir un ordre cyclique sur le cercle, comme suit :

$a < b < c$  signifie que les trois points  $a$ ,  $b$  et  $c$  de  $\mathbb{S}^1$  sont distincts et que, pour aller de  $a$  à  $c$  selon l'orientation du cercle, il faut passer par  $b$ . Remarquons que nous avons :

$$a < b < c \quad \Leftrightarrow \quad b < c < a \quad \Leftrightarrow \quad c < a < b$$

Nous nous intéressons aux homéomorphismes  $f$  agissant sur  $\mathbb{S}^1$ . Ils peuvent être vus comme des bijections de  $[0, 1[$  sur lui-même vérifiant :

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = f(0)$$

et continues sauf éventuellement en l'unique point  $x_*$  de  $[0, 1[$  où  $f$  s'annule. De plus, seuls les trois cas suivants sont possible :

1. soit  $f$  est continue à droite en  $x_*$ , alors nous avons :

$$\lim_{x \nearrow x_*} f(x) = 1 ,$$

et  $f$  est strictement croissante sur  $[0, x_*[$  et sur  $[x_*, 1[$ ,

---

<sup>1</sup>Le texte de cette annexe est largement inspiré de [4], [6], [9] et [13].

2. soit  $x_* \neq 0$  et  $f$  est continue gauche en  $x_*$ , alors nous avons :

$$\lim_{x \searrow x_*} f(x) = 1 ,$$

et  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, x_*]$  et sur  $]x_*, 1[$

3. soit  $x_* = 0$  et  $f$  n'est pas continue à droite en  $x_*$ , alors nous avons :

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \nearrow 1} f(x) = 0$$

et  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$ .

Dans le premier cas  $f$  préserve l'ordre cyclique, i.e. :

$$a < b < c \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b) < f(c) .$$

Nous disons alors que  $f$  préserve l'orientation. Dans les deux autres,  $f$  inverse l'ordre cyclique, i.e. :

$$a < b < c \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(c) < f(b) .$$

Dans ce cas,  $f^2$ , l'itéré deux fois de  $f$ , préserve l'orientation. Dans la suite, nous nous limitons aux homéomorphismes  $f$  préservant l'orientation.

## B.2 Relèvements et propriétés

**Définition 3** *Étant donné  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  un homéomorphisme préservant l'orientation, un relèvement de  $f$  est une fonction continue  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant :*

$$\tilde{f}(x) = f(x - E(x)) \pmod{1} .$$

Un relèvement existe toujours. Par exemple, nous pouvons le construire comme suit, à partir de l'homéomorphisme vu comme une application de  $[0, 1[$  sur lui-même comme indiqué ci-dessus. Puisque  $f$  préserve l'orientation,  $f$  est continue à droite en  $x_*$ . Nous pouvons alors vérifier que la fonction définie ci-dessous est bien un relèvement de  $f$  :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_*) &= 1 , \\ \tilde{f}(x) &= f(x) \quad \text{si } 0 \leq x < x_* , \\ &= f(x) + 1 \quad \text{si } x_* \leq x < 1 , \\ &= \tilde{f}(x - E(x)) + E(x) \quad \text{si } x \notin [0, 1) . \end{aligned}$$

**Lemme 3** *Tout relèvement  $\tilde{f}$  d'un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^1$ , qui préserve l'orientation, est strictement croissant et nous avons :*

$$\tilde{f}(x + 1) = \tilde{f}(x) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} . \tag{B.1}$$

*Son inverse  $\tilde{f}^{-1}$  est un relèvement de  $f^{-1}$ . De plus, si  $\tilde{f}_1$  et  $\tilde{f}_2$  sont deux relèvements de  $f$ , il existe un entier relatif  $p$  tel que :*

$$\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x) + p \quad \forall x \in \mathbb{R} . \tag{B.2}$$

Enfin, soit  $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, strictement croissante satisfaisant :

$$\tilde{g}(x+1) = \tilde{g}(x) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{B.3})$$

et soit  $\tilde{x}_*$  est l'unique solution de :

$$\tilde{g}(x) = 0.$$

La fonction  $g : [0, 1[ \rightarrow [0, 1[$  définie par :

$$\begin{aligned} g(\tilde{x}_* - E(\tilde{x}_*)) &= 0, \\ g(x) &= \tilde{g}(x) + E(\tilde{x}_*) + 1 \quad \text{si } 0 \leq x < \tilde{x}_* - E(\tilde{x}_*), \\ &= \tilde{g}(x) + E(\tilde{x}_*) \quad \text{si } \tilde{x}_* - E(\tilde{x}_*) < x < 1, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

(en ignorant le second cas si  $\tilde{x}_*$  est un entier relatif,) peut être considérée comme un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation dont  $\tilde{g}$  est un relèvement.

*Preuve :*

Si  $\tilde{f}_1$  et  $\tilde{f}_2$  sont deux relèvements de  $f$ , pour tout  $x$ , il existe deux entiers relatifs  $q_1(x)$  et  $q_2(x)$  satisfaisant :

$$\tilde{f}_1(x) - q_1(x) = \tilde{f}_2(x) - q_2(x) = f(x - E(x)) \quad \forall x.$$

Ainsi la fonction  $x \mapsto q_1(x) - q_2(x) = \tilde{f}_1(x) - \tilde{f}_2(x)$  est continue. Puisqu'elle ne prend que des valeurs entières, elle est constante. Ceci établit (B.2).

Pour poursuivre, considérons comme ci-dessus l'unique point  $x_*$  de  $\mathbb{S}^1$  (ou plus exactement de  $[0, 1[$ ) où  $f$  s'annule. Puisque  $f$  est un homéomorphisme préservant l'orientation,  $f$  est continue à droite en  $x_*$ , satisfait :

$$\lim_{x \nearrow x_*} f(x) = 1 \quad (\text{B.5})$$

et  $f([x_*, 1[)$  et  $f([0, x_*[)$  sont deux intervalles disjoints recouvrant  $[0, 1[$ . Par ailleurs, puisque  $f(x_*)$  et  $E(x_*)$  sont nuls, nous avons :

$$E(\tilde{f}(x_*)) = \tilde{f}(x_*).$$

Donc, avec la continuité de  $\tilde{f}$ , nous obtenons :

$$\tilde{f}(x) = f(x - E(x)) + E(\tilde{f}(x_*)) \quad \forall x \in [x_*, x_* + 1[ ,$$

Avec (B.5), nous en déduisons :

$$\tilde{f}(x_* + 1) = \lim_{x \nearrow x_* + 1} \tilde{f}(x) = \lim_{x \nearrow x_*} f(x) + E(\tilde{f}(x_*)) = 1 + \tilde{f}(x_*). \quad (\text{B.6})$$

Mais alors, les fonctions  $\tilde{f}_1$  et  $\tilde{f}_2$  définies comme suit étant aussi des relèvements de  $f$  :

$$\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}(x) \quad , \quad \tilde{f}_2(x) = \tilde{f}(x+1) ,$$

(B.2) et (B.6) impliquent (B.1).

Puisque le relèvement  $\tilde{f}$  est continue, il est strictement monotone si et seulement si il est injectif. Supposons qu'il existe  $x_1 < x_2$  tels que :

$$\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2) . \quad (\text{B.7})$$

Dans ce cas,  $x_2 - x_1$  ne peut être qu'un entier  $q \geq 1$  puisque  $f$  est injective et :

$$\tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_2) = f(x_1 - E(x_1)) - f(x_2 - E(x_2)) \pmod{1} .$$

Avec (B.1), nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1 + q) &= \tilde{f}(x_1 + q - 1) + 1 , \\ &\vdots \\ &= \tilde{f}(x_1) + q . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Nous en déduisons :

$$\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2) = \tilde{f}(x_1 + q) = \tilde{f}(x_1) + q .$$

Ceci est une contradiction puisque  $q \geq 1$ . Donc (B.7) est impossible.

Enfin le relèvement  $\tilde{f}$  étant injectif et surjectif d'après (B.1), il admet un inverse  $\tilde{f}^{-1}$ . De plus, étant dans le cas particulier d'une bijection continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\tilde{f}^{-1}$  est continue. Alors, pour tout  $y$  de  $\mathbb{R}$ , soit :

$$x = \tilde{f}^{-1}(y) .$$

Il existe un entier  $q(x)$  tel que :

$$\tilde{f}(x) = f(x - E(x)) + q(x) .$$

Alors  $y - q(x)$  est dans  $[0, 1[$  et nous avons :

$$q(x) = E(y) .$$

Nous en déduisons :

$$\tilde{f}^{-1}(y) - E(\tilde{f}^{-1}(y)) = x - E(x) = f^{-1}(\tilde{f}(x) - q(x)) = f^{-1}(y - E(y)) .$$

Considérons maintenant une fonction  $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, strictement croissante et satisfaisant (B.3). La fonction  $g$  définie par (B.4) est alors une fonction continue strictement croissante sur  $[0, \tilde{x}_* - E(\tilde{x}_*)[$  et  $[\tilde{x}_* - E(\tilde{x}_*), 1[$  respectivement. Elle satisfait :

$$\begin{aligned} g(\tilde{x}_* - E(\tilde{x}_*)) &= 0 , \\ \lim_{x \nearrow \tilde{x}_* - E(\tilde{x}_*)} g(x) &= \tilde{g}(\tilde{x}_* - E(\tilde{x}_*)) + E(\tilde{x}_*) + 1 = \tilde{g}(\tilde{x}_*) + 1 = 1 , \\ \lim_{x \nearrow 1} g(x) &= \tilde{g}(1) + E(\tilde{x}_*) = \tilde{g}(0) + 1 + E(\tilde{x}_*) = g(0) . \end{aligned}$$

Elle est donc surjective de  $[0, 1[$  sur  $[0, 1[$ . Donc en identifiant 0 et 1, i.e.  $\lim_{x \nearrow \tilde{x}_* - E(\tilde{x}_*)} g(x)$  et  $\lim_{x \searrow \tilde{x}_* - E(\tilde{x}_*)} g(x)$ , nous obtenons bien un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation dont  $\tilde{g}$  est un relèvement.

**Proposition 9** Soit  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, strictement croissante et vérifiant :

$$\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} . \quad (\text{B.9})$$

Nous avons les propriétés suivantes :

1. La limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}^n(0)}{n}$  existe et est notée  $\tilde{\rho}(\tilde{f})$ . De plus, nous avons :

$$\left| \frac{\tilde{f}^n(0)}{n} - \tilde{\rho}(\tilde{f}) \right| \leq \frac{1}{n} . \quad (\text{B.10})$$

2. Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ , la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}^n(x) - x}{n}$  existe et est égale à  $\tilde{\rho}(\tilde{f})$ .

3. Si, pour un réel non négatif  $\varepsilon$  et un nombre rationnel  $\frac{p}{q}$ , avec  $q > 0$ , nous avons :

$$\left| \tilde{\rho}(\tilde{f}) - \frac{p}{q} \right| \leq \varepsilon ,$$

alors il existe  $x_0$  dans  $\mathbb{R}$  satisfaisant :

$$|\tilde{f}^q(x_0) - x_0 - p| \leq q\varepsilon .$$

Inversement, si il existe  $x_0$  dans  $\mathbb{R}$  satisfaisant :

$$\tilde{f}^q(x_0) = x_0 + p ,$$

alors :

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}) = \frac{p}{q} .$$

4. Pour tout entier  $n$ , nous avons :

$$\tilde{\rho}(\tilde{f} + n) = \tilde{\rho}(\tilde{f}) + n . \quad (\text{B.11})$$

*Preuve :*

Pour tout entier  $k$ , posons :

$$M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ \tilde{f}^k(x) - x \} , \quad m_k = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{ \tilde{f}^k(x) - x \} .$$

Nous avons :

$$0 \leq M_k - m_k < 1 .$$

En effet, nous avons successivement :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1 &\Rightarrow \tilde{f}^2(x+1) = \tilde{f}(\tilde{f}(x) + 1) = \tilde{f}^2(x) + 1 , \\ &\vdots \\ &\Rightarrow \tilde{f}^k(x+1) = \tilde{f}^k(x) + 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} , \\ &\Rightarrow \tilde{f}^k(x+1) - (x+1) = \tilde{f}^k(x) - x \quad \forall k \in \mathbb{N} . \end{aligned}$$

Ceci établit que, pour tout entier  $k$ , la fonction  $\tilde{f}^k - \text{Id}$  est périodique et continue. Donc les définitions de  $M_k$  et  $m_k$  ci-dessus sont licites et se ramènent à :

$$M_k = \max_{x \in [0,1[} \{\tilde{f}^k(x) - x\} = \tilde{f}(X_k) - X_k \quad , \quad m_k = \min_{x \in [0,1[} \{\tilde{f}^k(x) - x\} = \tilde{f}(x_k) - x_k \quad ,$$

pour certains  $X_k$  et  $x_k$  dans  $[0, 1[$ . Alors soit nous avons :

$$0 \leq X_k \leq x_k < 1$$

et donc :

$$0 \leq x_k - X_k < 1 \quad , \quad (\text{B.12})$$

soit nous avons :

$$0 \leq x_k \leq X_k < 1 \quad .$$

Dans ce dernier cas, nous retrouvons (B.12) en remplaçant  $x_k$  par  $x_k + 1$ , ce qui ne change rien du fait de la périodicité de  $\tilde{f}^k - \text{Id}$ .

Alors, puisque  $\tilde{f}$  est une fonction croissante, nous obtenons :

$$M_k + X_k = \tilde{f}(X_k) \leq \tilde{f}(x_k) = m_k + x_k$$

et donc le résultat recherché sous la forme :

$$0 \leq M_k - m_k \leq x_k - X_k < 1 \quad .$$

Maintenant observons que nous avons la suite d'inégalités :

$$\tilde{f}^k(y) - y - 1 \leq M_k - 1 \leq m_k \leq \tilde{f}^k(x) - x \leq M_k \leq m_k + 1 \leq \tilde{f}^k(y) - y + 1 \quad .$$

Nous en déduisons :

$$\tilde{f}^k(y) - y - 1 \leq \tilde{f}^k(x) - x \leq \tilde{f}^k(y) - y + 1 \quad \forall (x, y) \quad . \quad (\text{B.13})$$

En prenant  $y = 0$  et  $x = \tilde{f}^{k(j-1)}(0)$ , ceci donne :

$$\tilde{f}^k(0) - 1 \leq \tilde{f}^{kj}(0) - \tilde{f}^{k(j-1)}(0) \leq \tilde{f}^k(0) + 1 \quad ,$$

avec la notation :

$$\tilde{f}^0(0) = 0 \quad .$$

Par sommation nous obtenons :

$$n \left( \tilde{f}^k(0) - 1 \right) \leq \sum_{j=1}^n \left( \tilde{f}^{kj}(0) - \tilde{f}^{k(j-1)}(0) \right) \leq n \left( \tilde{f}^k(0) + 1 \right)$$

et donc :

$$n \tilde{f}^k(0) - n \leq \tilde{f}^{kn}(0) \leq n \tilde{f}^k(0) + n \quad .$$

Nous avons ainsi :

$$\frac{\tilde{f}^k(0) - 1}{k} \leq \frac{\tilde{f}^{kn}(0)}{kn} \leq \frac{\tilde{f}^k(0) + 1}{k}$$



ou encore :

$$\left| \frac{\tilde{f}^{kn}(0)}{kn} - \frac{\tilde{f}^k(0)}{k} \right| \leq \frac{1}{k}.$$

Interchangeant  $k$  et  $n$ , nous avons aussi :

$$\left| \frac{\tilde{f}^{kn}(0)}{kn} - \frac{\tilde{f}^n(0)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

L'inégalité triangulaire nous donne alors :

$$\left| \frac{\tilde{f}^k(0)}{k} - \frac{\tilde{f}^n(0)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{k}.$$

Nous en déduisons que  $\frac{\tilde{f}^k(0)}{k}$  est une suite de Cauchy. Elle converge vers un point noté  $\tilde{\rho}(\tilde{f})$ . De plus, en passant à la limite pour  $k$  tendant vers l'infini, nous obtenons aussi :

$$\left| \frac{\tilde{f}^n(0)}{n} - \tilde{\rho}(\tilde{f}) \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Le point 1 est donc établi.

Pour établir le point 2, nous reprenons les inégalités (B.13) avec  $y = 0$ . Nous obtenons :

$$\frac{\tilde{f}^k(0) - 1}{k} \leq \frac{\tilde{f}^k(x) - x}{k} \leq \frac{\tilde{f}^k(0) + 1}{k} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Avec le Théorème des gendarmes, il vient que la suite  $\frac{\tilde{f}^k(x) - x}{k}$  a la même limite  $\tilde{\rho}(\tilde{f})$  que la suite  $\frac{\tilde{f}^k(0)}{k}$ .

Passons maintenant au point 3. Supposons que nous avons :

$$\left| \tilde{\rho}(\tilde{f}) - \frac{p}{q} \right| \leq \varepsilon \tag{B.14}$$

et :

$$\left| \tilde{f}^q(x) - x - p \right| > q\varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par continuité de  $\tilde{f}$ , nous avons soit :

$$\tilde{f}^q(x) - x > p + q\varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{B.15}$$

soit :

$$\tilde{f}^q(x) - x < p - q\varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{B.16}$$

Rappelons que nous avons établi au début de cette preuve que  $\tilde{f}^q - \text{Id}$  est une fonction périodique.

- Pour le cas (B.15), l'infimum sur  $\mathbb{R}$  de  $\tilde{f}^q(x) - x - p - q\varepsilon$  est atteint et vaut, disons,  $a$  qui ne peut qu'être strictement positif. Nous avons donc :

$$\tilde{f}^q(x) - x \geq p + q\varepsilon + a \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous avons donc aussi :

$$\tilde{f}^{qj}(x) - \tilde{f}^{q(j-1)}(x) \geq p + q\varepsilon + a \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Par sommation, ceci donne :

$$\tilde{f}^{qk}(x) - x \geq k(p + q\varepsilon + a) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et donc :

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}^{kq}(x) - x}{kq} \geq \frac{p + q\varepsilon + a}{q} .$$

Ceci contredit (B.14) puisque  $a$  est strictement positif.

– Pour le cas (B.16), il suffit de travailler avec :

$$a = -\sup_{x \in \mathbb{R}} \tilde{f}^q(x) - x - p > 0$$

qui conduit par le même procédé à :

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}^{kq}(x) - x}{kq} \leq \frac{p - q\varepsilon - a}{q} .$$

Inversement, supposons l'existence de  $x_0$  satisfaisant :

$$\tilde{f}^q(x_0) = x_0 + p$$

avec  $q > 0$  et  $p$  des entiers relatifs. Avec l'aide de (B.9), nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} \tilde{f}^q(x_0) &= x_0 + p , \\ \tilde{f}^{2q}(x_0) &= \tilde{f}^q(x_0 + p) = \tilde{f}^q(x_0 + p - 1) + 1 = \dots = \tilde{f}^q(x_0) + p = x_0 + 2p , \\ &\vdots \\ \tilde{f}^{kq}(x_0) &= x_0 + kp . \end{aligned}$$

Puisque nous avons :

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}^{kq}(x_0) - x_0}{kq} ,$$

nous en déduisons :

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}) = \frac{p}{q} .$$

Finalement, pour établir le point 4, en utilisant (B.9) itérativement, nous écrivons successivement :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) + n &= \tilde{f}(x) + n , \\ \tilde{f}(\tilde{f}(x) + n) + n &= \tilde{f}(\tilde{f}(x) + n - 1) + 1 + n = \dots = \tilde{f}^2(x) + n + n = \tilde{f}^2(x) + 2n , \\ &\vdots \\ (\tilde{f} + n)^k(x) &= \tilde{f}^k(x) + kn . \end{aligned}$$

Nous en déduisons (B.11) en divisant par  $k$  et passant à la limite.

## B.3 Nombre de rotation et propriétés

**Définition 4** Nous définissons le nombre de rotation  $\rho(f)$  d'un homéomorphisme  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  préservant l'orientation comme :

$$\rho(f) = \tilde{\rho}(\tilde{f}) \pmod{1},$$

où  $\tilde{f}$  est un relèvement quelconque de  $f$ .

Cette définition est licite du fait de (B.2) et (B.11).

À un homéomorphisme  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  préservant l'orientation, nous associons le système dynamique suivant sur  $\mathbb{S}^1$  :

$$x_{n+1} = f(x_n). \tag{B.17}$$

Le nombre de rotation est la moyenne des longueurs des arcs  $\overline{x_n x_{n+1}}$ , allant de  $x_n$  à  $x_{n+1}$ , selon l'orientation du cercle.

**Proposition 10** Si, pour un réel non négatif  $\varepsilon$  et un nombre rationnel  $\frac{p}{q}$ , avec  $q > 0$  et  $\varepsilon q < 1$ , nous avons :

$$\left| \rho(f) - \frac{p}{q} \right| \leq \varepsilon, \tag{B.18}$$

alors il existe  $x_0$  dans  $\mathbb{S}^1$  tel que la longueur de l'arc le plus court  $\overline{x_0 f^q(x_0)}$  joignant  $x_0$  à  $f^q(x_0)$  satisfait :

$$\ell(\overline{x_0 f^q(x_0)}) \leq q\varepsilon.$$

Inversement si il existe  $x_0$  dans  $\mathbb{S}^1$  satisfaisant :

$$f^q(x_0) = x_0, \tag{B.19}$$

alors :

$$\rho(f) = \frac{p}{q}.$$

D'après cette Proposition, le système (B.17) admet une orbite  $q$ -périodique si et seulement si le nombre de rotation  $\rho(f)$  est le rationnel  $\frac{p}{q}$ .

*Preuve :*

Supposons que nous avons (B.18). Dans ce cas, il existe un relèvement  $\tilde{f}$  et un entier relatif  $r$  tel que :

$$\left| \tilde{\rho}(\tilde{f}) - \frac{p + rq}{q} \right| \leq \varepsilon.$$

D'après le point 3 de la Proposition 9, ceci implique l'existence de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}$  satisfaisant :

$$\left| \tilde{f}^q(x_0) - x_0 - (p + rq) \right| \leq q\varepsilon.$$

Aussi nous avons vu dans la preuve de la Proposition 9 que la fonction  $\tilde{f}^q - \text{Id}$  est périodique, nous pouvons donc supposer que  $x_0$  est dans  $[0, 1[$ .

Alors, il existe  $q$  entiers relatifs  $p_i$  satisfaisant :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x_0) &= f(x_0) + p_1, \\
\tilde{f}^2(x_0) &= \tilde{f}(f(x_0) + p_1) = f^2(x_0) + p_2, \\
&\vdots \\
\tilde{f}^q(x_0) &= \tilde{f}(f^{q-1}(x_0) + p_{q-1}) = f^q(x_0) + p_q.
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Nous avons donc :

$$|f^q(x_0) - x_0 + (p_q - (p + rq))| \leq q\varepsilon,$$

où l'entier relatif  $(p_q - (p + rq))$  ne peut être que  $-1$ ,  $0$  ou  $1$ , puisque  $x_0$  et  $f(x_0)$  sont dans  $[0, 1)$  et  $q\varepsilon < 1$ . Ceci implique :

$$\min\{|f^q(x_0) - x_0 - 1|, |f^q(x_0) - x_0|, |f^q(x_0) - x_0 + 1|\} \leq q\varepsilon$$

et donc,

soit :

$$|f^q(x_0) - x_0| \leq q\varepsilon,$$

soit :

$$1 - |f^q(x_0) - x_0| \leq \min\{|f^q(x_0) - x_0 - 1|, |f^q(x_0) - x_0 + 1|\} \leq q\varepsilon.$$

Inversement, supposons qu'il existe  $x_0$  dans  $[0, 1[$  satisfaisant (B.19). Alors, en procédant comme pour obtenir (B.20) ci-dessus, nous voyons qu'il existe des entiers relatifs  $p_{q-1}$  et  $p_q$  tel que :

$$\tilde{f}^q(x_0) = \tilde{f}(f^{q-1}(x_0) + p_{q-1}) = f^q(x_0) + p_q = x_0 + p_q.$$

Donc, d'après le point 3 de la Proposition 9, nous avons :

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}) = \frac{p_q}{q}$$

et donc

$$\rho(f) = \frac{p_q}{q} \pmod{1}.$$

**Définition 5** On appelle ensemble  $\omega$ -limite de  $x$  et on note  $\Omega(x)$ , l'ensemble des points d'accumulation dans  $\mathbb{S}^1$  de la suite  $\{f^i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ .

**Proposition 11** Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  un homéomorphisme préservant l'orientation et admettant un relèvement  $\tilde{f}$  deux fois continûment différentiable avec une dérivée strictement positive en tout point. Si le nombre de rotation  $\rho(f)$  est irrationnel, alors pour tout  $x$  de  $\mathbb{S}^1$ , l'ensemble  $\omega$ -limite  $\Omega(x)$  est l'ensemble  $\mathbb{S}^1$  tout entier.

Une conséquence directe de cette Proposition est que si le nombre de rotation est irrationnel, chaque orbite  $\{f^i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$  est partout dense dans  $\mathbb{S}^1$ .

*Preuve :*

Commençons par observer qu'un ensemble  $\omega$ -limite est non vide, fermé et invariant. En effet il est non vide puisque la suite  $\{f^i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$  est dans le compact  $\mathbb{S}^1$ . Aussi soit  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $\Omega(x)$  convergeant vers  $y_\ell$  dans  $\mathbb{S}^1$ . Pour chaque  $n$ , nous pouvons trouver  $i_n$  satisfaisant :

$$|y_n - f^{i_n}(x)| < \frac{1}{n}.$$

Donc, pour tout  $\eta > 0$ , nous pouvons trouver un entier  $N$  tel que nous avons :

$$|y_n - f^{i_n}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \& \quad |y_n - y_\ell| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n : n \geq N.$$

Il existe donc bien une sous-suite d'indices  $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tels que  $f^{i_n}(x)$  tend vers  $y_\ell$ .  $y_\ell$  est donc dans  $\Omega(x)$  et  $\Omega(x)$  est fermé.

Pour établir l'inclusion :

$$f(\Omega(x)) \subset \Omega(x),$$

prenons un point  $y$  dans  $\Omega(x)$ . Pour tout  $\eta > 0$  et tout  $n$ , il existe  $i : i \geq n$  tel que nous avons :

$$|y - f^i(x)| \leq \eta.$$

Comme  $f$  est uniformément continue sur le compact  $\mathbb{S}^1$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$|y - f^i(x)| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f^{i+1}(x)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $n$ , il existe  $i : i \geq n$  tel que :

$$|f(y) - f^{i+1}(x)| \leq \varepsilon.$$

Ceci établit que  $f(y)$  est dans la fermeture de  $\Omega(x)$ . Mais  $\Omega(x)$  étant fermé,  $f(y)$  est dans  $\Omega(x)$ . Inversement, pour tout  $y$  dans  $f(\Omega(x))$ , tout  $\eta > 0$  et tout  $n$ , il existe  $i : i \geq n$  tel que nous avons :

$$|y - f^{i+1}(x)| \leq \eta.$$

Ceci établit :

$$\Omega(x) \subset f(\Omega(x)).$$

Ensuite, rappelons qu'un connexe  $U$  de  $\mathbb{S}^1$  est un arc de cercle qui a une longueur  $\ell(U) \leq 1$  et qui va d'une extrémité  $\alpha$  à une extrémité  $\beta$  selon l'orientation du cercle. Cet arc est homéomorphe à un intervalle dont les extrémités  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  sont telles que  $\tilde{\alpha}$  est définie à un entier relatif près et :

$$\tilde{\beta} = \tilde{\alpha} + \ell(U).$$

De plus, du fait de la continuité de  $f$  et de son relèvement  $\tilde{f}$ ,

$$\ell(f(U)) = \tilde{f}(\tilde{\beta}) - \tilde{f}(\tilde{\alpha}) \quad , \quad \ell(f^{-1}(U)) = \tilde{f}^{-1}(\tilde{\beta}) - \tilde{f}^{-1}(\tilde{\alpha}).$$

Par ailleurs, puisque la fonction  $\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}$  ne prend que des valeurs strictement positives, nous avons :

$$\frac{d\tilde{f}^i}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) = \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{f}^{i-1}(\tilde{x})) \frac{d\tilde{f}^{i-1}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{f}^j(\tilde{x})) > 0 \quad \forall \tilde{x} \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.21})$$

Nous en déduisons par changement de variable :

$$\ell(f^k(U)) = \int_{\tilde{f}^k(\tilde{\alpha})}^{\tilde{f}^k(\tilde{\beta})} ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} \frac{d\tilde{f}^k}{d\tilde{x}}(t) dt \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.22})$$

Considérons maintenant la fonction :

$$F(\tilde{x}) = \log \left( \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) \right). \quad (\text{B.23})$$

Cette fonction est bien définie pour tout  $\tilde{x}$  du fait de l'hypothèse de stricte positivité sur  $\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}$ . Nous avons :

$$\frac{dF}{d\tilde{x}} = \frac{d^2\tilde{f}}{d\tilde{x}^2} / \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}.$$

Par ailleurs, (voir la preuve de la Proposition 9) la fonction  $\tilde{f} - \text{Id}$  étant périodique, il en est de même de  $\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}$  et  $\frac{d^2\tilde{f}}{d\tilde{x}^2}$ . Nous en déduisons que la fonction  $\frac{dF}{d\tilde{x}}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , i.e., nous avons :

$$\left| \frac{dF}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) \right| \leq M \quad \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}.$$

Alors nous obtenons :

$$|F(\tilde{y}) - F(\tilde{x})| = \left| \int_{\tilde{x}}^{\tilde{y}} \frac{dF}{d\tilde{x}}(s) ds \right| \leq 2M (\tilde{y} - \tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} \leq \tilde{y}. \quad (\text{B.24})$$

Avant de poursuivre, rappelons le résultat suivant dû à Liouville :

**Théorème 3** *Pour tout réel  $\rho$  irrationnel et tout entier  $n$ , il existe des entiers relatifs  $p_n$  et  $q_n \geq n$  satisfaisant :*

$$\left| \rho - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2}.$$

$\rho(f)$  étant irrationnel par hypothèse, cette proposition s'applique. D'après la Proposition 10, il existe une suite  $x_n$  de points de  $\mathbb{S}^1$  telle que la longueur de l'arc  $\overline{x_n f^{q_n}(x_n)}$  le plus court satisfait :

$$\ell(\overline{x_n f^{q_n}(x_n)}) \leq \frac{1}{2q_n} \leq \frac{1}{2n}. \quad (\text{B.25})$$

Soit  $m_n$  le plus petit entier tel que  $f^{m_n}(x_n)$  ou  $f^{-m_n}(x_n)$  est le point le plus proche de  $x_n$  parmi les points  $f^i(x_n)$  et  $f^{-i}(x_n)$ , avec  $i$  dans  $\{1, \dots, q_n\}$ .  $f^{-m_n}(x_n)$  est distinct de  $x_n$ , sinon  $x_n$  satisferait (B.19) et, d'après la Proposition 10, cela contredirait l'hypothèse d'irrationalité de  $\rho(f)$ . Observons aussi que la suite  $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut être bornée. Sinon, il existerait un entier  $M$  tel que, pour tout point d'accumulation  $x_*$  de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , nous aurions :

$$\forall N, \exists n \geq N, \exists i \in \{1, \dots, M\} : \ell(\overline{x_* f^i(x_*)}) \leq \frac{1}{n}$$

et donc :

$$\exists j \in \{1, \dots, M\} : \ell(\overline{x_* f^j(x_*)}) = 0.$$

Dans tout le reste de cette preuve, nous considérons le cas où c'est  $f^{-m_n}(x_n)$  qui est le point le plus proche de  $x_n$ . Le cas  $f^{m_n}(x_n)$  se traite de la même façon.

Nous désignons par  $\overrightarrow{\alpha\beta}$  l'arc d'extrémités  $\alpha$  et  $\beta$  avec une orientation telle que nous allons de  $\alpha$  à  $\beta$  dans le même sens que pour aller de  $x_n$  à  $f^{-m_n}(x_n)$  selon le chemin le plus court. Puisque  $f$  et  $f^{-1}$  préservent l'orientation et la connexité, nous avons :

$$f(\overrightarrow{\alpha\beta}) = \overrightarrow{f(\alpha)f(\beta)} \quad , \quad f^{-1}(\overrightarrow{\alpha\beta}) = \overrightarrow{f^{-1}(\alpha)f^{-1}(\beta)} \quad .$$

Pour établir par contradiction que nous avons :

$$\overrightarrow{f^i(x_n)f^{i-m_n}(x_n)} \cap \overrightarrow{f^j(x_n)f^{j-m_n}(x_n)} = \emptyset \quad \forall i \neq j \in \{0, \dots, m_n - 1\} \quad , \quad (\text{B.26})$$

i.e. les arcs  $\overrightarrow{f^i(x_n)f^{i-m_n}(x_n)}$  sont disjoints pour  $i$  dans  $\{0, \dots, m_n - 1\}$ , supposons qu'il existe un entier  $j$  dans  $\{0, \dots, m_n - 1\}$  et un entier relatif  $i$  dans  $\{-m_n, \dots, m_n - 1\}$ , différent de  $j$  et  $j - m_n$ , tels que :

$$f^i(x_n) \in \overrightarrow{f^j(x_n)f^{j-m_n}(x_n)} \quad .$$

Alors :

- soit nous avons  $j - m_n < i < m_n$ . Dans ce cas, puisque  $f^{-1}$  préserve l'orientation,  $f^{-j}(f^i(x_n)) = f^{i-j}(x_n)$  est dans  $\overrightarrow{x_n f^{-m_n}(x_n)}$ , avec  $|i - j| < m_n$ . Ceci contredit la minimalité de  $m_n$ .
- Soit nous avons  $-m_n \leq i < j - m_n < 0$ . Alors  $i + m_n$  est entre  $j - m_n$  et  $m_n$ , donc, d'après ce qui précède,  $f^{i+m_n}(x_n)$  n'est pas dans  $\overrightarrow{f^j(x_n)f^{j-m_n}(x_n)}$ . Comme, par hypothèse,  $f^i(x_n)$  est dans cet arc, les arcs  $\overrightarrow{f^{i+m_n}(x_n)f^i(x_n)}$  et  $\overrightarrow{f^j(x_n)f^{j-m_n}(x_n)}$  s'intersectent.  $f^i(x_n)$  étant dans cette intersection, du fait de l'orientation, il en est de même de  $f^j(x_n)$ . Nous avons donc :

$$f^j(x_n) \in \overrightarrow{f^{i+m_n}(x_n)f^i(x_n)}$$

avec  $(i + m_n) - m_n < j < m_n$ . Ceci est impossible comme nous l'avons vu plus haut.

Nous avons donc bien (B.26). En fait (B.26) est satisfait non seulement par  $x_n$ , mais par tout point  $x$  de  $\mathbb{S}^1$ . En effet, supposons qu'il existe  $x$  dans  $\mathbb{S}^1$  et  $i \neq j$  dans  $\{0, \dots, m_n - 1\}$  tels que :

$$\overrightarrow{f^i(x)f^{i-m_n}(x)} \cap \overrightarrow{f^j(x)f^{j-m_n}(x)} \neq \emptyset \quad .$$

Une des extrémités d'un arc est contenue dans l'autre, disons que  $f^i(x)$  est dans  $\overrightarrow{f^j(x)f^{j-m_n}(x)}$ . Alors, par préservation de l'orientation,  $x$  est dans  $\overrightarrow{f^{j-i}(x)f^{j-i-m_n}(x)}$ . Comme  $x_n$  n'est pas dans  $\overrightarrow{f^{j-i}(x_n)f^{j-i-m_n}(x_n)}$ . Par continuité, il existe  $y$  dans  $\mathbb{S}^1$  tel que soit  $y = f^{j-i}(y)$ , soit  $y = f^{j-i-m_n}(y)$ . Dans les deux cas, nous obtenons une orbite périodique en contradiction avec l'irrationalité de  $\rho(f)$ . Ainsi, puisque pour tout  $x$  de  $\mathbb{S}^1$ , tous les arcs  $\overrightarrow{f^i(x)f^{i-m_n}(x)}$  sont disjoints et dans  $\mathbb{S}^1$  et que la longueur de  $\mathbb{S}^1$  est 1, nous avons établi :

Il existe une infinité d'entiers  $m_n$ , telle que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{S}^1$ , nous avons :

$$\sum_{i=0}^{m_n-1} \ell(\overrightarrow{f^i(x)f^{i-m_n}(x)}) \leq 1 \quad . \quad (\text{B.27})$$

Associons à  $x$  la famille de points  $\tilde{x}_i$  et  $\tilde{x}_{i-m_n}$  de  $\mathbb{R}$ , pour  $i$  dans  $\{0, \dots, m_n - 1\}$  tels que nous avons :

$$\tilde{x}_j = f^j(x) \pmod{1} \quad \forall j \in \{-m_n, \dots, m_n - 1\}$$

où l'entier  $\tilde{x}_j - f^j(x)$  est choisi pour avoir :

$$|\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-m_n}| = \ell(\overbrace{f^i(x) f^{i-m_n}(x)}) \quad \forall i \in \{0, \dots, m_n - 1\}. \quad (\text{B.28})$$

Alors, pour le relèvement  $\tilde{f}$  de  $f$ , nous avons :

$$\tilde{x}_j = \tilde{f}^j(\tilde{x}) \pmod{1} \quad \forall j \in \{-m_n, \dots, m_n - 1\}$$

et, du fait de la périodicité de  $\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}$ ,

$$\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{f}^j(x)) = \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}_j) \quad \forall j \in \{-m_n, \dots, m_n - 1\}.$$

Avec (B.23), nous en déduisons :

$$\log\left(\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}}(\tilde{f}^j(x))\right) = F(\tilde{f}^j(x)) = F(\tilde{x}_j) \quad \forall j \in \{-m_n, \dots, m_n - 1\}.$$

Alors, avec (B.21), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{d\tilde{f}^{m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{x})\right) &= \sum_{j=0}^{m_n-1} F(\tilde{f}^j(\tilde{x})) = \sum_{j=0}^{m_n-1} F(\tilde{x}_j), \\ \log\left(\frac{d\tilde{f}^{m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{f}^{-m_n}(\tilde{x}))\right) &= \sum_{j=0}^{m_n-1} F(\tilde{f}^{j-m_n}(\tilde{x})) = \sum_{j=0}^{m_n-1} F(\tilde{x}_{j-m_n}). \end{aligned}$$

Puisque nous avons :

$$\frac{d\tilde{f}^{m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{f}^{-m_n}(\tilde{x})) \frac{d\tilde{f}^{-m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) = 1,$$

avec (B.24), nous avons établi :

$$\begin{aligned} \left| \log\left(\frac{d\tilde{f}^{m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) \frac{d\tilde{f}^{-m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{x})\right) \right| &= \left| \log\left(\frac{d\tilde{f}^{m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) / \frac{d\tilde{f}^{m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{f}^{-m_n}(\tilde{x}))\right) \right|, \\ &= \left| \sum_{j=0}^{m_n-1} F(\tilde{x}_j) - F(\tilde{x}_{j-m_n}) \right|, \\ &\leq 2M \sum_{j=0}^{m_n-1} |\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-m_n}|. \end{aligned}$$

Avec (B.27), ceci donne

$$\left| \log\left(\frac{d\tilde{f}^{m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) \frac{d\tilde{f}^{-m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{x})\right) \right| \leq 2M$$



ou encore :

$$2 \exp(-M) \leq 2 \sqrt{\frac{d\tilde{f}^{m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) \frac{d\tilde{f}^{-m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{x})} \leq \frac{d\tilde{f}^{m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) + \frac{d\tilde{f}^{-m_n}}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) .$$

En combinant ceci avec (B.22), nous avons établi :

Il existe une infinité d'entiers  $m_n$ , telle que, pour tout arc  $U$  dans  $\mathbb{S}^1$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \ell(f^{m_n}(U)) + \ell(f^{-m_n}(U)) &= \int_U \frac{d\tilde{f}^{m_n}}{d\tilde{x}}(t) dt + \int_U \frac{d\tilde{f}^{-m_n}}{d\tilde{x}}(t) dt , \\ &\geq 2 \exp(-M) \ell(U) . \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Maintenant, soit  $\Omega(x)$ , l'ensemble  $\Omega$ -limite d'un point  $x$  quelconque, mais fixé, de  $\mathbb{S}^1$ . Supposons que  $\Omega(x)$  n'est pas  $\mathbb{S}^1$  tout entier. Alors  $\Omega(x)$  étant fermé,  $\mathbb{S}^1 \setminus \Omega(x)$  est ouvert. Aussi, puisque  $f$  est une bijection et que nous avons :

$$f(\Omega(x)) = \Omega(x) , \quad (\text{B.30})$$

nous avons aussi :

$$f(\mathbb{S}^1 \setminus \Omega(x)) = \mathbb{S}^1 \setminus \Omega(x) . \quad (\text{B.31})$$

Soit alors  $x$  un point de  $\mathbb{S}^1 \setminus \Omega(x)$  et  $U$  le plus grand ouvert connexe de  $\mathbb{S}^1 \setminus \Omega(x)$  contenant  $x$ , i.e. sa composante connexe dans  $\mathbb{S}^1 \setminus \Omega(x)$ . Par construction et puisque  $\Omega(x)$  est fermé,  $U$  est un arc de cercle dans  $\mathbb{S}^1 \setminus \Omega(x)$  dont les extrémités  $\alpha$  et  $\beta$  sont dans  $\Omega(x)$  et de longueur strictement inférieure à 1. Puisque  $f^i$  est un homéomorphisme et  $\mathbb{S}^1 \setminus \Omega(x)$  est invariant par  $f$ , d'après (B.31),  $f^i(U)$  est un ouvert connexe et donc aussi un arc de cercle dans  $\mathbb{S}^1 \setminus \Omega(x)$  dont les extrémités  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont les images par  $f^i$  de, respectivement,  $\alpha$  et  $\beta$ . Elles sont dans  $\Omega(x)$  d'après (B.30).

Ensuite, pour tout  $i > j$ ,

- soit les arcs  $f^i(U)$  et  $f^j(U)$  ont une intersection vide,
- soit  $f^i(U) = f^j(U)$ .

En effet, sinon une des extrémités de l'un, et donc dans  $\Omega(x)$ , serait intérieure à l'autre, ce qui est impossible puisque nous aurions sinon :

$$f^i(U) \cap \Omega(x) \neq \emptyset .$$

Dans le cas où  $f^i(U) = f^j(U)$ , puisque nous avons :

$$f^j(U) = f^i(U) = f^{i-j}(f^j(U)) ,$$

et que  $f^{i-j}$  est un homéomorphisme, nous avons :

$$\overline{f^j(U)} = f^{i-j}(\overline{f^j(U)}) .$$

Comme  $\overline{f^j(U)}$  est homéomorphe à un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  et  $f^{i-j}$  est continue, il doit y avoir un point fixe, i.e. un point  $x_j$  dans  $\overline{f^j(U)}$  tel que :

$$f^{i-j}(x_j) = x_j .$$

De nouveau ceci contredit l'hypothèse d'irrationalité de  $\rho(f)$ . Nous concluons que, pour tout  $i > j$ , nous avons :

$$f^i(U) \cap f^j(U) = \emptyset .$$

Mais comme la réunion de tous les  $f^i(U)$  est contenue dans  $\mathbb{S}^1$ , nous avons :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \ell(f^i(U)) \leq 1 . \quad (\text{B.32})$$

Nous pouvons reprendre tous les arguments précédents avec  $f^{-1}$  en lieu et place de  $f$ . Ainsi par exemple, nous ne pouvons avoir de point  $x_{-j}$  satisfaisant :

$$f^{-(i-j)}(x_{-j}) = x_{-j}$$

puisqu'il satisferait alors :

$$x_{-j} = f^{(i-j)}(x_{-j})$$

ce qu'interdit l'irrationalité de  $\rho(f)$ . Nous avons donc aussi :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \ell(f^{-i}(U)) \leq 1 .$$

Nous avons donc établi que, si il existe un point  $x$  de  $\mathbb{S}^1$  tel que le complémentaire de la fermeture  $\Omega(x)$  de son orbite contient un arc  $U$ , alors nous avons :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \ell(f^i(U)) + \ell(f^{-i}(U)) \leq 2 .$$

Ceci est en contradiction avec l'inégalité (B.29) satisfaite par une infinité d'entiers  $m_n$ .  $\Omega(x)$  doit donc être  $\mathbb{S}^1$  tout entier.

## B.4 Nombre de rotation fonction de l'homéomorphisme

Nous venons de voir que selon que le nombre de rotation est rationnel ou irrationnel, le comportement des solutions de (B.17) est très différent. Nous pouvons donc nous attendre à observer des phénomènes étranges si le nombre de rotation dépend continûment de  $f$ .

**Proposition 12** *Soient  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  deux relèvements. Nous avons les propriétés suivantes :*

1.  $\tilde{\rho}$  est une fonction continue de  $\tilde{f}$ . Précisément, étant donné  $\tilde{f}$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous pouvons trouver  $\delta > 0$  tel que, si nous avons :

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \tilde{f}(x) - \tilde{g}(x) \right| < \delta ,$$

alors nous avons aussi :

$$\left| \tilde{\rho}(\tilde{f}) - \tilde{\rho}(\tilde{g}) \right| < \varepsilon .$$

2.  $\tilde{\rho}$  est une fonction non décroissante de  $\tilde{f}$ . Précisément, si nous avons :

$$\tilde{f}(x) < \tilde{g}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} , \quad (\text{B.33})$$

alors nous avons aussi :

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}) \leq \tilde{\rho}(\tilde{g}) .$$

Une conséquence directe de cette Proposition est :

**Proposition 13** *Le nombre de rotation est une fonction continue et non décroissante de  $f$ . Précisément,*

1. pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous pouvons trouver  $\delta > 0$  tel que, si nous avons :

$$\sup_{x \in \mathbb{S}^1} \ell(\overline{f(x)g(x)}) < \delta ,$$

alors nous avons aussi :

$$|\rho(f) - \rho(g)| < \varepsilon ;$$

2. il existe  $\varepsilon < 1$  tel que, si nous avons :

$$\sup_{x \in \mathbb{S}^1} \ell(\overline{f(x)g(x)}) \leq \varepsilon$$

et, pour tout  $x$  de  $\mathbb{S}^1$ , l'arc le plus court va de  $f(x)$  à  $g(x)$  selon l'orientation du cercle, alors nous avons aussi :

$$\rho(f) \leq \rho(g) .$$

À noter que la restriction avec  $\varepsilon$  dans le point 2 n'a pour objet que de garantir que  $\rho(g)$  est dans  $[\rho(f), 1)$ .

*Preuve de la Proposition 12 :*

À propos de la continuité, observons tout d'abord que, la fonction  $\tilde{f}$  étant continue et telle que  $\tilde{f} - \text{Id}$  est une fonction périodique,  $\tilde{f}$  est uniformément continue. Il existe donc une fonction continue  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , nulle en 0 et satisfaisant :

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq \alpha(|x - y|) .$$

Aussi, si  $\tilde{g}$  est un relèvement,  $\tilde{g} - \text{Id}$  est aussi périodique et nous avons :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)| .$$

Alors, nous obtenons, en utilisant (B.10),

$$\begin{aligned} |\tilde{\rho}(\tilde{g}) - \tilde{\rho}(\tilde{f})| &\leq \left| \tilde{\rho}(\tilde{g}) - \frac{\tilde{g}^k(0)}{k} \right| + \left| \frac{\tilde{g}^k(0) - \tilde{f}^k(0)}{k} \right| + \left| \frac{\tilde{f}^k(0)}{k} - \tilde{\rho}(\tilde{f}) \right| , \\ &\leq \frac{1}{k} + \left| \frac{\tilde{g}^k(0) - \tilde{f}^k(0)}{k} \right| + \frac{1}{k} . \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Aussi, pour tout  $\delta > 0$  et tout relèvement  $\tilde{g}$  satisfaisant :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)| < \delta , \quad (\text{B.35})$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \tilde{f}^k(0) - \tilde{g}^k(0) \right| &\leq \left| \tilde{f}(\tilde{f}^{k-1}(0)) - \tilde{f}(\tilde{g}^{k-1}(0)) \right| + \left| \tilde{f}(\tilde{g}^{k-1}(0)) - \tilde{g}(\tilde{g}^{k-1}(0)) \right|, \\ &\leq \alpha \left( \left| \tilde{f}^{k-1}(0) - \tilde{g}^{k-1}(0) \right| \right) + \delta, \\ &\vdots \\ &\leq \underbrace{\alpha(\alpha(\dots(\alpha(\delta) + \delta)\dots) + \delta)}_{k \text{ fois}} + \delta. \end{aligned}$$

La continuité de  $\rho$  est alors établie avec (B.34), en prenant pour  $k$  un entier supérieur à  $\frac{4}{\varepsilon}$ , et en choisissant  $\delta$  satisfaisant :

$$\alpha(\alpha(\dots(\alpha(\delta) + \delta)\dots) + \delta) + \delta \leq \frac{k\varepsilon}{2},$$

ce qui est toujours possible du fait de la continuité de  $\alpha$  et de  $\alpha(0) = 0$ .

Maintenant pour démontrer la non décroissance de  $\rho$ , nous déduisons successivement de (B.33) :

$$\begin{aligned} \tilde{f}^2(0) &< \tilde{f}(\tilde{g}(0)) < \tilde{g}^2(0), \\ &\vdots \\ \tilde{f}^k(0) &< \tilde{g}^k(0). \end{aligned}$$

La non décroissance de  $\rho$  en découle par passage à la limite.

Cette croissance et continuité de  $\rho$  en fonction de  $f$  et la différence de comportement des solutions de (B.17) selon que le nombre de rotation est rationnel ou irrationnel, nous conduisent à étudier la façon dont  $\rho$  varie pour des familles d'homéomorphismes dépendant de façon croissante d'un paramètre. Soit  $\Lambda$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et soit une famille de relèvements  $\lambda \in \Lambda \mapsto \tilde{f}_\lambda$  continue au sens du point 1 de la Proposition 12 et strictement croissante, i.e. :

$$\tilde{f}_{\lambda_1}(x) < \tilde{f}_{\lambda_2}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda_1 < \lambda_2 \in \Lambda. \quad (\text{B.36})$$

Pour simplifier les notations, posons :

$$\tilde{\rho}(\lambda) = \tilde{\rho}(\tilde{f}_\lambda).$$

Ceci définit une fonction sur l'intervalle  $\Lambda$ . Cette fonction est continue et non décroissante. Dans ce cas, pour tout  $\alpha$  de  $\tilde{\rho}(\Lambda)$ ,  $\tilde{\rho}^{-1}(\alpha)$  est un intervalle fermé; la fermeture vient de la continuité et la connexité de la monotonie.

Nous allons montrer que, de façon générique, cet intervalle est d'intérieur non vide si  $\alpha$  est rationnel et réduit à un point si  $\alpha$  est irrationnel.

**Proposition 14** *Supposons la fonction  $\lambda \in \Lambda \mapsto \tilde{f}_\lambda$  continue et strictement croissante.*

1. Pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$  de  $\tilde{\rho}(\Lambda)$ , l'ensemble  $\tilde{\rho}^{-1}\left(\frac{p}{q}\right)$  est un intervalle fermé d'intérieur non vide si il existe  $\lambda$  dans  $\tilde{\rho}^{-1}\left(\frac{p}{q}\right)$  pour lequel nous pouvons trouver  $x$  dans  $\mathbb{R}$  satisfaisant :

$$\tilde{f}_\lambda^q(x) \neq x + p \quad (\text{B.37})$$

i.e.  $\tilde{f}_\lambda^q$  n'est pas une simple translation.

2. Si  $\alpha$  est un nombre irrationnel de  $\tilde{\rho}(\Lambda)$ , l'ensemble  $\tilde{\rho}^{-1}(\alpha)$  est un singleton.

Une conséquence directe de cette Proposition est :

**Proposition 15** Soient  $\Lambda$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $\lambda \in \Lambda \mapsto f_\lambda$  est une famille continue et strictement croissante (au sens de la Proposition 13) d'homéomorphismes du cercle préservant l'orientation. Notons  $\rho(\lambda) = \rho(f_\lambda)$ .

1. Pour tout rationnel  $\frac{p}{q}$  de  $\rho(\Lambda)$ , l'ensemble  $\rho^{-1}\left(\frac{p}{q}\right)$  est un intervalle fermé d'intérieur non vide si il existe  $\lambda$  dans  $\rho^{-1}\left(\frac{p}{q}\right)$  pour lequel  $f_\lambda^q \neq \text{Id}$ .
2. Si  $\alpha$  est un nombre irrationnel de  $\rho(\Lambda)$ , l'ensemble  $\rho^{-1}(\alpha)$  est un singleton.

Preuve du point 1 de la Proposition 14 :

Nous avons indiqué ci-dessus que  $\tilde{\rho}^{-1}\left(\frac{p}{q}\right)$  est nécessairement un intervalle fermé  $[\lambda_-, \lambda_+]$  contenu dans l'intervalle ouvert  $\Lambda$ . Montrons que nous avons :

$$\tilde{f}_{\lambda_+}^q(x) \geq x + p \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si ce n'est pas le cas, il existe  $x_1$  dans  $\mathbb{R}$  satisfaisant :

$$\tilde{f}_{\lambda_+}^q(x_1) < x_1 + p.$$

Mais, puisque  $\tilde{\rho}(\lambda_+)$  est rationnel, d'après le point 3 de la Proposition 9, il existe  $x_+$  satisfaisant :

$$\tilde{f}_{\lambda_+}^q(x_+) = x_+ + p.$$

Avec (B.36), ceci implique :

$$\tilde{f}_{\lambda_+}^q(x_+) > x_+ + p \quad \forall \lambda \in \Lambda : \lambda > \lambda_+.$$

La fonction  $\lambda \mapsto \tilde{f}_\lambda^q$  étant continue, il existe un réel strictement positif  $\varepsilon$  tel que nous avons :

$$\tilde{f}_{\lambda_+}^q(x_1) < x_1 + p \quad \& \quad \tilde{f}_\lambda^q(x_+) > x_+ + p \quad \forall \lambda \in (\lambda_+, \lambda_+ + \varepsilon).$$

Donc, par continuité de  $x \mapsto \tilde{f}_\lambda^q(x)$ , pour tout  $\lambda$  dans  $(\lambda_+, \lambda_+ + \varepsilon)$ , il existe  $x_\lambda$  satisfaisant :

$$\tilde{f}_\lambda^q(x) = x + p$$

et donc  $\tilde{\rho}(\lambda) = \frac{p}{q}$ , d'après le point 3 de la Proposition 9. Mais ceci contredit le fait que  $\lambda_+$  est la borne supérieure des  $\lambda$  dont le nombre de rotation est  $\frac{p}{q}$ .

Le même raisonnement permet d'établir que nous avons :

$$\tilde{f}_{\lambda_-}^q(x) \leq x + p \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous en concluons que si  $\lambda_- = \lambda_+$ , i.e.  $\tilde{\rho}^{-1}\left(\frac{p}{q}\right)$  est un singleton, nous avons :

$$\tilde{f}_{\lambda_-}^q(x) = \tilde{f}_{\lambda_+}^q(x) = x + p \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

en contradiction de (B.37).

Cette preuve nous montre aussi que, pour tout  $\lambda$  dans l'ouvert  $(\lambda_-, \lambda_+)$ , le graphe de  $\tilde{f}_{\lambda_-}^q$  traverse celui de  $\text{id} + p$ , i.e. il existe trois points :

$$x_0 < x_1 \leq x_2$$

satisfaisant :

$$\tilde{f}_{\lambda_+}^q(x_1) = x_1 + p \quad , \quad \left[ \tilde{f}_{\lambda_+}^q(x_0) - x_0 - p \right] \left[ \tilde{f}_{\lambda_+}^q(x_2) - x_2 - p \right] < 0 .$$

Mais alors du fait de la périodicité de la fonction  $x \mapsto \tilde{f}_{\lambda}^q(x) - x$  nous avons un autre triplet :

$$x_3 < x_4 \leq x_5$$

satisfaisant le même type de relations mais aussi :

$$x_2 \leq x_3 \quad , \quad \left[ \tilde{f}_{\lambda_+}^q(x_2) - x_2 - p \right] \left[ \tilde{f}_{\lambda_+}^q(x_3) - x_3 - p \right] > 0 .$$

En d'autres termes, si  $\tilde{f}_{\lambda}$  est différentiable, il existe des points  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 < x_3 < x_4 , \\ \tilde{f}_{\lambda_+}^q(x_1) &= x_1 + p \quad , \quad \tilde{f}_{\lambda_+}^q(x) > 1 \quad \forall x \in (x_1, x_2] , \\ \tilde{f}_{\lambda_+}^q(x_4) &= x_4 + p \quad , \quad \tilde{f}_{\lambda_+}^q(x) < 1 \quad \forall x \in [x_3, x_4) . \end{aligned}$$

Ainsi, sous l'hypothèse (B.37), pour tout  $\lambda$  dans  $(\lambda_-, \lambda_+)$ , l'homéomorphisme  $f_{\lambda}$  associé au relèvement  $\tilde{f}_{\lambda}$  est tel que le système (B.17) admet une orbite périodique strictement attractive et une orbite périodique strictement répulsive, au moins d'un côté.

*Preuve du point 2 :*

Soit  $\lambda_{\alpha}$  un point quelconque de  $\tilde{\rho}^{-1}(\alpha)$  et soit  $\lambda$  dans  $\Lambda$ , strictement plus grand que  $\lambda_{\alpha}$ . Nous avons :

$$\tilde{f}_{\lambda}(x) > \tilde{f}_{\lambda_{\alpha}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Comme  $\tilde{f}_{\lambda} - \text{Id}$  et  $\tilde{f}_{\lambda_{\alpha}} - \text{Id}$  sont périodiques de période 1, nous avons :

$$\inf_x \tilde{f}_{\lambda}(x) - \tilde{f}_{\lambda_{\alpha}}(x) = \varepsilon > 0 .$$

Avec la croissance de  $\tilde{f}_{\lambda}$  et de  $\tilde{f}_{\lambda_{\alpha}}$ , nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\lambda}(x) &\geq \tilde{f}_{\lambda_{\alpha}}(x) + \varepsilon , \\ \tilde{f}_{\lambda}^2(x) &\geq \tilde{f}_{\lambda}(\tilde{f}_{\lambda_{\alpha}}(x) + \varepsilon) \geq \tilde{f}_{\lambda_{\alpha}}(\tilde{f}_{\lambda_{\alpha}}(x) + \varepsilon) + \varepsilon \geq \tilde{f}_{\lambda_{\alpha}}^2(x) + \varepsilon , \\ &\vdots \\ \tilde{f}_{\lambda}^q(x) &\geq \tilde{f}_{\lambda_{\alpha}}^q(x) + \varepsilon \end{aligned} \tag{B.38}$$

D'après la théorie de l'approximation des nombres réels par des fractions continues (voir [?, §X.10.9]), il existe des entiers relatifs  $p$  et  $q \geq \frac{1}{\varepsilon}$  satisfaisant :

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q^2} \leq \alpha < \frac{p}{q} . \tag{B.39}$$

D'après le point 3 de la Proposition 9, il existe  $x_{p/q}$  dans  $\mathbb{R}$  satisfaisant :

$$\left| \tilde{f}_{\lambda_\alpha}^q(x_{p/q}) - x_{p/q} - p \right| \leq \frac{1}{q} \leq \varepsilon .$$

$\alpha$  étant irrationnel, nous ne pouvons pas avoir :

$$\tilde{f}_{\lambda_\alpha}^q(x_{p/q}) = x_{p/q} + p .$$

Nous avons donc soit la propriété :

$$x_{p/q} + p - \varepsilon \leq \tilde{f}_{\lambda_\alpha}^q(x_{p/q}) < x_{p/q} + p . \quad (\text{B.40})$$

soit les deux propriétés :

$$\begin{aligned} \nexists x \in \mathbb{R} : \quad x + p - \varepsilon \leq \tilde{f}_{\lambda_\alpha}^q(x) < x + p \\ x_{p/q} + p < \tilde{f}_{\lambda_\alpha}^q(x_{p/q}) \leq x_{p/q} + p + \varepsilon . \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Ce dernier cas est impossible. En effet, sinon la continuité de  $x \mapsto \tilde{f}_{\lambda_\alpha}^q(x)$  impliquerait que nous ayons :

$$x + p < \tilde{f}_{\lambda_\alpha}^q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Comme dans la preuve du point 3 de la Proposition 9, ceci donnerait :

$$\frac{p}{q} \leq \alpha = \tilde{\rho}(\lambda_\alpha)$$

en contradiction de (B.39). Dans le cas (B.40), avec (B.38), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\lambda_\alpha}^q(x_{p/q}) < x_{p/q} + p , \\ x_{p/q} + p \leq \tilde{f}_{\lambda_\alpha}^q(x_{p/q}) + \varepsilon \leq \tilde{f}_{\lambda}^q(x_{p/q}) - \varepsilon < \tilde{f}_{\lambda}^q(x_{p/q}) . \end{aligned}$$

Avec la continuité de  $\lambda \mapsto \tilde{f}_\lambda$ , nous en déduisons qu'il existe  $\lambda_{p/q}$  dans  $(\lambda_\alpha, \lambda)$  satisfaisant :

$$x_{p/q} + p = \tilde{f}_{\lambda_{p/q}}^q(x_{p/q}) .$$

Ceci implique :

$$\alpha < \frac{p}{q} \leq \tilde{\rho}(\lambda) .$$

Donc le nombre de rotation associé à  $\lambda$  strictement supérieur à  $\lambda_\alpha$  est strictement supérieur à  $\alpha$ . On démontre de la même manière que le nombre de rotation associé à  $\lambda$  strictement inférieur à  $\lambda_\alpha$  est strictement inférieur à  $\alpha$ .

## B.5 Conjugaison

**Proposition 16** Soient  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  et  $\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  deux homéomorphismes préservant l'orientation. L'application  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  définie par

$$g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$$

est un homéomorphisme préservant l'orientation satisfaisant :

$$\rho(f) = \rho(g) .$$

*Preuve :*

Soient  $\tilde{f}$  et  $\tilde{\phi}$  des relèvements de  $f$  et  $\phi$ . Par définition, nous avons :

$$\tilde{f}(x) = f(x - E(x)) \pmod{1} , \quad \tilde{\phi}(x) = \phi(x - E(x)) \pmod{1}$$

et aussi, d'après le Lemme 3,

$$\tilde{\phi}^{-1}(x) = \phi^{-1}(x - E(x)) \pmod{1} .$$

Alors, avec (B.8) et (B.2) et en voyant  $f$  et  $\phi$  comme prenant leurs valeurs dans  $[0, 1[$ , i.e. vérifiant

$$E(f(x)) = E(\phi(x)) = 0 ,$$

nous obtenons, pour tout  $x$ , des entiers  $p_1, p_2$  et  $p_3$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{\phi}(x) &= \tilde{\phi}^{-1} \left( \tilde{f}(\phi(x - E(x)) + p_1) \right) , \\ &= \tilde{\phi}^{-1} \left( \tilde{f}(\phi(x - E(x))) + p_1 \right) , \\ &= \tilde{\phi}^{-1} (f(\phi(x - E(x))) + p_2 + p_1) , \\ &= \tilde{\phi}^{-1} (f(\phi(x - E(x)))) + p_2 + p_1 , \\ &= \phi^{-1} (f(\phi(x - E(x)))) + p_3 + p_2 + p_1 , \\ &= \phi^{-1} \circ f \circ \phi(x - E(x)) \pmod{1} . \end{aligned}$$

Ceci établit que  $\tilde{g}$  défini par

$$\tilde{g} = \tilde{\phi}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{\phi}$$

est un relèvement de  $g$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \tilde{g}^n(0) &= \left( \tilde{\phi}^{-1} \circ \tilde{f} \circ \tilde{\phi} \right)^n(0) , \\ &= \tilde{\phi}^{-1} \circ \tilde{f}^n(\tilde{\phi}(0)) , \\ &= \tilde{\phi}^{-1} \left( \tilde{f}^n(\tilde{\phi}(0)) - E \left( \tilde{f}^n(\tilde{\phi}(0)) \right) \right) + E \left( \tilde{f}^n(\tilde{\phi}(0)) \right) . \end{aligned}$$

Donc, en posant :

$$\tilde{\Phi} = \sup_{x \in [0, 1[} |\tilde{\phi}^{-1}(x)| ,$$



nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\tilde{g}^n(0)}{n} - \frac{\tilde{f}^n(\tilde{\phi}(0)) - \tilde{\phi}(0)}{n} \right| &\leq \frac{\tilde{\Phi}}{n} + \frac{|E(\tilde{f}^n(\tilde{\phi}(0))) - \tilde{f}^n(\tilde{\phi}(0))|}{n} + \frac{\tilde{\phi}(0)}{n}, \\ &\leq \frac{\tilde{\Phi} + 1 + \tilde{\phi}(0)}{n}. \end{aligned}$$

Avec la Proposition 9, nous en déduisons le résultat énoncé en passant à la limite pour  $n$  tendant vers l'infini.

**Définition 6**  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  et  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , deux homéomorphismes préservant l'orientation, sont dits conjugués s'il existe  $\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  un homéomorphisme préservant l'orientation tel que

$$g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi .$$

Cette relation de conjugaison est une relation d'équivalence. Nous venons d'établir que le nombre de rotation est un invariant de chaque classe d'équivalence. Inversement, nous pouvons nous poser la question: est-ce que deux homéomorphismes préservant l'orientation qui ont le même nombre de rotation sont conjugués ? Nous avons vu dans le cours que ce n'est pas le cas sans hypothèse supplémentaire si le nombre de rotation est rationnel. Par contre, dans le cas irrationnel, le Théorème 1.chap 1 de Denjoy répond par l'affirmative avec cependant la restriction que, même si les deux homéomorphismes sont très réguliers, l'homéomorphisme  $\phi$  qui les conjuguent n'est en général que continue. La régularité de ce dernier est lié à la façon dont le nombre de rotation irrationnel est approximé par les rationnels (voir le paragraphe 1.5.chap 1).

Donnons ici une preuve du Théorème de Denjoy :

*Preuve du Théorème 1.chap 1 de Denjoy :*

D'après le Lemme 3, il suffit de trouver une fonction  $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est continue, surjective, strictement croissante et satisfait :

$$\tilde{\phi}(x+1) = \tilde{\phi}(x) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} , \tag{B.42}$$

$$\tilde{\phi}(\tilde{f}(x)) = \tilde{\phi}(x) + \tilde{\rho}(\tilde{f}) \quad \forall x \in \mathbb{R} , \tag{B.43}$$

où  $\tilde{f}$  est un relèvement de  $f$  et  $\tilde{\rho}(\tilde{f})$  est donné par la Proposition 9. D'après la définition 4 et l'hypothèse du Théorème, nous avons :

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}) = \alpha \pmod{1}$$

où  $\alpha$  est un irrationnel dans  $[0, 1[$ .

Avant de construire  $\tilde{\phi}$ , montrons que nous pouvons trouver une bijection monotone  $\psi$  entre les ensembles :

$$A = \{n\tilde{\rho}(\tilde{f}) + m : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\} , \quad B = \{\tilde{f}^n(x) + m : (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$$

où  $x$  est arbitrairement fixé dans  $\mathbb{R}$ . Pour cela, posons :

$$\psi(n\tilde{\rho}(\tilde{f}) + m) = \tilde{f}^n(x) + m .$$

Ceci définit une fonction de façon licite car si :

$$n_1 \tilde{\rho}(\tilde{f}) + m_1 = n_2 \tilde{\rho}(\tilde{f}) + m_2 ,$$

l'irrationalité de  $\tilde{\rho}(\tilde{f})$  implique l'égalité des  $n_i$  et des  $m_i$ . Cette fonction est trivialement surjective. Elle est aussi injective. En effet supposons que nous avons :

$$\tilde{f}^{n_1}(x) + m_1 = \tilde{f}^{n_2}(x) + m_2$$

ou encore :

$$\tilde{f}^{n_1}(x) = \tilde{f}^{n_2}(x + m_2 - m_1) .$$

Si  $n_1 > n_2$ , nous en déduisons :

$$\tilde{f}^{n_1 - n_2}(x) = x + (m_2 - m_1)$$

et donc, d'après la Proposition 9,

$$\tilde{\rho}(\tilde{f}) = \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2} .$$

Ceci contredit l'irrationalité de  $\tilde{\rho}(\tilde{f})$ . Nous avons donc l'égalité des  $n$  et par conséquent celles des  $m$ . L'injectivité de  $\psi$  est donc établie .

Observons maintenant que l'ordre des éléments de  $B$  ne dépend pas de  $x$  ou plus précisément, nous avons l'implication :

$$\tilde{f}^{n_1}(x) + m_1 < \tilde{f}^{n_2}(x) + m_2 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{f}^{n_1}(y) + m_1 < \tilde{f}^{n_2}(y) + m_2 \quad \forall y \in \mathbb{R} .$$

En effet, la fonction  $y \mapsto \tilde{f}^{n_1}(y) - \tilde{f}^{n_2}(y)$  est continue et nous avons établi ci-dessus qu'elle ne peut prendre des valeurs entières. L'implication est ainsi une conséquence de la continuité.

Pour montrer la monotonie de  $\psi$  il suffit donc d'établir l'implication :

$$\tilde{f}^{n_1}(0) + m_1 < \tilde{f}^{n_2}(0) + m_2 \quad \Longrightarrow \quad n_1 \tilde{\rho}(\tilde{f}) + m_1 < n_2 \tilde{\rho}(\tilde{f}) + m_2 .$$

ou encore, en supposant  $n_1 > n_2$ ,

$$\tilde{f}^{n_1 - n_2}(0) < m_2 - m_1 \quad \Longrightarrow \quad (n_1 - n_2) \tilde{\rho}(\tilde{f}) < m_2 - m_1 .$$

Pour cela, avec l'aide de (B.9) et de la monotonie de  $\tilde{f}$ , nous obtenons que l'inégalité de gauche implique récursivement :

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{2(n_1 - n_2)}(0) &< \tilde{f}^{n_1 - n_2}(m_2 - m_1) = \tilde{f}^{n_1 - n_2}(0) + m_2 - m_1 < 2(m_2 - m_1) , \\ &\vdots \\ \tilde{f}^{k(n_1 - n_2)}(0) &< k(m_2 - m_1) \end{aligned}$$

et donc :

$$(n_1 - n_2) \frac{\tilde{f}^{k(n_1 - n_2)}(0)}{k(n_1 - n_2)} < m_2 - m_1 .$$

En passant à la limite pour  $k$  tendant vers l'infini, nous obtenons :

$$(n_1 - n_2) \tilde{\rho}(\tilde{f}) \leq m_2 - m_1 .$$

En fait,  $\tilde{\rho}(\tilde{f})$  étant irrationnel, l'inégalité est stricte, i.e.

$$(n_1 - n_2) \tilde{\rho}(\tilde{f}) < m_2 - m_1 .$$

Maintenant, définissons la fonction  $\tilde{\phi}$ . Commençons par la définir sur l'ensemble  $B$  comme la fonction inverse de  $\psi$ , i.e.

$$\tilde{\phi}(\tilde{f}^n(x) + m) = n\tilde{\rho}(\tilde{f}) + m . \quad (\text{B.44})$$

Avec les ensembles  $A$  et  $B$  munis de la topologie induite de  $\mathbb{R}$  et sachant, d'après la Proposition 11, que  $A$  est partout dense dans  $\mathbb{R}$ , la stricte monotonie de  $\tilde{\phi}$  implique sa continuité. L'ensemble  $B$  étant lui aussi partout dense dans  $\mathbb{R}$ , nous pouvons étendre par continuité la définition de  $\tilde{\phi}$  à tout  $\mathbb{R}$ . Nous pouvons vérifier que  $\tilde{\phi}$  ainsi définie est bien un homéomorphisme croissant sur  $\mathbb{R}$ .

Vérifions que (B.42) est satisfait. De (B.44), nous déduisons :

$$n\tilde{\rho}(\tilde{f}) + m + 1 = \tilde{\phi}(\tilde{f}^n(x) + m + 1) .$$

Donc si :

$$y = \tilde{f}^n(x) + m$$

alors nous avons

$$\tilde{\phi}(y + 1) = \tilde{\phi}(y) + 1 .$$

Par continuité, ceci s'étend à tout  $\mathbb{R}$ . Nous avons donc bien (B.42). De façon identique, avec (B.9), nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\tilde{f}(\tilde{f}^n(x) + m)) &= \tilde{\phi}(\tilde{f}^{n+1}(x) + m) = (n+1)\tilde{\rho}(\tilde{f}) + m = n\tilde{\rho}(\tilde{f}) + m + \tilde{\rho}(\tilde{f}) , \\ &= \tilde{\phi}(\tilde{f}^n(x) + m) + \tilde{\rho}(\tilde{f}) \end{aligned}$$

ou encore, en posant à nouveau :

$$y = \tilde{f}^n(x) + m ,$$

nous avons

$$\tilde{\phi}(\tilde{f}(y)) = \tilde{\phi}(y) + \tilde{\rho}(\tilde{f}) .$$

De nouveau la continuité implique (B.43).