

Notes de cours

Application de Poincaré, Solutions périodiques et Moyennisation

Laurent Praly

17 novembre 2006

Résumé

L'usage que nous pouvons faire de l'application de Poincaré est très vaste. Son intérêt tient à sa généralité et à son caractère intuitif et géométrique liés à la réduction de certains problèmes concernant les solutions d'un système à temps continu en problèmes équivalents mais pour des solutions d'un système à temps discret évoluant dans un espace de dimension plus petite. Ici nous nous contentons d'une brève présentation en la particulierisant pour en faire un outil d'étude de l'existence et de la stabilité de solutions périodiques.

Les paragraphes 2 et 3 sont inspirés de [Hartman] et le paragraphe 5 de [Wiggins].

1 Introduction

Considérons deux oscillateurs faiblement couplés. Pour décrire l'état de leur dynamique, nous utilisons l'abscisse curviligne sur leur orbite. Quitte à prendre les bonnes échelles de temps et d'espace cette abscisse notée α peut être prise dans $[0, 1]$. La dynamique de chaque oscillateur, pris isolément, est alors simplement

$$\dot{\alpha}_1 = 1 \quad , \quad \dot{\alpha}_2 = 1 \quad ,$$

avec donc α_i défini modulo 1. L'espace d'état est donc le produit cartésien du cercle \mathbb{S}^1 avec lui même. C'est le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (voir la figure 1). Dans ce contexte, une dynamique prenant en compte les termes de couplage est :

$$\dot{\alpha}_1 = 1 + \varepsilon a_1(\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon) \quad , \quad \dot{\alpha}_2 = 1 + \varepsilon a_2(\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon) \quad , \quad (1)$$

où a_1 et a_2 sont des fonctions régulières, périodiques de période 1 en (α_1, α_2) et ε est un petit paramètre quantifiant l'effet du couplage.

Pour réduire la complexité de l'étude de ce système sur le tore \mathbb{T}^2 , nous appliquons une technique proposée par Poincaré. Pour cela, nous commençons par observer que, si ε est assez petit, nous avons $\dot{\alpha}_1 > 0$. Donc, les solutions reviennent régulièrement couper le cercle du

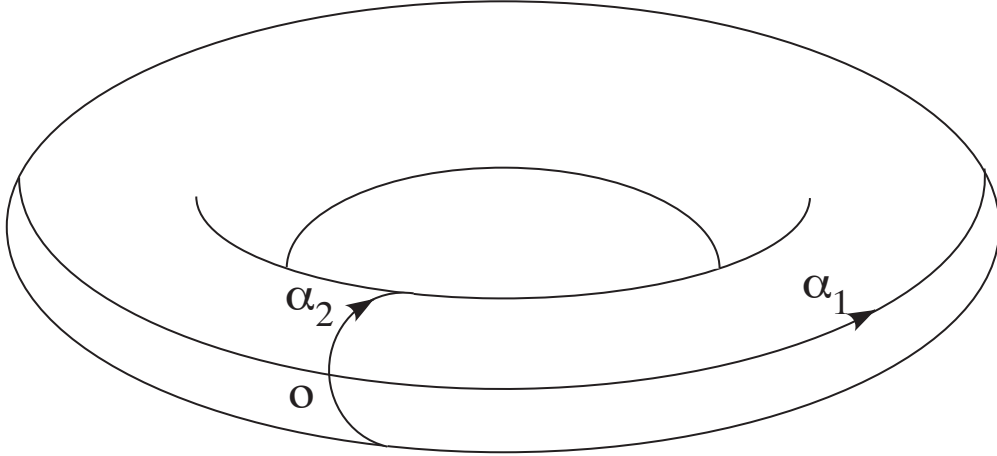


Figure 1: Espace d'état des deux oscillateurs.

tore donné par $\{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1 = 0 \pmod{1}\}$. Nous faisons alors de la stroboscopie, chaque flash de lumière étant déclenché par le passage à 0 de l'angle α_1 . Nous nous intéressons ainsi à la succession de points d'intersection d'une solution avec ce cercle. Leur composante α_1 est nulle. Par contre, si α_2 est l'état du second oscillateur pour un point d'intersection, nous pouvons lui associer l'état de ce même oscillateur, lorsque le premier revient pour la première fois à 0 après avoir fait un tour complet. En notant $P(\alpha_2, \varepsilon)$ cet état associé, nous avons défini une application P , dite application du premier retour ou de Poincaré. Alors au lieu d'étudier le système dont la dynamique en temps continu est donnée par (1) et qui évolue sur le tore, nous pouvons étudier le système dont la dynamique en temps discret est :

$$\alpha(n+1) = P(\alpha(n), \varepsilon) .$$

et qui évolue sur le cercle. Il est à noter que, toujours pour ε assez petit, nous avons aussi $\dot{\alpha}_2 > 0$. Ceci fait que $P(\alpha_2, \varepsilon)$ est une fonction croissante de α_2 , ou plus exactement qui respecte l'ordre cyclique sur le cercle, i.e. c'est un homéomorphisme du cercle. C'est un objet qui a reçu une très grande attention. Voir [Hartman, Herman] par exemple.

Dans ce qui suit nous concentrons notre attention sur cette application de Poincaré. Pour cela nous considérons le système sous forme générale :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2}$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continûment différentiable et nous dénotons par $X(t, x)$ la solution au temps t , issue de x au temps 0.

Soit Σ une variété différentielle de dimension $n - 1$ transverse à f . Pour fixer les idées dans ce qui suit, nous la définissons comme :

$$\Sigma = \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) = 0\} \tag{3}$$

où \mathcal{D}_g est un ouvert de \mathbb{R}^n et $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continûment différentiable satisfaisant :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x)f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_g ,$$

i.e. f est transverse à la variété. Nous supposons que Σ est telle qu'il existe x_0 dans \mathbb{R}^n et $T_0 > 0$ tel que, en posant :

$$x_1 = X(T, x_0) ,$$

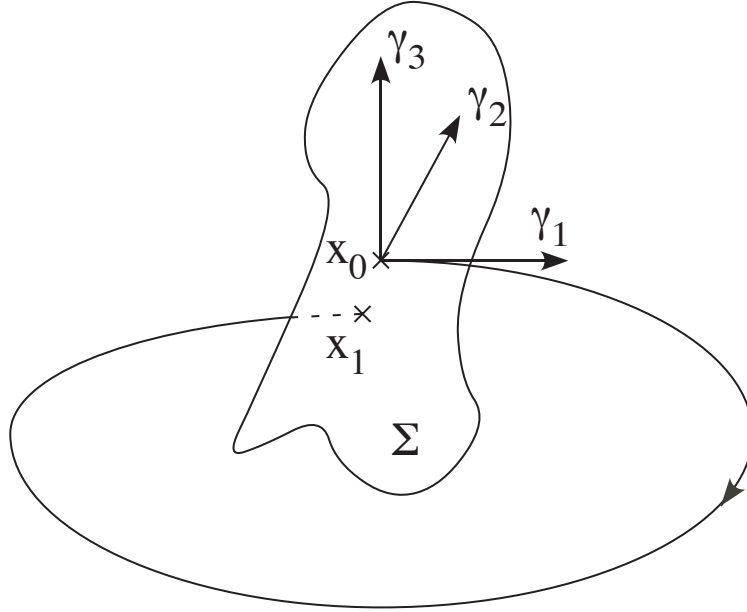


Figure 2: Application de Poincaré.

nous avons :

$$x_1 \in \mathcal{D}_g \quad , \quad g(x_0) = g(x_1) = 0$$

ou, en d'autres termes (voir la figure 2), il existe une solution issue de Σ qui revient¹ à Σ au temps T_0 . Du fait de la continuité en la condition initiale x des solutions $X(t, x)$, nous pouvons nous attendre à ce que, pour tout point x dans Σ et suffisamment proche de x_0 , il existe $T(x) > 0$ tel que $X(T(x), x)$ est aussi dans Σ et proche de x_1 . Nous avons ainsi une application $x \mapsto X(T(x), x)$ de Σ de dimension $n - 1$ dans Σ . Cette application est appelée application de Poincaré ou du premier retour. Du fait même de sa construction, cette application devrait hériter de nombreuses propriétés de celles du flot $x \mapsto X(t, x)$. C'est ce que nous vérifierons au paragraphe 3, après avoir rappelé ces propriétés au paragraphe 2.

2 Rappels sur les propriétés d'un flot

Puisque f est continûment différentiable, il existe une et une seule solution $X(t, x)$ de (2) issue de x au temps 0. Elle admet un intervalle maximal de définition $]\sigma_-(x), \sigma_+(x)[$ et, pour tout intervalle $[\tau_-, \tau_+]$ contenu dans $]\sigma_-(x), \sigma_+(x)[$, il existe un voisinage ouvert \mathcal{V}_x de x tel que la fonction $(t, y) \in]\tau_-, \tau_+[\times \mathcal{V} \mapsto X(t, y)$ est continûment différentiable. De plus, nous avons, pour tout s et t dans $]\tau_-, \tau_+[$,

$$X(s + t, y) = X(s, X(t, y)) = X(t, X(s, y))$$

¹En pratique on s'intéresse à un retour en x_1 avec le même changement de signe de g qu'au passage par x_0 . Le rôle de \mathcal{D}_g est donc aussi de rejeter la partie de Σ où le changement de signe devrait avoir lieu dans l'autre sens comme l'impose la continuité.

et donc :

$$\begin{aligned}
f(X(s+t, y)) &= \frac{\partial X}{\partial t}(s, X(t, y)) , \\
&= \frac{\partial X}{\partial x}(t, X(s, y)) \frac{\partial X}{\partial t}(s, y) , \\
&= \frac{\partial X}{\partial x}(t, X(s, y)) f(X(s, y)) .
\end{aligned}$$

En particulier, ceci donne :

$$f(X(s, y)) = \frac{\partial X}{\partial x}(t, y) f(y) \quad \forall (t, y) \in]\tau_-, \tau_+[\times \mathcal{V} . \quad (4)$$

3 Construction et propriétés de l'application de Poincaré

Supposons donc l'existence de x_0 dans Σ et $T_0 > 0$ tel que $x_1 = X(T_0, x_0)$ est aussi dans Σ . Dans tout ce qui suit T_0 est supposé être le plus petit réel strictement positif donnant cette propriété. Une conséquence immédiate des résultats rappelés au-dessus est qu'il existe $\eta > 0$ et un voisinage ouvert $V_{x_0} \subset \mathcal{D}_g$ de x_0 tels que la fonction $(t, x) \in]T_0 - \eta, T_0 + \eta[\times V_{x_0} \mapsto g(X(t, x))$ est continûment différentiable. De plus, nous avons :

$$\begin{aligned}
g(X(T_0, x_0)) &= g(x_1) = 0 , \\
\frac{\partial g}{\partial x}(X(T_0, x_0)) \frac{\partial X}{\partial t}(T_0, x_0) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_1) f(x_1) \neq 0 .
\end{aligned}$$

D'après le Théorème des fonctions implicites, il existe ε dans $]0, \eta]$, un voisinage ouvert $\mathcal{D}_T \subset V_{x_0}$ de x_0 et une fonction $\mathfrak{T} : \mathcal{D}_T \rightarrow]T_0 - \varepsilon, T_0 + \varepsilon[$ continûment différentiable et satisfaisant :

$$\mathfrak{T}(x_0) = T_0$$

tels que, pour tout x dans \mathcal{D}_T , $X(\mathfrak{T}(x), x)$ est dans \mathcal{D}_g et $\mathfrak{T}(x)$ est l'unique solution dans $]T_0 - \varepsilon, T_0 + \varepsilon[$ de :

$$g(X(\mathfrak{T}(x), x)) = 0 . \quad (5)$$

Aussi nous avons :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(X(\mathfrak{T}(x), x)) \frac{\partial X}{\partial t}(\mathfrak{T}(x), x) \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}(x) + \frac{\partial g}{\partial x}(X(\mathfrak{T}(x), x)) \frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x) = 0$$

et donc :

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}(x) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(X(\mathfrak{T}(x), x)) \frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x)}{\frac{\partial g}{\partial x}(X(\mathfrak{T}(x), x)) f(X(\mathfrak{T}(x), x))} . \quad (6)$$

Considérons alors l'application $P : \mathcal{D}_T \rightarrow \Sigma$ définie par :

$$P(x) = X(\mathfrak{T}(x), x) . \quad (7)$$

Elle est continûment différentiable. De plus, du fait de l'unicité des solutions, nous avons :

$$X(-\mathfrak{T}(P(x)), P(x)) = x \quad \forall x \in \mathcal{D}_T .$$

Introduisons les notations :

$$\Sigma_{x_0} = \Sigma \cap \mathcal{D}_T , \quad \Sigma_{x_1} = P(\Sigma_{x_0}) \subset \Sigma .$$

Σ_{x_0} contient x_0 et Σ_{x_1} contient x_1 . Nous avons établi :

Proposition 1 *Sous les conditions ci-dessus, la restriction P_Σ de P à Σ_{x_0} , dite application de Poincaré, est une bijection entre Σ_{x_0} et Σ_{x_1} .*

De plus, avec (6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x) &= \frac{\partial X}{\partial t}(\mathfrak{T}(x), x) \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x}(x) + \frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x) , \\ &= \left(\text{Id}_n - \frac{f(X(\mathfrak{T}(x), x)) \frac{\partial g}{\partial x}(X(\mathfrak{T}(x), x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(X(\mathfrak{T}(x), x)) f(X(\mathfrak{T}(x), x))} \right) \frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x) , \\ &= \left(\text{Id}_n - \frac{f(P(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(P(x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(P(x)) f(P(x))} \right) \frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x) . \end{aligned}$$

Remarquons que d'après (4), nous avons :

$$\begin{aligned} \left(\text{Id}_n - \frac{f(P(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(P(x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(P(x)) f(P(x))} \right) \frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x) f(x) &= \left(\text{Id}_n - \frac{f(P(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(P(x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(P(x)) f(P(x))} \right) f(X(\mathfrak{T}(x), x)) , \\ &= \left(\text{Id}_n - \frac{f(P(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(P(x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(P(x)) f(P(x))} \right) f(P(x)) , \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x) = \left(\text{Id}_n - \frac{f(P(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(P(x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(P(x)) f(P(x))} \right) \frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x) \left(\text{Id}_n - \frac{f(x) \frac{\partial g}{\partial x}(x)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x)} \right) . \quad (8)$$

Nous vérifions bien que, l'application de Poincaré P_Σ , envoyant des points x de Σ_{x_0} sur des points $P_\Sigma(x)$ de Σ_{x_1} aussi contenu dans Σ , sa différentielle envoie des vecteurs de l'espace tangent à Σ en des points de Σ_{x_0} sur des vecteurs de l'espace tangent à Σ en des points de Σ_{x_1} . Ceci dérive directement du fait que $\left(\text{Id}_n - \frac{f(x) \frac{\partial g}{\partial x}(x)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x)} \right)$ est un projecteur sur l'espace tangent à $\Sigma = \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) = 0\}$ au point x puisque, si v est un vecteur dans cet espace, il vérifie :

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x + tv) - g(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x + tv)}{t} = \frac{\partial g}{\partial x}(x) v \quad \forall x \in \Sigma .$$

En fait l'expression (8) nous dit bien plus. En effet, d'après (4), le noyau du projecteur de départ $\left(\text{Id}_n - \frac{f(x) \frac{\partial g}{\partial x}(x)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x)} \right)$, engendré par $f(x)$, est envoyé par $\frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x)$ en le noyau du projecteur au point d'arrivée $\left(\text{Id}_n - \frac{f(P(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(P(x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(P(x)) f(P(x))} \right)$, engendré par $f(P(x))$. Alors puisque, pour tout x de \mathcal{D}_T , $\frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{T}(x), x)$ est une bijection, nous avons établi :

Proposition 2 *Pour x dans Σ_{x_0} , $\frac{\partial P}{\partial x}(x)$ est une bijection entre l'espace tangent à Σ au point x et l'espace tangent à Σ au point $P(x)$.*

Pour aller plus loin dans la compréhension de ce que sous-tend cette Proposition, nous supposons maintenant que x_0 et x_1 sont confondus, i.e. :

$$X(T_0, x_0) = x_0 .$$

Nous reviendrons au prochain paragraphe sur la signification de cette hypothèse pour les solutions du système (2). Pour le moment, nous nous contentons d'étudier ce qu'elle implique pour l'application de Poincaré. Pour cela il est intéressant de travailler dans un système de coordonnées particulier. Nous avons :

Lemme 1 Soient \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^n , x_0 un point de \mathcal{O} et $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment différentiables qui satisfont :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0) f(x_0) \neq 0 . \quad (9)$$

Il existe un voisinage ouvert Γ_{x_0} de x_0 , un système de coordonnées $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ défini sur Γ_{x_0} et une fonction $h : \Gamma_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}_*$ continûment différentiable tels que, dans les coordonnées (γ_i) et pour tout point x dans Γ_{x_0} , nous avons :

$$f((\gamma_i)) = (h((\gamma_i)), 0, \dots, 0) \quad , \quad g((\gamma_i)) = \gamma_1 . \quad (10)$$

Preuve :

Ce résultat est une conséquence immédiate de résultats classiques de géométrie différentielle.

D'après (9), $f(x_0)$ est non nul. Donc il existe une base de \mathbb{R}^n dont l'origine est en x_0 et dont $f(x_0)$ est le premier vecteur, i.e. :

$$x_0 = (0, \dots, 0) \quad , \quad f(x_0) = (1, 0, \dots, 0) .$$

Nous notons (α_i) les coordonnées dans cette base.

D'après le Théorème de redressement des champs de vecteurs, il existe un voisinage de x_0 sur lequel est défini un système de coordonnées (β_i) tel que, dans ces coordonnées et pour tout point dans ce voisinage, nous avons² :

$$f((\beta_i)) = (1, 0, \dots, 0) .$$

(9) s'écrit alors :

$$\frac{\partial g}{\partial \beta_1}((\beta_i)) \neq 0 .$$

Ensuite, d'après le Théorème du rang, il existe un un voisinage de x_0 sur lequel

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (g((\beta_i)), \beta_2, \dots, \beta_n) .$$

définit un système de coordonnées. Alors la fonction h de l'énoncé est donnée par :

$$h((\gamma_i)) = \left. \frac{\partial g}{\partial \beta_1}((\beta_i)) \right|_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (g((\beta_i)), \beta_2, \dots, \beta_n)} .$$

Elle est donc à valeurs non nulles sur tout le voisinage.

²Nous laissons le lecteur vérifier que l'application ci-dessous est un difféomorphisme définissant implicitement de façon licite ce système (β_i) :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = X(\beta_1, (0, \beta_2, \dots, \beta_n)) .$$

Nous adoptons le système de coordonnées (γ_i) pour la suite. Soit x le point de \mathbb{R}^{n-1} défini par les $n - 1$ dernières coordonnées $(\gamma_2, \dots, \gamma_n)$, i.e. :

$$x = (\gamma_1, x) .$$

D'après (10), nous avons :

$$x_0 = (0, 0) \quad , \quad x = (0, x) \quad \forall x \in \Sigma \cap \Gamma_{x_0} .$$

Ensuite, quitte à réduire \mathcal{D}_g , intervenant dans la définition de Σ , nous supposons que \mathcal{D}_g , voisinage de $x_0 (= x_1)$, est contenu dans $\Gamma_{x_0} \cap \mathcal{D}_T$ et, pour les coordonnées (γ_i) , est le produit cartésien :

$$\mathcal{D}_g =] - \nu, \nu[\times \mathcal{D}_P$$

où ν est un réel strictement positif et \mathcal{D}_P est un voisinage ouvert de l'origine dans \mathbb{R}^{n-1} . Alors, l'application de Poincaré est la fonction P_Σ qui, à x dans \mathcal{D}_P , associe les composantes 2 à n de $P(0, x) = X(\mathfrak{F}(x), x)$ dans les coordonnées (γ_i) . Elle est continûment différentiable. De plus, toujours d'après (10), dans les coordonnées (γ_i) et pour tout x assez proche de x_0 , nous avons :

$$\left(\text{Id}_n - \frac{f(x) \frac{\partial g}{\partial x}(x)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x) f(x)} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix} , \quad \left(\text{Id}_n - \frac{f(P(x)) \frac{\partial g}{\partial x}(P(x))}{\frac{\partial g}{\partial x}(P(x)) f(P(x))} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix} .$$

Par ailleurs, puisque, dans les coordonnées (γ_i) , f est l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial \gamma_1}$, en utilisant l'identité (4), nous obtenons :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(\mathfrak{F}(x), x) = \begin{pmatrix} \frac{h(P(x))}{h(x)} & \star \\ 0 & M(\gamma_1, x) \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathcal{D}_g .$$

Ceci définit une fonction M à valeurs matrices inversibles. Nous avons donc :

$$\frac{\partial P_\Sigma}{\partial x}(x) = \left(\frac{\partial P}{\partial \gamma_i}(0, x) \right)_{i=2, \dots, n} = M(0, x) .$$

Nous avons établi :

Proposition 3 *Si $x_0 = X(T_0, x_0)$, alors l'application de Poincaré P_Σ est un difféomorphisme. De plus 1 est valeur propre de $\frac{\partial X}{\partial x}(T_0, x_0)$ et, si $(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$ dénotent les $n - 1$ autres valeurs propres de cette matrice, en comptant la multiplicité, la matrice Jacobienne de P_Σ en x_0 admet pour valeurs propres $(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Ces λ_i sont appelés multiplicateurs.*

Une autre propriété attendue est que, toujours lorsque $x_0 = X(T_0, x_0)$, les multiplicateurs ne dépendent pas de Σ . Précisément,

Proposition 4 *Si $x_0 = X(T_0, x_0)$ et si Σ' est une variété différentielle de dimension $n - 1$ transverse à f au point $X(t, x_0)$, les valeurs propres de la matrice Jacobienne de $P_{\Sigma'}$ en $X(t, x_0)$ sont les $(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$ définies dans la Proposition 3.*

Preuve :

Mettons le symbole $'$ en exposant pour dénoter les objets obtenus de Σ' et $X(t, x_0)$. Comme le lecteur peut s'en douter, mais nous le démontrerons dans le paragraphe suivant, nous avons :

$$X(T_0, X(t, x_0)) = X(t, x_0) .$$

Alors, en refaisant la construction ci-dessus, nous obtenons :

$$\mathfrak{T}'(X(t, x_0)) = T_0 .$$

Ainsi, dans les coordonnées (γ'_i) et pour tout x assez proche de $X(t, x_0)$, nous avons :

$$\frac{\partial P'}{\partial x}(x') = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(X(\mathfrak{T}'(x'), x')) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{n-1} \end{pmatrix}$$

et :

$$\frac{\partial P_{\Sigma'}}{\partial x'}(x') = \left(\frac{\partial P'}{\partial \gamma'_i}(0, x') \right) |_{i=2, \dots, n} .$$

Donc $\frac{\partial P_{\Sigma'}}{\partial x'}$ admet en $X(t, x_0)$, i.e. en $x' = 0$, les mêmes valeurs propres, sauf la première égale à 1, que $\frac{\partial X}{\partial x}(T_0, X(t, x))$. Nous observons alors que l'identité en x

$$X(T_0, X(t, x)) = X(t, X(T_0, x)) ,$$

implique :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(T_0, X(t, x)) \frac{\partial X}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial X}{\partial x}(t, X(T_0, x)) \frac{\partial X}{\partial x}(T_0, x) .$$

En $x_0 = X(T_0, x_0)$, ceci donne :

$$\frac{\partial X}{\partial x}(T_0, X(t, x_0)) = \frac{\partial X}{\partial x}(t, x_0) \frac{\partial X}{\partial x}(T_0, x) \left(\frac{\partial X}{\partial x}(t, x_0) \right)^{-1} .$$

Les matrices $\frac{\partial X}{\partial x}(T_0, x)$ et $\frac{\partial X}{\partial x}(T_0, X(t, x_0))$ ont donc même valeurs propres, d'où le résultat énoncé.

4 Solution périodique

Supposons à nouveau que $x_0 = X(T_0, x_0)$. Cette hypothèse équivaut à dire que l'application de Poincaré a un point fixe en l'origine des coordonnées (γ_i) données par le Lemme 1. Alors, par définition de P_{Σ} , l'intervalle maximal de définition $] \sigma_-(x_0), \sigma_+(x_0)[$ de la solution $X(t, x_0)$ contient T_0 . Aussi, du fait de l'unicité des solutions, nous avons :

$$X(T_0 + t, x_0) = X(t, x_0) \quad \forall t \in] \sigma_-(x_0), \sigma_+(x_0) - T_0[.$$

En itérant cet argument, nous déduisons que l'intervalle maximal de définition de la solution $X(t, x_0)$ est en fait $] -\infty, +\infty[$ et que c'est une solution T_0 -périodique. Nous avons établi :

Proposition 5 ³ *Si l'application de Poincaré a un point fixe, le système (2) admet une solution périodique.*

Sachant que l'existence d'une solution périodique de (2) est impliquée par l'existence d'un point fixe de P_Σ , nous voulons maintenant étudier si le comportement des solutions du système dynamique à temps discret (11) ci-dessous donne des informations sur celui des solutions de (2), initialisées au voisinage de la solution périodique. Ce système est :

$$x_{m+1} = P_\Sigma(x_m), \quad (11)$$

qui n'a de sens que tant que :

$$x_m = (\gamma_2, \dots, \gamma_n),$$

est dans \mathcal{D}_P , (voisinage de 0 dans les coordonnées $(\gamma_2, \dots, \gamma_n)$). Nous dénotons par $\mathcal{X}(m, x)$ la solution issue de x .

À ce point il est utile de définir le cycle \mathfrak{C} , ou courbe fermée, associé à la solution périodique $X(t, x_0)$ comme l'ensemble :

$$\mathfrak{C} = \{x : \exists t : x = X(t, x_0)\},$$

i.e. l'ensemble des points visités par la solution périodique. C'est un compact. Nous notons $d(x, \mathfrak{C})$ la distance à ce compact, soit :

$$d(x, \mathfrak{C}) = \inf_{t \in [0, T_0]} |x - X(t, x_0)|.$$

Définition 1 *Une solution T_0 -périodique $X(t, x_0)$ est dite*

12. *orbitalement stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout x pour lequel il existe un temps t_0 satisfaisant :*

$$d(X(t_0, x), \mathfrak{C}) \leq \delta,$$

la solution $X(t, x)$ existe sur $[0, +\infty[$ et satisfait :

$$d(X(t, x), \mathfrak{C}) \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty[;$$

13. *orbitalement attractive si, il existe $\mu > 0$ tel que, pour tout x pour lequel il existe un temps t_0 satisfaisant :*

$$d(X(t_0, x), \mathfrak{C}) \leq \mu, \quad (14)$$

la solution $X(t, x)$ existe sur $[0, +\infty[$ et satisfait :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(X(t, x), \mathfrak{C}) = 0;$$

³La réciproque est vraie. En effet, supposons que $X(t, x_0)$ est une solution T_0 -périodique pour (T_0, x_0) dans $]T_0 - \varepsilon, T_0 + \varepsilon[\times \mathcal{D}_T$. Alors, puisque que nous avons :

$$g(X(T_0, x_0)) = g(x_0),$$

l'unicité de $\mathfrak{T}(x_0)$ comme solution de (5) implique :

$$x_0 = X(T_0, x_0) = x_1$$

et donc que l'origine des coordonnées (γ_i) est un point fixe de l'application de Poincaré.

15. *orbitalement asymptotiquement stable si elle est orbitalement stable et orbitalement attractive. Si de plus, pour tout x satisfaisant (14), il existe ϕ tel que :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |X(t + \phi, x_0) - X(t, x)| = 0$$

alors la stabilité asymptotique orbitale est dite avoir lieu avec phase asymptotique.

Nous laissons au lecteur la vérification par passage aux coordonnées polaires que le système :

$$\dot{x}_1 = x_1 (1 - x_1^2 - x_2^2)^3 - x_2 (2 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2)^3 + x_1 (2 - x_1^2 - x_2^2)$$

admet le cercle unité comme cycle portant une solution périodique orbitalement asymptotiquement stable mais sans phase asymptotique

Supposons que l'origine est asymptotiquement stable pour le système à temps discret (11). Précisément, supposons :

16. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout x satisfaisant :

$$|x| \leq \delta,$$

la solution $\mathcal{X}(m, x)$ associée de (11) est dans \mathcal{D}_P pour tout m dans \mathbb{N} et satisfait :

$$|\mathcal{X}(m, x)| \leq \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

17. il existe $\mu > 0$ tel que pour tout x satisfaisant :

$$|x| \leq \mu,$$

la solution $\mathcal{X}(m, x)$ satisfait :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\mathcal{X}(m, x)| = 0.$$

Choisissons un compact \mathcal{K} dans \mathcal{D}_P , voisinage de l'origine (dans les coordonnées $(\gamma_2, \dots, \gamma_n)$) et tel que :

- du fait de la continuité de la fonction \mathfrak{T} , il existe \mathfrak{T}_{\max} satisfaisant :

$$\mathfrak{T}_{\max} = \max_{x \in \mathcal{K}} \mathfrak{T}((0, x));$$

- toutes les solutions de (2), issues d'un point x dans $\{0\} \times \mathcal{K}$, existent au moins sur $[0, \mathfrak{T}_{\max}]$ (voir le paragraphe 2).

D'après le point 16 ci-dessus, il existe $\delta_{\mathcal{K}} > 0$ tel que :

$$\mathcal{X}(m, x) \in \mathcal{K} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x : |x| \leq \delta_{\mathcal{K}}. \quad (18)$$

Alors, pour tout x , de norme inférieure ou égale à $\delta_{\mathcal{K}}$, et tout m , nous avons :

$$\mathfrak{T}((0, \mathcal{X}(m, x))) \leq \mathfrak{T}_{\max}.$$

Ainsi, la solution $X(t, \mathcal{X}(m, x))$ de (2), issue de $\mathcal{X}(m, x)$, est définie au moins sur $[0, \mathfrak{T}_{\max}]$. La définition de P_{Σ} et de \mathfrak{T} impliquent alors :

$$\mathcal{X}(m+1, x) = X(\mathfrak{T}((0, \mathcal{X}(m, x))), \mathcal{X}(m, x)) .$$

Du fait de l'unicité des solutions de (2), la concaténation de ces morceaux de solutions $X(t, \mathcal{X}(m, x))$ donne une unique solution $X(t, (0, x))$ définie au moins sur $[0, +\infty[$ et satisfaisant :

$$\mathcal{X}(m, x) = X(\mathcal{T}(m, x), (0, x)) \quad \forall m \in \mathbb{N} , \quad (19)$$

avec :

$$\mathcal{T}(m, x) = \mathcal{T}(m-1, x) + \mathfrak{T}((0, \mathcal{X}(m-1, x))) \quad , \quad \mathcal{T}(0, x) = 0 . \quad (20)$$

Par ailleurs, les propriétés des solutions de (2) font que l'ensemble :

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \bigcup_{t \in [0, \mathfrak{T}_{\max}]} X(t, \mathcal{K}) \quad (21)$$

est un compact de \mathbb{R}^n sur lequel f admet une constante de Lipschitz L_f . Alors, pour tout x dans \mathcal{K} et t dans $[0, \mathfrak{T}_{\max}]$, nous avons, (puisque $x_0 = (0, 0)$),

$$\begin{aligned} |X(t, (0, x)) - X(t, x_0)| &\leq |(0, x) - x_0| + \int_0^t |f(X(s, (0, x))) - f(X(s, x_0))| ds , \\ &\leq |x| + L_f \int_0^t |X(s, (0, x)) - X(s, x_0)| ds , \\ &\leq \exp(L_f t) |x| , \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient de :

Lemme 2 (Gronwall) *Si $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues et $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable satisfaisant :*

$$a(t) \leq b(t) + \int_0^t a(s)c(s)ds \quad \forall t \in [0, T] ,$$

nous avons :

$$a(t) \leq b(t) + \int_0^t c(s)b(s) \exp\left(\int_s^t c(r)dr\right) ds \quad \forall t \in [0, T] . \quad (22)$$

Preuve :

La fonction $t \mapsto \exp\left(-\int_0^t c(r)dr\right) \int_0^t a(s)c(s)ds - \int_0^t c(s)b(s) \exp\left(\int_0^s c(r)dr\right) ds$ est décroissante.

Nous avons donc établi :

$$|X(t, (0, x)) - X(t, x_0)| \leq \exp(L_f \mathfrak{T}_{\max}) |x| \quad \forall x \in \mathcal{K} , \quad \forall t \in [0, \mathfrak{T}_{\max}] .$$

Alors, avec (19) et (20), nous déduisons que, pour tout x satisfaisant :

$$|x| \leq \delta_{\mathcal{K}} , \quad (23)$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
d(X(t + \mathcal{T}(m, x), (0, x)), \mathfrak{C}) &\leq |X(t + \mathcal{T}(m, x), (0, x)) - X(t, x_0)|, \\
&\leq |X(t, \mathcal{X}(m, x)) - X(t, x_0)|, \\
&\leq \exp(L_f \mathfrak{T}_{\max}) |\mathcal{X}(m, x)| \quad \forall t \in [0, \mathfrak{T}_{\max}]
\end{aligned} \tag{24}$$

et

$$\mathcal{T}(m, x) - \mathcal{T}(m - 1, x) \leq \mathfrak{T}_{\max} .$$

Ceci montre que la stabilité asymptotique orbitale de la solution périodique de (2) découle des points 16 et 17 ci-dessus.

Pour ce qui concerne la phase asymptotique, observons que, puisque la fonction \mathfrak{T} est continûment différentiable sur \mathcal{D}_T contenant le compact $\{0\} \times \mathcal{K}$, elle admet une constante de Lipschitz L_T sur cet ensemble. Rappelons aussi que nous avons :

$$T_0 = \mathfrak{T}(x_0) = \mathfrak{T}((0, 0)) .$$

Donc, pour toute solution $\mathcal{X}(m, x)$, avec x satisfaisant (23), nous avons :

$$|\mathfrak{T}((0, \mathcal{X}(m - 1, x))) - T_0| \leq L_T |\mathcal{X}(m - 1, x)| .$$

Nous déduisons alors de (20) :

$$|(\mathcal{T}(m, x) - mT_0) - (\mathcal{T}(m - 1, x) - (m - 1)T_0)| \leq L_T |\mathcal{X}(m - 1, x)|$$

Donc, si la convergence des solutions de (11) est telle que la série de terme $|\mathcal{X}(i - 1, x)|$ est convergente, la suite $(\mathcal{T}(m, x) - mT_0)$ converge vers une limite notée $\mathcal{T}_{\infty}(x)$ qui satisfait :

$$|\mathcal{T}_{\infty}(x) - (\mathcal{T}(m, x) - mT_0)| \leq L_T \sum_{i=m}^{\infty} |\mathcal{X}(i, x)| .$$

Puisque $|f|$ est borné par disons F sur le compact $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ défini en (21), nous avons, pour tout t dans $[0, \mathfrak{T}_{\max}]$ (voir (24)) :

$$\begin{aligned}
&|X(t + mT_0 + \mathcal{T}_{\infty}(x), (0, x)) - X(t, x_0)| \\
&\leq |X(t + mT_0 + \mathcal{T}_{\infty}(x), (0, x)) - X(t + \mathcal{T}(m, x), (0, x))| \\
&\quad + |X(t + \mathcal{T}(m, x), (0, x)) - X(t, x_0)| \\
&\leq F |mT_0 + \mathcal{T}_{\infty}(x) - \mathcal{T}(m, x)| + |X(t, \mathcal{X}(m, x)) - X(t, x_0)|, \\
&\leq F L_T \sum_{i=m}^{\infty} |\mathcal{X}(i, x)| + \exp(L_f \mathfrak{T}_{\max}) |\mathcal{X}(m, x)| .
\end{aligned}$$

Puisque \mathfrak{T}_{\max} est plus grand que T_0 , tout $s > 0$ peut s'écrire comme $s = t + mT_0$ avec t dans $[0, \mathfrak{T}_{\max}]$. De plus, nous avons :

$$X(t + mT_0, x_0) = X(t, x_0)$$

et donc :

$$|X(s + \mathcal{T}_{\infty}(x), (0, x)) - X(s, x_0)| = |X(t + mT_0 + \mathcal{T}_{\infty}(x), (0, x)) - X(t, x_0)| .$$

Nous avons donc établi que, si la série de terme $|\mathcal{X}(i, x)|$ est convergente, nous avons :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} |X(s + \mathcal{T}_\infty(x), (0, x)) - X(s, x_0)| = 0 .$$

En résumé, nous avons :

Proposition 6 *La solution périodique du système (2) est orbitalement asymptotiquement stable si et seulement si l'origine est asymptotiquement stable pour le système (11) obtenu en itérant l'application de Poincaré. De plus la convergence a lieu avec phase asymptotique si les solutions de (11) convergent au sens ℓ^1 .*

Preuve :

Il ne nous reste à démontrer que, si l'orbite périodique de (2) est orbitalement asymptotiquement stable, alors l'origine est asymptotiquement stable pour le système (11). Pour cela, il est essentiel de noter que x_0 est un point isolé de l'orbite périodique dans $\{0\} \times \mathcal{D}_P$ (dans les coordonnées (γ_i)). En effet il existe un voisinage \mathcal{N} de x_0 de la forme $] -\varepsilon, +\varepsilon[\times \mathfrak{Y}$, contenu dans Γ_{x_0} , où ces coordonnées sont définies et tel que $|h((\gamma_i))| \geq \eta > 0$. Ainsi dans ce voisinage les solutions de (2) satisfont :

$$\dot{\gamma}_1 = h((\gamma_i)) \quad , \quad \dot{\gamma}_i = 0$$

et donc :

$$|\dot{\gamma}_1| \geq \eta .$$

Alors, si pour s dans $(0, T_0)$ le point de l'orbite périodique $X(s, x_0)$ est dans Σ et plus précisément dans $(\{0\} \times \mathcal{D}_P) \cap \mathcal{N}$, la composante γ_1 de l'orbite doit passer de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$ et donc rester au moins un temps supérieur ou égal à $\frac{2\varepsilon}{\eta}$ dans le voisinage. Le temps maximum pour revenir au même point étant T_0 , il ne peut y avoir au maximum qu'un nombre fini inférieur à $\frac{T_0 \eta}{2\varepsilon}$ d'intersections de l'orbite périodique avec Σ . Ceci implique (par contradiction) que, pour tout $\omega > 0$, nous pouvons trouver $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout x de \mathcal{D}_P satisfaisant :

$$d((0, x), \mathfrak{C}) \leq \varepsilon ,$$

nous avons :

$$|x| \leq \omega$$

i.e. le point $(0, x)$ est à une distance inférieure à ω de x_0 .

D'après le point 12 de la Définition 1 ci-dessus, nous pouvons trouver $\delta_K > 0$ tel que si :

$$|x| \leq \delta_K$$

alors la solution $X(t, (0, x))$ de (2) est définie sur $[0, +\infty[$ et telle que $\mathcal{X}(m, x)$ est dans \mathcal{D}_P pour tout entier m , où $\mathcal{X}(m, x)$ est défini en (19). De plus, toujours d'après le point 12 de la Définition 1 et en utilisant la conséquence notée ci-dessus de l'isolement de x_0 , pour tout $\omega > 0$, nous pouvons trouver $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que :

$$|x| \leq \delta$$

implique :

$$d(\mathcal{X}(m, x), \mathfrak{C}) \leq \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

et :

$$|\mathcal{X}(m, x)| \leq \omega .$$

Avec le même argument, le point 13 de la Définition 1 implique la convergence vers 0 de $\mathcal{X}(m, x)$ pour m tendant vers l'infini. L'origine est donc asymptotiquement stable pour le système (11).

Il est bien connu qu'une façon d'étudier la stabilité d'un point d'équilibre est d'étudier les valeurs propres du système linéarisé en ce point. Ainsi, supposons que les valeurs propres de

$$A = \frac{\partial P_\Sigma}{\partial x}(0)$$

sont toutes de module strictement inférieur à 1. Alors, grâce à la décomposition de Jordan de A , nous voyons qu'il existe k et $\rho < 1$ tel que, pour la norme euclidienne standard, nous avons :

$$|A^m x| \leq k \rho^m |x| .$$

Choisissons λ dans $]\rho, 1[$ et définissons :

$$\|x\| = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m} |A^m x| .$$

C'est une norme vérifiant :

$$|x| \leq \|x\| \leq \frac{k\lambda}{\lambda - \rho} |x| \quad , \quad \|Ax\| \leq \lambda(\|x\| - |x|) .$$

Puisque P_Σ est définie et continûment différentiable sur \mathcal{D}_P , voisinage de 0, quitte à réduire $\delta_{\mathcal{K}}$ donnant (18), nous avons :

$$\|P_\Sigma(x) - Ax\| \leq \frac{1 - \lambda}{2} \|x\| \quad \forall x : \|x\| \leq \delta_{\mathcal{K}} .$$

Nous en déduisons :

$$\|P_\Sigma(x)\| \leq \|Ax\| + \frac{1 - \lambda}{2} \|x\| \leq \frac{1 + \lambda}{2} \|x\| \quad \forall x : \|x\| \leq \delta_{\mathcal{K}} .$$

Il en résulte immédiatement :

$$\|\mathcal{X}(m + 1, x)\| \leq \frac{1 + \lambda}{2} \|\mathcal{X}(m, x)\| \leq \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right)^m \|x\| \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall x : \|x\| \leq \delta_{\mathcal{K}} .$$

Nous avons donc :

Proposition 7 *Si l'application de Poincaré a un point fixe où sa matrice Jacobienne a toutes ses valeurs propres de module strictement inférieur à 1, le système (2) admet une solution périodique qui est orbitalement asymptotiquement stable avec phase asymptotique.*

En fait ce résultat s'étend au cas où la matrice Jacobienne aurait aussi des valeurs propres de module strictement supérieures à 1 de sorte que le linéarisé de l'application de Poincaré au point fixe aurait une décomposition en un espace linéaire invariant associé aux valeurs propres de module strictement inférieur à 1 et un espace linéaire invariant complémentaire associé aux valeurs propres de module strictement supérieur à 1. Dans ce cas il existe aussi des ensembles invariants pour le système (11), l'un, dit variété stable, dans lequel les solutions convergent exponentiellement vers l'origine, l'autre, dit variété instable, dans lequel elles s'éloignent exponentiellement. La même configuration existe aussi pour le système (2), avec cette fois des variétés stable et instable qui évoluent de façon périodique avec le temps.

5 Moyennisation

Comme seconde utilisation de l'application de Poincaré, considérons le système :

$$\dot{z} = \varepsilon f(t, z, \varepsilon) \quad (25)$$

où ε , un réel non négatif, est un petit paramètre, la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ est deux fois continûment différentiable et telle que, pour tout (z, ε) , la fonction $t \mapsto f(t, z, \varepsilon)$ est T_0 -périodique. La forme particulière (25) est dite forme standard dans le jargon de la moyennisation.

La nouveauté est ici la dépendance en temps de f . Ceci amène notre première question : Est-il possible de transformer par un changement de coordonnées approprié le système (25) en un système indépendant du temps ?

Puisque l'identité est un changement de coordonnées répondant à la question lorsque $\varepsilon = 0$, cherchons celui-ci sous la forme $z \mapsto z + \varepsilon\phi(t, z)$. Dans ce cas, ϕ doit être trouvé pour que $\frac{d}{dt}(z + \varepsilon\phi(t, z))$ soit indépendant de t au moins au premier ordre en ε , i.e. la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\varepsilon f(t, z, \varepsilon) + \varepsilon \left[\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, z) + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial z}(t, z) f(t, z, \varepsilon) \right] \right]$$

doit être indépendante de t . Ceci donne :

$$f(t, z, 0) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, z) = \bar{f}(z) ,$$

où \bar{f} est une fonction arbitraire. Nous obtenons :

$$\phi(t, z) = \int_0^t [f(s, z, 0) - \bar{f}(z)] ds .$$

Nous remarquons alors que la fonction ϕ ainsi obtenue est T_0 -périodique en t si :

$$\int_t^{t+T_0} [f(s, z, 0) - \bar{f}(z)] ds = 0 \quad \forall t$$

et donc si la fonction \bar{f} est choisie comme la moyenne en t de f , i.e. comme la fonction deux fois continûment différentiable définie par :

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(r, z, 0) dr .$$

En conclusion, nous pouvons nous attendre à ce que les solutions $Z(t, z, \varepsilon)$ de (25) soient, après changement de coordonnées et au moins au premier ordre en ε solution de :

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) , \quad (26)$$

système dit système moyenné du système (25). Ses solutions sont notées $Y(t, y, \varepsilon)$.

De façon rigoureuse, nous avons :

Proposition 8 *Sous les conditions ci-dessus, étant donnés $\delta > 0$ et deux compacts convexes $K_1 \subset K_2$, tels que la distance Δ de K_1 à la frontière de K_2*

$$\Delta = \inf_{(y_1, y_2) \in K_1 \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus K_2)} |y_2 - y_1|$$

est strictement supérieure à δ , il existe des constantes c_1, c_2, c_3 et ε_ telles que nous avons :*

$$\begin{aligned} |Z(t, z, \varepsilon) - Y(t, y, \varepsilon)| &\leq (|z - y| + c_1 \varepsilon) \exp(\varepsilon c_2 |t|) \\ \forall (z, y) : y \in K_1 \ \&\ \ |z - y| \leq \delta , \quad \forall t \in \left] -\frac{c_3}{\varepsilon}, \frac{c_3}{\varepsilon} \right[, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_*[. \end{aligned}$$

Preuve :

Soient L_f et F respectivement la constante de Lipschitz et la borne de f sur le compact K_2 . Soit $w : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ la fonction définie par :

$$w(t, y) = \int_0^t f(s, y, 0) ds - \bar{f}(y) t . \quad (27)$$

Elle est deux fois continûment différentiable et T_0 -périodique en t pour chaque y . Soient L_W et W respectivement la constante de Lipschitz en y et la borne de w sur le compact $[0, T_0] \times K_2$. Avec le Théorème du point fixe de Banach, nous pouvons vérifier que la relation :

$$z = y_\varepsilon + \varepsilon w(t, y_\varepsilon) \quad (28)$$

définie de façon licite un difféomorphisme $y_\varepsilon \in \text{Int}(K_2) \mapsto z$ pour chaque t et chaque ε dans $\left[0, \frac{1}{L_W}\right]$. Dans les coordonnées y_ε , le système (25) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}_\varepsilon}{\varepsilon} &= f(t, y_\varepsilon + \varepsilon w(t, y_\varepsilon), \varepsilon) - \frac{\partial w}{\partial t}(t, y_\varepsilon) - \frac{\partial w}{\partial y_\varepsilon}(t, y_\varepsilon) \dot{y}_\varepsilon , \\ &= \left(\text{Id}_{n-1} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y_\varepsilon}(t, y_\varepsilon) \right)^{-1} (f(t, y_\varepsilon + \varepsilon w(t, y_\varepsilon), \varepsilon) - f(t, y_\varepsilon, 0) + \bar{f}(y_\varepsilon)) \\ &= \bar{f}(y_\varepsilon) + \varepsilon f_1(t, y_\varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

où la fonction f_1 regroupe tous les termes d'ordre ε . Cette fonction est bien définie pour tout $(t, y_\varepsilon, \varepsilon)$ dans $\mathbb{R} \times K_2 \times \left[0, \frac{1}{L_W}\right]$. Elle est aussi T_0 -périodique en t . Soit F_1 sa borne sur $\mathbb{R} \times K_2 \times \left[0, \frac{1}{2L_W}\right]$. D'après (28), tout ce que nous pourrons établir pour les solutions $Y_\varepsilon(t, y_\varepsilon, \varepsilon)$, à valeurs dans $\text{Int}(K_2)$, de :

$$\dot{y}_\varepsilon = \varepsilon \bar{f}(y_\varepsilon) + \varepsilon^2 f_1(t, y_\varepsilon, \varepsilon) \quad (29)$$

est valide pour les solutions $Z(t, z, \varepsilon)$ de (25).

Pour établir la Proposition, nous observons que, pour tout y dans K_1 , la solution $Y(t, y, \varepsilon)$ de (26) est définie et à valeurs dans $\text{Int}(K_2)$ au moins sur l'intervalle $]-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta}{F}, \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta}{F}[$. De même, pour tout ε dans $[0, \frac{\Delta-\delta}{W}[$ et tout y_ε à une distance inférieure à $\delta + \varepsilon W$ de K_1 , la solution $Y_\varepsilon(t, y_\varepsilon, \varepsilon)$ est définie et à valeurs dans $\text{Int}(K_2)$ au moins sur l'intervalle $]-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta-\delta-\varepsilon W}{F+\varepsilon F_1}, \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta-\delta-\varepsilon}{F+\varepsilon F_1}[$. Dans de telles conditions, nous avons :

$$\begin{aligned} |Y_\varepsilon(t, y_\varepsilon, \varepsilon) - Y(t, y, \varepsilon)| &\leq |y_\varepsilon - y| + \varepsilon \int_0^t |\mathfrak{f}(Y_\varepsilon(s, y_\varepsilon, \varepsilon)) - \mathfrak{f}(Y(s, y, \varepsilon))| ds \\ &\quad + \varepsilon^2 \int_0^t |\mathfrak{f}_1(s, Y_\varepsilon(s, y_\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon)| ds, \\ &\leq |y_\varepsilon - y| + \varepsilon L_f \int_0^t |Y_\varepsilon(s, y_\varepsilon, \varepsilon) - Y(s, y, \varepsilon)| ds + \varepsilon^2 F_1 t. \end{aligned}$$

L'inégalité (22) de Gronwall nous donne alors :

$$|Y_\varepsilon(t, y_\varepsilon, \varepsilon) - Y(t, y, \varepsilon)| \leq |y_\varepsilon - y| \exp(\varepsilon L_f |t|) + \varepsilon \frac{F_1}{L_f} (\exp(\varepsilon L_f |t|) - 1).$$

Avec la relation (28) entre z et y_ε , nous avons obtenu :

$$\begin{aligned} |Z(t, z, \varepsilon) - Y(t, y, \varepsilon)| &\leq |Y_\varepsilon(t, y_\varepsilon, \varepsilon) - Y(t, y, \varepsilon)| + \varepsilon W, \\ &\leq |y_\varepsilon - y| \exp(\varepsilon L_f |t|) + \varepsilon \left(W + \frac{F_1}{L_f} (\exp(\varepsilon L_f |t|) - 1) \right), \\ &\leq |z - y| \exp(\varepsilon L_f |t|) + \varepsilon \left(W (\exp(\varepsilon L_f |t|) + 1) + \frac{F_1}{L_f} (\exp(\varepsilon L_f |t|) - 1) \right), \end{aligned}$$

pour tout y dans K_1 , tout z à une distance inférieure à δ de y , tout t dans $]-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta-\delta-\varepsilon W}{F+\varepsilon F_1}, \frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta-\delta-\varepsilon W}{F+\varepsilon F_1}[$ et tout ε dans $[0, \varepsilon_*[$ avec :

$$\varepsilon_* = \min \left\{ \frac{\Delta - \delta}{W}, \frac{1}{2L_f} \right\}.$$

Pour ce qui est de la validité en t , il suffit en fait que $Y(s, y, \varepsilon)$ et $Y_\varepsilon(s, y_\varepsilon, \varepsilon)$ soient à l'intérieur de K_2 pour tout s entre 0 et t . Il est donc suffisant que, pour tout s entre 0 et t , $Y(s, y, \varepsilon)$ soit à l'intérieur de K_2 et à une distance supérieure à $|y_\varepsilon - y| \exp(\varepsilon L_f |s|) + \varepsilon \frac{F_1}{L_f} (\exp(\varepsilon L_f |s|) - 1)$ de sa frontière. Ceci démontre la Proposition.

Avec la Proposition 8, nous savons comment approximer des solutions sur un intervalle de temps fini. Pour étudier la possibilité d'approximation sur un intervalle de temps infini, nous faisons appel à une application de Poincaré, tirant profit pour cela de la périodicité en temps de \mathfrak{f} .

Considérons le système⁴ :

$$\dot{x}_1 = 1 \quad , \quad \dot{x}_2 = \varepsilon f(x_1, x_2, \varepsilon) \quad , \quad (30)$$

évoluant dans $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ où \mathbb{S}^1 est le cercle de rayon $\frac{T_0}{2\pi}$. Bien évidemment la composante X_2 d'une solution $X(t, (0, z), \varepsilon)$ coïncide avec la solution $Z(t, z, \varepsilon)$ de (25). Prenons pour Σ l'ensemble :

$$\Sigma = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0 \pmod{T_0}\} .$$

Puisque nous avons :

$$X_1(t, x, \varepsilon) = X_1(t + T_0, x, \varepsilon) = x_1 + t \pmod{T_0} \quad \forall x \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \quad , \quad \forall t$$

toutes les solutions de (30) recoupent Σ tant qu'elles existent et la fonction \mathfrak{T} est tout simplement la fonction constante égale à T_0 . Ceci fait que l'application de Poincaré est l'application $x_2 \mapsto X_2(T_0, (0, x_2), \varepsilon)$ ou plus simplement $z \mapsto Z(T_0, z, \varepsilon)$. Alors, comme conséquence de la Proposition 7 nous obtenons :

Proposition 9 *Toujours sous les mêmes conditions, si y_0 est un point d'équilibre du système moyenné (26) tel que toutes les valeurs propres de $\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(y_0)$ sont à partie réelle strictement négative, il existe $\varepsilon_p > 0$ et une fonction continûment différentiable $\varepsilon \in [0, \varepsilon_p] \mapsto z_0(\varepsilon)$ satisfaisant :*

$$z_0(0) = y_0$$

et telle que $Z(t, z_0(\varepsilon), \varepsilon)$ est une solution de (25) qui est T_0 -périodique et orbitalement asymptotiquement stable avec phase asymptotique et ce pour tout ε dans $]0, \varepsilon_p]$.

La même extension que celle signalée après la Proposition 7 est valide ici aussi.

⁴Avec le système (30), nous ne sommes pas exactement dans le contexte du paragraphe 2 puisque l'espace des phases n'est pas \mathbb{R}^n mais $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Ceci est sans conséquence, car, pour notre construction d'une application de Poincaré, il suffit qu'un voisinage de Σ soit difféomorphe à \mathbb{R}^n . Si cette remarque ne satisfait pas notre lecteur, nous l'incitons à refaire ce qui suit en considérant, à la place de (30), le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\frac{T_0}{2\pi} x_2 - x_1 (1 - R(x_1, x_2)) \quad , \\ \dot{x}_2 &= \frac{T_0}{2\pi} x_1 - x_2 (1 - R(x_1, x_2)) \quad , \\ \dot{x}_3 &= \varepsilon f\left(\frac{T_0}{2\pi} \mathbf{arg}(\exp(x_1 + ix_2)), x_3, \varepsilon\right) \quad , \end{cases}$$

dont les solutions évoluent dans \mathbb{R}^{n+1} , avec :

$$R(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$i^2 = -1$. La fonction f étant T_0 périodique, la fonction f associée à ce système est bien deux fois continûment différentiable. La variété différentielle de dimension n transverse est :

$$\Sigma = \{x : x_1 = 0, x_2 \in]0, 2]\} .$$

Preuve :

Comme dans la preuve de la Proposition 8, nous faisons le changement de coordonnées :

$$x_1 = x_{\varepsilon_1} \quad , \quad x_2 = x_{\varepsilon_2} + \varepsilon w(t, x_{\varepsilon_2})$$

avec w donné par (27). Ceci nous permet de réécrire le système (30) sous la forme :

$$\dot{x}_{\varepsilon_1} = 1 \quad , \quad \dot{x}_{\varepsilon_2} = \varepsilon \bar{f}(x_{\varepsilon_2}) + \varepsilon^2 f_1(x_{\varepsilon_1}, x_{\varepsilon_2}, \varepsilon) . \quad (31)$$

Ses solutions évoluent dans $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ où \mathbb{S}^1 est de nouveau le cercle de rayon $\frac{T_0}{2\pi}$. Nous reprenons aussi Σ comme l'ensemble :

$$\Sigma = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0 \pmod{T_0}\} .$$

Nous avons vu que la périodicité de f_1 en x_{ε_1} ($= t$) implique que toutes les solutions de (31) recoupent Σ tant qu'elles existent. Ce qui précède est aussi valide pour le système moyenné :

$$\dot{x}_1 = 1 \quad , \quad \dot{x}_2 = \varepsilon \bar{f}(x_2) . \quad (32)$$

Supposons que ce système admet $(x_1 + t \pmod{T_0}, y_0)$ comme solution périodique, i.e. y_0 est un point d'équilibre du système moyenné (26). Si les valeurs propres de $\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(y_0)$ sont toutes à partie réelle strictement négative, ce point d'équilibre est asymptotiquement stable. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, si $|y - y_0| < \eta$, la solution

$$Y(t, y, \varepsilon) = X_2(t, (0, y), \varepsilon)$$

est définie sur $[0, +\infty[$. Aussi, d'après la Proposition 8, pour tout $\delta > 0$, il existe ε_{T_0} tel que, pour tout ε dans $[0, \varepsilon_{T_0}[$ et tout y_ε , satisfaisant $|y_\varepsilon - y_0| \leq \delta$, la solution :

$$Y_\varepsilon(t, y_\varepsilon, \varepsilon) = X_{\varepsilon_2}(t, (0, y_\varepsilon), \varepsilon)$$

existe au moins sur $[-T_0, T_0]$. Nous concluons que, pour tout ε dans $[0, \varepsilon_{T_0}[$, tout y satisfaisant $|y - y_0| < \eta$ et tout y_ε satisfaisant $|y_\varepsilon - y_0| < \delta$, les solutions $X(t, (0, y), \varepsilon)$ et $X_\varepsilon(t, (0, y_\varepsilon), \varepsilon)$ recoupe au moins une fois Σ . Nous pouvons donc construire des applications de Poincaré $\bar{P}_\Sigma : \{x_2 : |x_2 - y_0| < \eta\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ associée au système (32) et $P_{\varepsilon\Sigma} : \{x_{\varepsilon_2} : |x_{\varepsilon_2} - y_0| < \delta\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ associée au système (31).

Ces applications ont-elles des points fixes ? Clairement c'est le cas de \bar{P}_Σ puisque par hypothèse :

$$\bar{P}_\Sigma(y_0) = X(T_0, y_0, \varepsilon) = X(t, y_0, \varepsilon) = y_0 \quad \forall t .$$

Pour mettre en évidence un point fixe y_{ε_0} pour $P_{\varepsilon\Sigma}$, commençons par trouver une approximation de cette application. Définissons :

$$\begin{aligned} \bar{Q}(x_2, \varepsilon) &= \int_0^{T_0} \bar{f}(X_2(s, (0, x_2), \varepsilon)) ds , \\ Q_\varepsilon(x_{\varepsilon_2}, \varepsilon) &= \int_0^{T_0} f(s, X_{\varepsilon_2}(s, (0, x_{\varepsilon_2}), \varepsilon), \varepsilon) ds + \varepsilon \int_0^{T_0} f_1(s, X_{\varepsilon_2}(s, (0, x_{\varepsilon_2}), \varepsilon), \varepsilon) ds . \end{aligned} \quad (33)$$

Nous obtenons des fonctions deux fois continûment différentiables pour x_2 et x_{ε_2} voisins de y_0 et ε assez petit. De plus, nous avons :

$$Q_\varepsilon(x_2, 0) = \bar{Q}(x_2, 0) = \int_0^{T_0} f(s, x_2, 0) ds \quad (34)$$

et

$$Q_\varepsilon(y_0, 0) = \bar{Q}(y_0, 0) = 0 . \quad (35)$$

Enfin, de :

$$X_2(T_0, (0, x_2), \varepsilon) = x_2 + \varepsilon \bar{Q}(x_2, \varepsilon) , \quad (36)$$

$$X_{\varepsilon 2}(T_0, (0, x_{\varepsilon 2}), \varepsilon) = x_{\varepsilon 2} + \varepsilon Q_\varepsilon(x_{\varepsilon 2}, \varepsilon) , \quad (37)$$

nous déduisons :

$$\bar{P}_\Sigma(x_2, \varepsilon) = x_2 + \varepsilon \bar{Q}(x_2, \varepsilon) , \quad (38)$$

$$P_{\varepsilon \Sigma}(x_{\varepsilon 2}, \varepsilon) = x_{\varepsilon 2} + \varepsilon Q_\varepsilon(x_{\varepsilon 2}, \varepsilon) . \quad (39)$$

Ainsi, $P_{\varepsilon \Sigma}$ a un point fixe si Q_ε a un zéro. D'après (34), (35) et le Théorème des fonctions implicites, si :

$$\det \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_2}(y_0, 0) \right) \neq 0 , \quad (40)$$

alors, il existe ε_P dans $]0, \varepsilon_{T_0}]$ et une fonction $\varepsilon \in]0, \varepsilon_P] \mapsto y_{\varepsilon 0}(\varepsilon) \in \{x_{\varepsilon 2} : |x_{\varepsilon 2} - y_0| < \delta\}$ continûment différentiable et satisfaisant :

$$y_{\varepsilon 0}(0) = y_0 \quad , \quad P_{\varepsilon \Sigma}(y_{\varepsilon 0}(\varepsilon), \varepsilon) = y_{\varepsilon 0}(\varepsilon) .$$

Pour vérifier si la condition (40) est satisfaite, nous devons exprimer la matrice jacobienne $\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_2}$. De (33), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_2}(y, \varepsilon) &= \int_0^{T_0} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(X_2(s, (0, y), \varepsilon)) \frac{\partial X_2}{\partial x_2}(s, (0, y), \varepsilon) ds \\ &= \int_0^{T_0} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(Y(s, y, \varepsilon)) \frac{\partial Y}{\partial y}(s, y, \varepsilon) ds . \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial Y}{\partial y}(s, y, \varepsilon)$ satisfait :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial Y}{\partial y}(s, y, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(Y(s, y, \varepsilon)) \frac{\partial Y}{\partial y}(s, y, \varepsilon) \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial y}(0, y, \varepsilon) = \text{Id}_{n-1}$$

nous avons :

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_2}(y, \varepsilon) = \frac{\frac{\partial Y}{\partial y}(T_0, y, \varepsilon) - \text{Id}_{n-1}}{\varepsilon} .$$

Au point d'équilibre y_0 , ceci donne simplement :

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_2}(y_0, \varepsilon) = \frac{\exp \left(\varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(y_0) T_0 \right) - \text{Id}_{n-1}}{\varepsilon} .$$

Pour $\varepsilon = 0$, nous avons donc :

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_2}(y_0, 0) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(y_0) T_0 .$$

Ainsi, sous l'hypothèse que les valeurs propres de $\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(y_0)$ sont à partie réelle strictement négative, la condition (40) est satisfaite. Nous avons donc un point fixe pour $P_{\varepsilon \Sigma}$ et donc

une solution périodique pour le système (29) et donc aussi pour le système (25). Nous savons de plus que ces solutions périodiques sont orbitalement asymptotiquement stable avec phase asymptotique si les valeurs propres de $\frac{\partial P_{\varepsilon\Sigma}}{\partial x_2}(y_{\varepsilon 0}(\varepsilon), \varepsilon)$ sont de module strictement inférieur à 1. Nous avons :

$$\frac{\partial P_{\varepsilon\Sigma}}{\partial x_2}(y_{\varepsilon 0}(\varepsilon), \varepsilon) = \text{Id}_{n-1} + \varepsilon \frac{\partial Q_{\varepsilon}}{\partial x_2}(y_{\varepsilon 0}(\varepsilon), \varepsilon)$$

où $\frac{\partial Q_{\varepsilon}}{\partial x_2}(y_{\varepsilon 0}(\varepsilon), \varepsilon)$ est une fonction continue en ε satisfaisant :

$$\frac{\partial Q_{\varepsilon}}{\partial x_2}(y_{\varepsilon 0}(0), 0) = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_2}(y_0, 0) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(y_0) T_0 .$$

Donc, par continuité du plus grand des modules des valeurs propres d'une matrice par rapport aux coefficients de celle-ci et, de nouveau, puisque les valeurs propres de $\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(y_0)$ sont à partie réelle strictement négative, nous voyons qu'il existe $\varepsilon_p \leq \varepsilon_P$ tel que les valeurs propres de $\frac{\partial P_{\varepsilon\Sigma}}{\partial x_2}(y_{\varepsilon 0}(\varepsilon), \varepsilon)$ sont de module strictement inférieur à 1 pour tout ε dans $]0, \varepsilon_p[$.

Pour illustrer cette méthode de moyennisation, considérons un oscillateur harmonique auquel a été ajouté un mécanisme visant à stabiliser asymptotiquement une orbite périodique. Sa dynamique est :

$$\dot{\theta} = \omega \quad , \quad \dot{\omega} = -\theta + \varepsilon(1 - \theta^2)\omega . \quad (41)$$

Pour nous ramener à une dynamique sous la forme standard (25), nous remarquons que, lorsque ε est nul, en dénotant r le module du vecteur (θ, ω) , nous avons :

$$\dot{r} = 0 .$$

Avec ε non nul nous pouvons donc nous attendre à obtenir une équation du type :

$$\dot{r} = \varepsilon \dots$$

et donc un bon candidat pour la forme (25). Ceci motive le passage aux coordonnées polaires :

$$\theta = r \cos(\psi) \quad , \quad \omega = -r \sin(\psi) .$$

Dans ces coordonnées, le système (41) s'écrit :

$$\dot{r} = \varepsilon r [1 - r^2 \cos(\psi)^2] \sin(\psi)^2 \quad , \quad \dot{\psi} = 1 + \varepsilon \sin(\psi) \cos(\psi) [1 - r^2 \cos(\psi)^2] .$$

Pour ε petit et r prenant des valeurs "raisonnables", nous avons $\dot{\psi} > 0$. Avec le Théorème des fonctions implicites, ceci implique l'existence d'un difféomorphisme entre ψ et t le long des solutions ou, en d'autres termes, que nous pouvons utiliser ψ comme paramètre d'évolution à la place de t . Ainsi, nous obtenons la forme standard recherchée :

$$\frac{dr}{d\psi} = \varepsilon \frac{r[1 - r^2 \cos(\psi)^2] \sin^2(\psi)}{1 + \varepsilon \sin(\psi) \cos(\psi) [1 - r^2 \cos(\psi)^2]} = \varepsilon f(r, \psi, \varepsilon) .$$

Puisque la moyenne de $\sin(\psi)^2$ est $\frac{1}{2}$ et celle de $\cos(\psi)^2 \sin(\psi)^2$ est $\frac{1}{4}$, le système moyenné est,

$$\frac{du}{d\psi} = \frac{\varepsilon}{8} u(4 - u^2) .$$

Il admet $u = 0$ et $u = \pm 2$ comme point d'équilibre. Pour le cas $u = 2$, par exemple, l'approximation au premier ordre en ce point est donnée par le coefficient $-\varepsilon$ qui est donc strictement négatif si $\varepsilon > 0$. Ainsi, d'après la Proposition 9, il existe $\varepsilon_p > 0$ et une fonction continûment différentiable $R : \mathbb{S}^1 \times [0, \varepsilon_p] \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant

$$R(\psi, 0) = 2$$

et telle que, pour ε dans $]0, \varepsilon_p]$, $r = R(\psi, \varepsilon)$ est l'orbite d'une solution périodique orbitalement asymptotiquement stable avec phase asymptotique ... Le mécanisme introduit satisfait donc bien l'objectif de stabiliser asymptotiquement une orbite périodique qui est approximativement un cercle de rayon 2, ce qui est difficile à voir d'après l'équation (41).

References

- [Hartman] P. Hartman. *Ordinary differential equations*. Second Edition, Birkhäuser, 1982.
- [Herman] M. Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Publication mathématiques de l'I.H.É.S., tome 49, (1979), p. 5-233.
- [Wiggins] S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Texts in applied mathematics 2. Springer Verlag, 1990.