

**Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris  
Centre Automatique et Systèmes**

35 Rue Saint Honoré, 77305 Fontainebleau Cedex, France

Tel: (1) 64 69 47 14

**Introduction à la théorie de  
la commande adaptative des systèmes linéaires**

*Laurent PRALY*

1ère version : 1988

Révision : 3 novembre 2010



Ces notes ont pour objet une prise de contact avec la théorie de la commande adaptative des systèmes linéaires à temps discret. L'objectif est de montrer au lecteur comment sont construits les algorithmes et quelles propriétés on peut en attendre dans des conditions idéales.



# Table des Matières

<b>Mise en route</b>	<b>1</b>
1 Motivation	1
2 Synthèses d'algorithmes pour un exemple	2
2.1 Paramétrisation explicite	3
2.2 Paramétrisation implicite	8
3 Propriétés de la boucle fermée	10
4 Exercices	12
<b>Plan des Notes</b>	<b>15</b>
<b>1 Paramétrisation</b>	<b>17</b>
1.1 Introduction	17
1.1.1 Modèle	17
1.1.2 État augmenté	17
1.1.3 Problèmes	18
1.1.4 Réduction de l'inobservabilité	18
1.1.5 Réduction de la non linéarité par immersion	19
1.2 Représentation polynomiale en l'opérateur de retard	21
1.3 Paramétrisation explicite	22
1.4 Synthèse de commande et Paramétrisation implicite	23
1.4.1 Modèle de référence	23
1.4.2 Placement de pôles	26
1.4.3 Régulation linéaire quadratique	28
1.5 Exercices	28
<b>2 Estimation des paramètres</b>	<b>35</b>
2.1 Un problème d'observation	35
2.2 Choix du gain d'observation	36
2.3 Un problème de minimisation	42
2.3.1 L'observateur vu comme un minimiseur	42
2.3.2 Équation d'observation non linéaire	43
2.4 Exercices	46
<b>3 Commande adaptative avec paramètres implicites</b>	<b>49</b>
3.1 Modèle de référence	49
3.2 Placement de pôles	55
3.3 Exercices	58
<b>4 Commande adaptative avec paramètres explicites</b>	<b>61</b>
4.1 Placement de pôles	61

<b>5 Compléments sur l'estimation des paramètres</b>	<b>67</b>
5.1 Convergence des paramètres estimés . . . . .	67
5.2 Filtrage des signaux dans l'estimation . . . . .	73
5.3 Algorithme d'estimation avec zone morte . . . . .	73
5.4 Exercices . . . . .	78
<b>6 Étude numérique d'un exemple simple</b>	<b>83</b>
6.1 Le système et son approximation . . . . .	83
6.2 Une commande adaptative . . . . .	83
6.3 Essais numériques . . . . .	86
6.3.1 Tests sur les algorithmes dans le cas sans perturbation . . . . .	87
6.3.2 Tests sur les algorithmes dans le cas avec perturbation . . . . .	87

# Mise en route

## 1 Motivation

Les synthèses modernes de lois de commande performantes requièrent une connaissance très fine du système à commander. Cette connaissance est résumée dans un modèle. L'écriture des modèles les plus précis demandent une compréhension en détail des mécanismes ou processus et utilise les lois de la Physique, de la Chimie, . . . . Les modèles obtenus de cette façon sont dits *modèles de connaissance*. Ils font intervenir des paramètres physiques qui, par définition, sont mesurables par des expériences non nécessairement en rapport avec la façon d'utiliser le système. Par exemple, un système mécanique rigide se paramétrise en termes de masses, de longueurs, d'inerties, . . . Ces paramètres peuvent se mesurer par des expériences ne faisant pas fonctionner le système dans son ensemble. Cependant, dans certains cas pratiques, ces paramètres ne peuvent être évalués a priori. C'est par exemple le cas des caractéristiques mécaniques des corps susceptibles d'être transportés par un bras articulé. Les paramètres doivent alors être estimés pendant le fonctionnement. Par ailleurs, la fiabilité donnée par les modèles de connaissance est en général accompagnée par l'inconvénient d'une trop grande complexité. Ces modèles peuvent ne pas être utilisables en pratique et on doit souvent réduire la complexité. Ceci peut se faire en introduisant des hypothèses sur le mode de fonctionnement et en procédant par agrégation et/ou décomposition par exemple. En conséquence, les paramètres physiques peuvent perdre leur interprétation et donc leur mesurabilité. La valeur qu'on doit leur attribuer dépend alors de la façon d'utiliser le système. Poussant cette démarche à l'extrême, on introduit des modèles paramétrés sans aucune justification physique. Leur but n'est plus d'expliquer mais simplement de représenter le système dans des conditions particulières de fonctionnement. Ces modèles sont dits *modèles de comportement* ou *boîtes noires*. La valeur de leurs paramètres varie avec le point de fonctionnement.

Ceci nous introduit à la notion de *commande adaptative*. Une commande est dite adaptative si elle comporte des paramètres non fixés à l'avance mais modifiés en ligne. Nous avons vu qu'une origine possible pour la présence de paramètres indéterminés dans la loi de commande était leur pré-existence dans le modèle du système pour lequel la commande est conçue. Dans ce cas, on dit que les paramètres sont *explicites*. Mais plus généralement, on peut postuler une loi de commande paramétrée où les paramètres n'ont pas a priori de liens avec un modèle du système. L'exemple le plus typique est le P.I.D. . Dans ce cas, les paramètres sont dits *implicites*. Étendant cette distinction entre ces deux types de paramétrisation :

**Définition :** *On appelle paramètres explicites les paramètres du modèle. On appelle paramètres implicites les paramètres du contrôleur.*

Les paramètres étant définis, de nombreuses méthodes pour déterminer leur valeur peuvent être envisagées :

- *Méthode de l'observateur* : lorsqu'on a choisi une paramétrisation explicite ou obtenu une paramétrisation implicite par une opération dite de reparamétrisation du modèle, les équations de la dynamique du système donnent une équation d'observation des paramètres. Ces paramètres

étant supposés constants, on peut poser le problème de leur mise à jour comme celui de l'observation d'un vecteur d'état, le vecteur des paramètres. On applique alors des techniques d'observateurs. Une telle approche est dite *indirecte* car la technique de mise à jour des paramètres n'est pas directement liée, en général, au critère de commande.

- *Méthode de minimisation* aussi appelée *méthode de sensibilité* : lorsqu'on a une paramétrisation implicite et qu'il est difficile d'interpréter les paramètres comme ceux d'un modèle, on peut les considérer comme argument d'un critère à minimiser. Cette approche est particulièrement intéressante lorsque le critère est lié à l'objectif de commande. Dans ce cas elle est dite *directe*.
- *Méthode de Lyapunov* : lorsqu'on a écrit un contrôleur impliquant des paramètres explicites ou des paramètres implicites, on peut chercher une loi d'adaptation de sorte qu'une fonction positive et propre<sup>1</sup> du vecteur constitué de l'état du système à commander et des paramètres adaptés soit décroissante au cours du temps. Cette méthode est efficace mais on ne peut l'appliquer que dans des cas très particuliers. Nous ne la développerons pas ici (voir Exercice 8). Elle est en général de type direct.

Illustrons les notions générales que nous venons de présenter par un exemple.

## 2 Synthèses d'algorithmes pour un exemple

Soit un système à commander supposé décrit complètement en représentation d'état par le modèle suivant :

$$\begin{cases} X(k+1) = aX(k) + u(k) \\ y(k) = X(k) \end{cases} \quad (1)$$

où  $u$  est la commande,  $y$  est la sortie mesurée et  $a$ , pôle du modèle, est inconnu. Une représentation équivalente sous forme polynômiale observable est :

$$(1 - aq^{-1})y(k) = q^{-1}u(k) \quad (2)$$

$q^{-1}$  étant l'opérateur de retard :

$$q^{-1}y(k) = y(k-1) . \quad (3)$$

Pour objectif de commande, nous choisissons de faire suivre – à quelque chose près – un signal de consigne  $v$  par la sortie  $y$ . Pour notre système du premier ordre (1), un contrôleur proportionnel est suffisant pour satisfaire cet objectif :

$$u(k) = -cy(k) + v(k) \quad (4)$$

où  $c$  est le coefficient de proportionnalité du contrôleur. Le système en boucle fermée satisfait :

$$\begin{cases} (1 + (c-a)q^{-1})y(k) = q^{-1}v(k) , \\ (1 + (c-a)q^{-1})u(k) = (1 - aq^{-1})v(k) . \end{cases} \quad (5)$$

On a donc stabilité exponentielle si et seulement si  $c$  vérifie :

$$|a - c| < 1 . \quad (6)$$

Les méthodes classiques pour choisir  $c$  sont :

---

<sup>1</sup>l'image réciproque d'un compact est compacte.

- *Placement de pôles* : Soit  $a_m$  le pôle désiré pour la boucle fermée, on prend :

$$c = a - a_m . \quad (7)$$

- *Modèle de référence* : On veut que le système en boucle fermée se comporte comme le modèle suivant dit de référence :

$$(1 - a_m q^{-1}) y_m(k) = q^{-1} v(k) . \quad (8)$$

Cet objectif est réalisé en prenant :

$$c = a - a_m . \quad (9)$$

- *Régulation linéaire quadratique* : On veut réguler la sortie à zéro en minimisant le critère :

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \{y(i+1)^2 + r^2 u(i)^2\} . \quad (10)$$

La solution est (voir Exercice 1) :

$$c = \frac{a p}{p + r^2} \quad (11)$$

avec :

$$p = \frac{1 - r^2(1 - a^2) + \sqrt{[1 - r^2(1 - a^2)]^2 + 4r^2}}{2} . \quad (12)$$

La synthèse usuelle de commande linéaire suppose la valeur de  $a$  connue et en déduit celle de  $c$  selon l'une des formules (7), (9) ou (11). Pour la commande adaptative,  $a$  est inconnu.

Les algorithmes de commande adaptative se distinguent par le type de paramétrisation et le type de loi d'adaptation :

- *Paramétrisation explicite* : on choisit de mettre à jour le paramètre  $\theta = a$ , pôle du modèle.
- *Paramétrisation implicite* : on choisit de mettre à jour le paramètre  $\theta = c$ , coefficient de proportionnalité du contrôleur.
- La loi d'adaptation viendra d'un observateur ou d'une minimisation. Elle donnera lieu à une approche directe ou indirecte.

## 2.1 Paramétrisation explicite

Un algorithme de commande adaptative reposant sur une paramétrisation explicite est constitué de deux parties : la commande proprement dite et l'adaptation. La commande est :

$$u(k) = -c(\hat{\theta}(k)) y(k) + v(k) \quad (13)$$

avec le gain  $c$  déduit de l'estimation  $\hat{\theta}(k)$  de  $a$  en appliquant l'une des formules (7), (9) ou (11). Cette technique de remplacement, où l'on ne se préoccupe pas de l'erreur que l'on peut faire, est connue sous le nom de *principe d'équivalence certaine*.

### Méthode de l'observateur

Avec le modèle du système, nous avons supposé l'existence d'un paramètre constant  $\theta$  tel que :

$$y(k) - u(k-1) = y(k-1)\theta . \quad (14)$$

Les équations suivantes sont donc satisfaites par un état  $\theta(k)$  :

$$\begin{cases} \theta(k) = \theta(k-1) \\ y(k) - u(k-1) = y(k-1)\theta(k-1) \end{cases} \quad (15)$$

La théorie des systèmes linéaires nous dit qu'un observateur linéaire pour cet état est :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k) [y(k) - u(k-1) - y(k-1)\hat{\theta}(k-1)] \quad (16)$$

où  $K(k)$  est un gain d'observation typiquement donné par :

$$K(k) = \frac{y(k-1)}{\gamma^2 + y(k-1)^2} \quad (17)$$

et dont une justification est l'équation (20). Cette loi d'adaptation donne lieu à une approche indirecte car le choix du gain d'adaptation ne prend en général pas en compte l'objectif de commande. L'erreur :

$$e(k) = y(k) - u(k-1) - y(k-1)\hat{\theta}(k-1) . \quad (18)$$

qui est utilisée comme entrée de l'observateur est appelée *erreur d'observation* . Dans le cas présent d'observation de paramètre explicite, elle est obtenue en remplaçant, dans l'équation du modèle (14) que nous désirons satisfaire, le paramètre par sa valeur estimée avant sa remise à jour à l'instant  $k$ . Elle est donc égale à ce qui est appelé *erreur d'équation a priori*.

Lorsqu'il existe une valeur de  $\theta$  telle que (14) est effectivement vérifiée, l'erreur d'observation satisfait aussi :

$$e(k) = y(k-1) [\theta - \hat{\theta}(k-1)] . \quad (19)$$

Dans ce cas et avec l'expression (17) du gain d'adaptation, la mise à jour (16) du paramètre estimé devient :

$$\left( \hat{\theta}(k) - \theta \right) = \left( \hat{\theta}(k-1) - \theta \right) - \frac{y(k-1)^2}{\gamma^2 + y(k-1)^2} \left( \hat{\theta}(k-1) - \theta \right) , \quad (20)$$

$$= \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + y(k-1)^2} \left( \hat{\theta}(k-1) - \theta \right) . \quad (21)$$

La suite  $\left\{ \left| \hat{\theta}(\cdot) - \theta \right| \right\}$  est donc décroissante et ceci sans faire aucune hypothèse sur le comportement du système. On voit aussi que plus  $\gamma$  est petit et plus cette décroissance est rapide,  $\gamma$  permet donc de régler la vitesse d'adaptation. Notons enfin que, si<sup>2</sup> il existe un entier  $K$  et un réel strictement positif  $\omega$  tels que, pour tout  $k$ ,

$$\frac{1}{K} \sum_{l=k}^{k+K} y(l)^2 \geq \omega , \quad (22)$$

alors la suite  $\left\{ \left| \hat{\theta}(\cdot) - \theta \right| \right\}$  tend vers 0 exponentiellement, i.e. le paramètre estimé converge exponentiellement vers le paramètre du système. Une convergence a lieu en fait dès que la suite  $\{y(\cdot)\}$  n'est pas de carrés sommables<sup>3</sup>, mais alors elle n'est pas nécessairement exponentielle.

<sup>2</sup>Une suite  $\{y(\cdot)\}$  vérifiant (22) est dite satisfaire une condition d'*excitation persistante*.

<sup>3</sup>Ceci se déduit de l'inégalité :  $\prod_{k=1}^n \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + y(k-1)^2} \leq \exp \left( - \sum_{k=1}^n \frac{y(k-1)^2}{\gamma^2 + y(k-1)^2} \right)$ .

Un inconvénient de l'algorithme (16) où l'erreur d'observation est prise égale à l'erreur d'équation est de ne pas faire intervenir l'aspect dynamique du modèle que l'on cherche à estimer. Ceci renforce le caractère indirect de l'approche. Au lieu de satisfaire une équation à chaque instant, on aimerait que le paramètre estimé donne au modèle un comportement dynamique identique à celui du système réel. Précisément, pour une valeur  $\hat{\theta}$  du paramètre estimé, on peut définir un système modèle associé par :

$$\hat{y}(k) = \hat{\theta} \hat{y}(k-1) + u(k-1) \quad (23)$$

dont  $\hat{y}$  est la sortie. Le fait que  $\hat{\theta}$  soit ou pas une bonne estimation peut alors se voir en comparant sortie réelle  $y$  et sortie modèle  $\hat{y}$ , i.e. :

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k). \quad (24)$$

Ce signal  $\varepsilon$  est appelé *l'erreur de sortie*. En prenant l'erreur de sortie  $\varepsilon(k)$  comme erreur d'observation dans l'algorithme (16), nous obtenons une autre loi d'adaptation :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \widehat{K}_a(k) (y(k) - \hat{y}_a(k)) \\ \hat{y}_a(k) = \hat{\theta}(k-1) \hat{y}_a(k-1) + u(k-1) \end{cases} \quad (25)$$

Ici,  $\hat{y}_a(k)$ , calculée avec  $\hat{\theta}(k-1)$ , est la *sortie modèle a priori*. Cette loi d'adaptation donne encore lieu à une approche indirecte, l'objectif de la commande n'apparaissant toujours pas. L'erreur de sortie a priori correspondante vérifie :

$$\varepsilon_a(k) = y(k) - \hat{y}_a(k), \quad (26)$$

$$= y(k-1)\theta - \hat{y}_a(k-1)\hat{\theta}(k-1), \quad (27)$$

$$= \theta [y(k-1) - \hat{y}_a(k-1)] + \hat{y}_a(k-1) [\theta - \hat{\theta}(k-1)], \quad (28)$$

et donc :

$$\varepsilon_a(k) - \theta \varepsilon_a(k-1) = \hat{y}_a(k-1) [\theta - \hat{\theta}(k-1)]. \quad (29)$$

En comparant avec (19), on voit que l'erreur de sortie  $\varepsilon_a$  est obtenue en filtrant par le système lui-même l'erreur  $\hat{y}_a[\theta - \hat{\theta}]$  qui a une structure semblable à celle de l'erreur d'équation  $e$ . Ceci nous amène à choisir :

$$\widehat{K}_a(k) = \frac{\hat{y}_a(k-1)}{\gamma^2 + \hat{y}_a(k-1)^2}. \quad (30)$$

Dans ce cas, nous pouvons comparer la loi d'adaptation (25) avec l'algorithme (20) dont nous avons noté les bonnes propriétés. Précisément, on peut réécrire (25) sous la forme suivante – lorsque cela a un sens –, à comparer à (21),

$$\left( \hat{\theta}(k) - \theta \right) = \left( \hat{\theta}(k-1) - \theta \right) - \frac{\hat{y}_a(k-1)^2 \frac{\varepsilon_a(k)}{\hat{y}_a(k-1)[\theta - \hat{\theta}(k-1)]}}{\gamma^2 + \hat{y}_a(k-1)^2} \left( \hat{\theta}(k-1) - \theta \right), \quad (31)$$

$$= \frac{\gamma^2 + \hat{y}_a(k-1)^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon_a(k)}{\hat{y}_a(k-1)[\theta - \hat{\theta}(k-1)]} \right)}{\gamma^2 + \hat{y}_a(k-1)^2} \left( \hat{\theta}(k-1) - \theta \right). \quad (32)$$

On en déduit que la suite  $\left\{ \left| \hat{\theta}(\cdot) - \theta \right| \right\}$  est dans ce cas aussi décroissante sans faire d'hypothèses sur le comportement du système si :

$$0 \leq \frac{\varepsilon_a(k)}{\hat{y}_a(k-1)[\theta - \hat{\theta}(k-1)]} \leq 2 \frac{\gamma^2 + \hat{y}_a(k-1)^2}{\hat{y}_a(k-1)^2}. \quad (33)$$

Pour que ces inégalités (33) soient vérifiées, le filtre, mis en évidence en (29), doit être tel que les deux erreurs aient le même signe et que leurs amplitudes soient du même ordre de grandeur.

- L'aspect préservation de signe est liée à une propriété dite de *passivité* comme nous le montrerons au chapitre *Compléments sur l'estimation*. Cette propriété impose en particulier la stabilité du filtre, soit ici (voir Exercice 3) :

$$|\theta| \leq 1. \quad (34)$$

Ainsi, on peut s'attendre à des problèmes lorsque notre loi d'adaptation (25) reposant sur l'erreur de sortie est appliquée à un système instable.

- Pour le problème de limitation de l'amplitude, nous remarquons que plus  $\gamma$  est grand, i.e. plus nous forçons l'adaptation à être lente, et moins cette restriction est contraignante.

En fait pour ce dernier problème, il s'avère qu'un algorithme plus approprié repose sur la *sortie modèle a posteriori* suivante :

$$\widehat{y}_p(k) = \widehat{\theta}(k) \widehat{y}_p(k-1) + u(k-1). \quad (35)$$

Un tel algorithme s'écrirait dans notre cas :

$$\begin{cases} \widehat{\theta}(k) = \widehat{\theta}(k-1) + \widehat{K}_p(k) (y(k) - \widehat{y}_p(k)) \\ \widehat{y}_p(k) = \widehat{\theta}(k) \widehat{y}_p(k-1) + u(k-1) \end{cases} \quad (36)$$

Malheureusement, cette loi d'adaptation ne peut être implémentée sous cette forme. Pour obtenir  $\widehat{\theta}(k)$  il nous faut  $\widehat{y}_p(k)$  qui dépend de  $\widehat{\theta}(k)$ , c'est un système implicite. Une forme équivalente mais implémentable est donnée par :

$$\begin{cases} \widehat{\theta}(k) = \widehat{\theta}(k-1) + \frac{\widehat{K}_p(k)}{1 + \widehat{K}_p(k) \widehat{y}_p(k-1)} (y(k) - \widehat{y}_{ap}(k)) \\ \widehat{y}_{ap}(k) = \widehat{\theta}(k-1) \widehat{y}_p(k-1) + u(k-1) \\ \widehat{y}_p(k) = \widehat{\theta}(k) \widehat{y}_p(k-1) + u(k-1) \end{cases} \quad (37)$$

avec par exemple :

$$\widehat{K}_p(k) = \frac{\widehat{y}_p(k-1)}{\gamma^2}. \quad (38)$$

Comme pour l'erreur de sortie a priori, l'erreur de sortie a posteriori définie par :

$$\varepsilon_p(k) = y(k) - \widehat{y}_p(k), \quad (39)$$

vérifie :

$$\varepsilon_p(k) - \theta \varepsilon_p(k-1) = \widehat{y}_p(k-1) [\theta - \widehat{\theta}(k)]. \quad (40)$$

Dans ce cas encore, l'erreur de sortie a posteriori est obtenue en filtrant par le système lui-même. De plus, la loi d'adaptation (37) (ou plus exactement sa forme équivalente (36)) nous donne – lorsque cela a un sens – :

$$\left( \widehat{\theta}(k) - \theta \right) = \left( \widehat{\theta}(k-1) - \theta \right) - \widehat{K}_p(k) \widehat{y}_p(k-1) \frac{\varepsilon_p(k)}{\widehat{y}_p(k-1) [\theta - \widehat{\theta}(k)]} \left( \widehat{\theta}(k) - \theta \right) \quad (41)$$

$$= \frac{1}{1 + \widehat{K}_p(k) \widehat{y}_p(k-1) \frac{\varepsilon_p(k)}{\widehat{y}_p(k-1) [\theta - \widehat{\theta}(k)]}} \left( \widehat{\theta}(k-1) - \theta \right). \quad (42)$$

Ainsi, en choisissant le gain d'adaptation  $\widehat{K}_p$  de même signe que  $\widehat{y}_p$ , la suite  $\left\{ \left| \widehat{\theta}(\cdot) - \theta \right| \right\}$  sera dans ce cas aussi décroissante si :

$$0 \leq \frac{\varepsilon_p(k)}{\widehat{y}_p(k-1)[\theta - \widehat{\theta}(k)]} . \quad (43)$$

Donc le filtre doit toujours satisfaire une propriété de préservation de signe, ou plus généralement de passivité (voir Exercice 4), ce qui impose en particulier sa stabilité – et donc celle du système que l'on veut identifier –. Par contre, il n'y a plus de contrainte sur l'amplitude et par voie de conséquence plus de limitation sur la vitesse d'adaptation.

### Méthode de minimisation

Une deuxième méthode pour obtenir une estimation du paramètre  $\widehat{\theta}$  est de le chercher dans l'argument du minimum d'un critère  $J(k, \widehat{\theta})$ . Plus précisément, on obtient un algorithme itératif en adoptant par exemple une *méthode de gradient* :

$$\widehat{\theta}(k) = \widehat{\theta}(k-1) - \rho(k) \frac{\partial J}{\partial \widehat{\theta}}(k, \widehat{\theta}(k-1)) . \quad (44)$$

Nous insistons sur le fait qu'une seule itération de gradient est effectuée à chaque instant alors que le critère à minimiser est modifié à chaque instant.

Prenons par exemple pour critère le carré de l'erreur d'équation :

$$J(k, \widehat{\theta}) = \frac{1}{2} \left[ y(k) - \widehat{\theta} y(k-1) - u(k-1) \right]^2 . \quad (45)$$

Ce critère n'étant pas lié à un objectif de commande, il donnera lieu à une approche indirecte. L'équation (44) donne alors la loi d'adaptation suivante :

$$\widehat{\theta}(k) = \widehat{\theta}(k-1) + \rho(k) y(k-1) \left[ y(k) - u(k-1) - \widehat{\theta}(k-1) y(k-1) \right] . \quad (46)$$

Ainsi, en prenant :

$$\rho(k) = \frac{1}{\gamma^2 + y(k-1)^2} , \quad (47)$$

on obtient le même algorithme que celui donné par la méthode de l'observateur avec l'erreur d'observation.

Si le critère est le carré de l'erreur de sortie, le calcul du gradient est un peu plus complexe : Notons  $\widehat{y}(k, \widehat{\theta})$  la sortie modèle obtenue avec le paramètre (constant)  $\widehat{\theta}$  :

$$\widehat{y}(k, \widehat{\theta}) = \widehat{\theta} \widehat{y}(k-1, \widehat{\theta}) + u(k-1) . \quad (48)$$

L'erreur de sortie étant :

$$\varepsilon(k, \widehat{\theta}) = y(k) - \widehat{y}(k, \widehat{\theta}) , \quad (49)$$

son gradient en  $\widehat{\theta}$  se déduit de celui de  $\widehat{y}(k, \widehat{\theta})$ . On a :

$$\frac{\partial \widehat{y}}{\partial \widehat{\theta}}(k, \widehat{\theta}) = \widehat{\theta} \frac{\partial \widehat{y}}{\partial \widehat{\theta}}(k-1, \widehat{\theta}) + \widehat{y}(k-1, \widehat{\theta}) , \quad \frac{\partial \widehat{y}}{\partial \widehat{\theta}}(0, \widehat{\theta}) = 0 . \quad (50)$$

Malheureusement cette expression fait intervenir  $\widehat{y}(k-1, \widehat{\theta})$  que nous ne connaissons pas. Rappelons en effet que  $\widehat{y}(k-1, \widehat{\theta})$  est la sortie à l'instant  $k-1$  du modèle obtenue en prenant le paramètre à la valeur constante  $\widehat{\theta}$ . En pratique, ceci signifie que, pour toute nouvelle valeur  $\widehat{\theta}(i)$  pour  $\widehat{\theta}$ , la sortie modèle  $\widehat{y}(i, \widehat{\theta}(i))$  à l'instant  $i$ , évalué à ce point  $\widehat{\theta}(i)$ , doit être obtenu en re-simulant le système (50) depuis l'instant 0 en utilisant cette valeur particulière  $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(i)$ . Ceci n'est pas possible en temps réel.

Cependant, si la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  n'a pas trop changé depuis la valeur initiale  $\hat{\theta}(0)$ , on peut espérer que la sortie modèle  $\hat{y}(k-1)$  est une bonne approximation de  $\hat{y}(k-1, \hat{\theta}(k-1))$ . De même dans (50), le paramètre  $\hat{\theta}$  qui multiplie  $\frac{\partial \hat{y}}{\partial \theta}(k-1, \hat{\theta})$  ne doit pas varier avec  $k$ . Encore une fois, si  $\hat{\theta}(k-1)$  n'a pas trop changé depuis la valeur initiale  $\hat{\theta}(0)$ , on peut espérer obtenir une bonne approximation en remplaçant simplement  $\hat{\theta}$  par  $\hat{\theta}(k-1)$  – ou  $\hat{\theta}(k)$  –. On obtient ainsi l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + \rho(k) g_a(k) (y(k) - \hat{y}_a(k)) \\ \hat{y}_a(k) &= \hat{\theta}(k-1) \hat{y}_a(k-1) + u(k-1) \\ g_a(k) &= \hat{\theta}(k-1) g_a(k-1) + \hat{y}_a(k-1) \end{cases} \quad (51)$$

où par exemple :

$$\rho(k) = \frac{1}{\gamma^2 + g_a(k)^2} . \quad (52)$$

Remarquons qu'ici gradient et sortie sont obtenus avec la valeur a priori  $\hat{\theta}(k-1)$  (voir Exercice 6). Comparé à l'algorithme donné par la méthode de l'observateur avec l'erreur de sortie a priori, on voit que la différence est dans le gain d'adaptation qui est obtenu à partir de  $g_a$ , version filtrée du gain  $\hat{y}_a$ . On peut donc s'attendre aux mêmes problèmes : stabilité et passivité du système à commander, adaptation lente, ...

## 2.2 Paramétrisation implicite

Le paramètre impliqué est celui du contrôleur. À l'inverse de la précédente, cette paramétrisation peut permettre de faire intervenir dans la loi d'adaptation ce pour quoi est destiné le contrôleur et donc donner lieu à une méthode directe. Dans ce qui suit, nous traitons le cas du modèle de référence.

### Méthode de l'observateur

Pour obtenir une équation d'observation du paramètre  $c$  du contrôleur, effectuons l'opération appelée *reparamétrisation* :

Puisque, pour résoudre le problème du modèle de référence, il faut prendre (voir (9)) :

$$\theta = c = a - a_m , \quad (53)$$

avec l'équation du système (2), nous obtenons :

$$y(k) - a_m y(k-1) - u(k-1) = y(k-1) \theta . \quad (54)$$

Cette équation d'observation de  $\theta$  nous permet de proposer l'observateur suivant :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{y(k-1)}{\gamma^2 + y(k-1)^2} \left[ y(k) - a_m y(k-1) - u(k-1) - y(k-1) \hat{\theta}(k-1) \right] . \quad (55)$$

L'erreur d'observation est ici :

$$e(k) = y(k) - a_m y(k-1) - u(k-1) - y(k-1) \hat{\theta}(k-1) \quad (56)$$

$$= y(k-1) [\theta - \hat{\theta}(k-1)] . \quad (57)$$

Cette deuxième équation n'étant vraie que s'il existe effectivement une valeur  $\theta$  satisfaisant (54). Par ailleurs, si la commande est donnée par (à partir de (4)) :

$$u(k) = -\hat{\theta}(k) y(k) + v(k) , \quad (58)$$

cette erreur d'observation est aussi égale à l'erreur d'équation associée au modèle de référence, i.e. nous avons :

$$e(k) = y(k) - a_m y(k-1) - v(k-1) . \quad (59)$$

Ceci démontre le caractère direct de l'approche obtenue.

Pour utiliser une erreur de sortie, on note que la sortie modèle n'est rien d'autre que celle du modèle de référence :

$$y_m(k) = a_m y_m(k-1) + v(k-1) . \quad (60)$$

L'erreur de sortie associée est donc :

$$\varepsilon_a(k) = y(k) - y_m(k) . \quad (61)$$

On obtient alors l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{y(k-1)}{\gamma^2 + y(k-1)^2} (y(k) - y_m(k))4, \\ y_m(k) = a_m y_m(k-1) + v(k-1) . \end{cases} \quad (62)$$

Avec (58), on remarque que l'erreur de sortie  $\varepsilon_a$  vérifie :

$$\varepsilon_a(k) - a_m \varepsilon_a(k-1) = y(k-1) [\theta - \hat{\theta}(k-1)] . \quad (63)$$

Encore une fois l'erreur de sortie est obtenue en filtrant l'erreur d'équation. Mais cette fois, le filtre est le modèle de référence que l'on peut toujours choisir pour satisfaire aux contraintes de stabilité et de passivité que nous avons mentionnées à la fin de la section 2.1. Par contre, la présence de  $\hat{\theta}(k-1)$  dans (63) nous montre que nous travaillons en fait avec une erreur de sortie a priori. On peut ainsi s'attendre à des problèmes si la vitesse d'adaptation effective est trop grande (voir Exercice 7).

### Méthode de minimisation

Prenons par exemple pour critère le carré de l'erreur d'équation associée au modèle de référence :

$$J(k, \hat{\theta}) = \frac{1}{2} e(k, \hat{\theta})^2 \quad (64)$$

avec :

$$e(k, \hat{\theta}) = y(k, \hat{\theta}) - a_m y(k-1, \hat{\theta}) - v(k-1) . \quad (65)$$

Ce critère étant le critère de commande, nous obtiendrons une approche directe. Son gradient est :

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}}(k, \hat{\theta}) = e(k, \hat{\theta}) \left[ \frac{\partial y}{\partial \hat{\theta}}(k, \hat{\theta}) - a_m \frac{\partial y}{\partial \hat{\theta}}(k-1, \hat{\theta}) \right] . \quad (66)$$

Par ailleurs, la loi de commande étant :

$$u(k, \hat{\theta}) = -\hat{\theta} y(k, \hat{\theta}) + v(k) , \quad (67)$$

nous avons :

$$y(k, \hat{\theta}) = (a - \hat{\theta}) y(k-1, \hat{\theta}) + v(k-1) . \quad (68)$$

On peut donc calculer :

$$\frac{\partial y}{\partial \hat{\theta}}(k, \hat{\theta}) = (a - \hat{\theta}) \frac{\partial y}{\partial \hat{\theta}}(k-1, \hat{\theta}) - y(k-1, \hat{\theta}) . \quad (69)$$

Malheureusement cette expression fait intervenir  $a$  et  $y(k-1, \hat{\theta})$  que nous ne connaissons pas. Pour approximer  $a$ , on remarque que la valeur optimale de  $\hat{\theta}$  est  $a - a_m$ . Pour approximer  $y(k-1, \hat{\theta})$ , nous prenons  $y(k-1)$  en supposant que  $\hat{\theta}(k-1)$  n'a pas trop changé depuis la valeur initiale  $\hat{\theta}(0)$ . Nous obtenons ainsi  $g(k)$ , approximation du gradient  $\frac{\partial y}{\partial \theta}(k, \hat{\theta}(k))$  :

$$g(k) = a_m g(k-1) - y(k-1) . \quad (70)$$

L'algorithme de gradient lié à l'erreur d'équation est alors :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \rho(k) y(k-1) (y(k) - a_m y(k-1) - v(k-1)) . \quad (71)$$

Avec un choix approprié de  $\rho(k)$ , on obtient donc le même algorithme que celui donné par la méthode de l'observateur.

De façon similaire, on obtient l'algorithme de gradient lié à l'erreur de sortie :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) - \rho(k) g(k) (y(k) - y_m(k)) \\ g(k) = a_m g(k-1) - y(k-1) \\ y_m(k) = a_m y_m(k-1) + v(k-1) \end{cases} \quad (72)$$

Ici encore, le gain  $g$  est une version filtrée du gain donné par la méthode de l'observateur avec l'erreur de sortie.

### 3 Propriétés de la boucle fermée

Étudions les propriétés de la boucle fermée que l'on obtient en utilisant l'une des commandes adaptatives définies ci-dessus. Rappelons les équations :

- le système :

$$y(k) = a y(k-1) + u(k-1) . \quad (73)$$

- la loi de commande :

$$u(k) = -c(\hat{\theta}(k)) y(k) + v(k) , \quad (74)$$

où :

- la suite  $\{v(\cdot)\}$  est la suite de commande de la boucle fermée. Elle est au moins bornée.
- la fonction  $c(\hat{\theta})$  est donnée, dans le cas d'une paramétrisation explicite, par l'une des formules (7), (9) ou (11) où  $a$  est remplacé par sa valeur estimée  $\hat{\theta}$  ou, dans le cas d'une paramétrisation implicite, égale à  $\hat{\theta}$ . Dans ces deux cas, on a (voir (6)) :

$$|a - c(\theta)| = \rho < 1 , \quad (75)$$

$\theta$  désignant le paramètre implicite ou explicite. De plus la fonction  $c$  est localement Lipschitzienne et donc, pour tout compact  $\Theta$  de  $\mathbb{R}$ , il existe un réel  $C$  tel que :

$$|c(\hat{\theta}_1) - c(\hat{\theta}_2)| \leq C |\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2| \quad \forall (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \in \Theta^2 . \quad (76)$$

- la loi d'adaptation :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \mathcal{O}(k, \hat{\theta}(k-1)) . \quad (77)$$

où  $\mathcal{O}$  est l'une des expressions données par (16), (25), (37), (44) ou .... Cependant, le seul cas où nous avons pu mettre assez simplement en évidence des propriétés de la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  est

le cas où cette loi d'adaptation est donnée par un observateur utilisant une erreur d'équation. Dans ce cas, (77) donne, avec  $\theta$  le paramètre explicite ou implicite :

$$\left[ \widehat{\theta}(k) - \theta \right] = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + y(k-1)^2} \left[ \widehat{\theta}(k-1) - \theta \right]. \quad (78)$$

On en déduit :

$$\left[ \widehat{\theta}(k) - \theta \right]^2 = \left[ \widehat{\theta}(k-1) - \theta \right]^2 - \frac{2\gamma^2 + y(k-1)^2}{\gamma^4} \left[ y(k-1) \left( \widehat{\theta}(k) - \theta \right) \right]^2, \quad (79)$$

$$= \left[ \widehat{\theta}(k-1) - \theta \right]^2 - \frac{2\gamma^2 + y(k-1)^2}{y(k-1)^2} \left[ \widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-1) \right]^2, \quad (80)$$

et donc, par sommation :

**P1** : la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$  est bornée,

**P2** : la suite  $\{(\widehat{\theta}(\cdot) - \theta)y(\cdot - 1)\}$  est de carrés sommables,

**P3** : la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot) - \widehat{\theta}(\cdot - 1)\}$  est de carrés sommables.

En regroupant (73) et (74), nous obtenons :

$$y(k) = [a - c(\theta)]y(k-1) + [c(\theta) - c(\widehat{\theta}(k))]y(k-1) + [c(\widehat{\theta}(k)) - c(\widehat{\theta}(k-1))]y(k-1) + v(k-1). \quad (81)$$

Avec la propriété P1, nous pouvons utiliser l'inégalité (76) avec une certaine constante  $C$ . Alors, avec (75), nous déduisons :

$$|y(k)| \leq \left[ \rho + C|\widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-1)| \right] |y(k-1)| + C|\delta(k)| + |v(k)|, \quad (82)$$

où la suite  $\{\delta(\cdot)\}$ , définie par :

$$\delta(k) = \left( \widehat{\theta}(k) - \theta \right) y(k-1), \quad (83)$$

est de carrés sommables d'après la propriété P2. Avec la propriété P3, il existe un instant  $k_0$  tel que, pour tout  $k \geq k_0$ , on ait :

$$\rho + C|\widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-1)| \leq \frac{1+\rho}{2} < 1 \quad (84)$$

et donc :

$$|y(k)| \leq \frac{1+\rho}{2} |y(k-1)| + C|\delta(k)| + |v(k)| \quad (85)$$

Puisque les suites  $\{\delta(\cdot)\}$  et  $\{v(\cdot)\}$  sont bornées, on en déduit la bornitude de la suite  $\{y(\cdot)\}$ . Revenant alors à (81), ceci nous permet de conclure que la suite  $\{\eta(\cdot)\}$ , définie par :

$$\eta(k) = y(k) - [a - c(\theta)]y(k-1) - v(k-1), \quad (86)$$

est de carrés sommables. Ainsi asymptotiquement, on obtient le comportement désiré (voir (5)) :

$$y(k) = [a - c(\theta)]y(k-1) + v(k-1). \quad (87)$$

Cependant il est d'une extrême importance de remarquer que, dans le cas de la commande linéaire classique, la convergence vers ce comportement est de type exponentiel alors qu'ici il n'est que celui d'une suite de carrés sommables. De cette trop faible propriété de convergence résultent de nombreux problèmes de sensibilité aux perturbations. Voir l'Exercice 9. Ceci impose en fait des modifications à apporter aux algorithmes de base que nous avons décrits.

## 4 Exercices

**1** Pour l'exemple (1) de système du premier ordre, en supposant que le contrôleur optimal est de la forme :

$$u(k) = -c y(k) + v(k) , \quad (88)$$

montrer que le critère :

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \{y(i+1)^2 + r^2 u(i)^2\} \quad (89)$$

est minimisé si  $c$  est donné par l'expression (11). Pour cela, on montrera que, pour toute valeur de  $c$  vérifiant :

$$|a - c| < 1 , \quad (90)$$

le critère s'écrit :

$$J = [(a - c)^2 + r^2 c^2] \frac{1}{1 - (a - c)^2} y(0)^2 . \quad (91)$$

**2** Pour l'exemple (1) de système du premier ordre, écrire une loi de régulation linéaire quadratique adaptative reposant sur une paramétrisation explicite et la méthode de l'observateur appliquée à l'erreur d'équation.

**3** Considérons le système :

$$\varepsilon(k) = \theta \varepsilon(k - 1) + u(k) . \quad (92)$$

On dit qu'il est passif si : pour toute condition initiale  $\varepsilon(0)$ , il existe un réel  $\beta$  tel que pour toute suite de commande  $\{u(\cdot)\}$  et tout instant  $k$  on ait :

$$\sum_{i=1}^k u(i)\varepsilon(i) \geq \beta . \quad (93)$$

Montrer que pour le système (92), une condition nécessaire et suffisante pour que (93) soit satisfaite est :

$$|\theta| \leq 1 . \quad (94)$$

Pour ce faire on remarquera

– d'une part :

$$u(k)\varepsilon(k) = \varepsilon(k)^2 - \theta \varepsilon(k - 1)\varepsilon(k) \quad (95)$$

$$\geq \left(1 - \frac{a|\theta|}{2}\right) \varepsilon(k)^2 - \frac{|\theta|}{2a} \varepsilon(k - 1)^2 \quad (96)$$

où  $a$  est un nombre réel strictement positif quelconque qui peut être choisi tel que :

$$\left(1 - \frac{a|\theta|}{2}\right) \geq \frac{|\theta|}{2a} \quad (97)$$

si et seulement si  $|\theta| \leq 1$ .

– d'autre part que pour  $|\theta| > 1$ , (93) n'est pas satisfait par :

$$u(k) = -\frac{|\theta|}{2} \text{signe}\{\theta\}^k , \quad \varepsilon(0) = 1 . \quad (98)$$

4 Considérons la loi d'adaptation suivante :

$$\widehat{\theta}(k) = \widehat{\theta}(k-1) + \frac{y(k-1)}{\gamma^2} \varepsilon_p(k) \quad (99)$$

où la suite  $\{\varepsilon_p(\cdot)\}$  est reliée à la suite  $\{y(\cdot-1) [\theta - \widehat{\theta}(\cdot)]\}$  de sorte que la propriété suivante soit satisfaite pour tout  $k$  :

$$\sum_{i=1}^k \left[ \left( y(i-1) [\theta - \widehat{\theta}(i)] \right) \varepsilon(i) - \gamma_u^2 \left( y(i-1) [\theta - \widehat{\theta}(i)] \right)^2 - \gamma_\varepsilon^2 \varepsilon(i)^2 \right] \geq \beta . \quad (100)$$

Montrer que la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$  est bornée et que les suites  $\{\gamma_u (y(\cdot-1) [\theta - \widehat{\theta}(\cdot)])\}$  et  $\{\gamma_\varepsilon (\varepsilon(\cdot))\}$  sont de carrés sommables. Pour cela, on réécrira (99) sous la forme :

$$\left[ \widehat{\theta}(k) - \theta \right] - \frac{y(k-1)}{\gamma^2} \varepsilon_p(k) = \left[ \widehat{\theta}(k-1) - \theta \right] \quad (101)$$

et on sommerera les carrés.

5 Pour l'exemple (1) de système du premier ordre, écrire une loi de commande linéaire adaptative reposant sur une paramétrisation implicite et la méthode de minimisation appliquée au critère :

$$J(k, \widehat{\theta}) = \sum_{i=0}^k \left( y(i, \widehat{\theta}) - y_m(i) \right)^2 . \quad (102)$$

6 Pour l'exemple (1) de système du premier ordre, écrire d'autres versions de l'algorithme (51) utilisant valeurs a priori et/ou valeurs a posteriori.

7 Pour l'exemple (1) de système du premier ordre, écrire une version de l'algorithme (62) utilisant une erreur de sortie a posteriori. Pour cela, en utilisant (54), on écrira l'algorithme suivant de façon explicite ne faisant pas intervenir  $\theta$  :

$$\widehat{\theta}(k) = \widehat{\theta}(k-1) + K_p(k) \varepsilon_p(k) \quad (103)$$

où le gain d'adaptation  $K_p(k)$  est de même signe que  $y(k-1)$  et l'erreur  $\varepsilon_p$  vérifie :

$$\varepsilon_p(k) - a_m \varepsilon_p(k-1) = y(k-1) [\theta - \widehat{\theta}(k)] . \quad (104)$$

8 *Méthode de Lyapunov* : Illustrons cette méthode en obtenant un placeur de pôle adaptatif pour le système à commander suivant :

$$y(k+1) = a y(k) + u(k) \quad (105)$$

où la valeur de  $a$  est inconnue. Prenons le régulateur :

$$u(k) = -\widehat{\theta}(k) y(k) . \quad (106)$$

Notre problème est de déterminer  $\Delta(k)$  tel que, en choisissant :

$$\widehat{\theta}(k+1) = \widehat{\theta}(k) + \Delta(k) , \quad (107)$$

on obtienne une régulation asymptotique :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(k+1) - a_m y(k) = 0 \quad (108)$$

où  $a_m$  est le pôle désiré. Pour cela, on considère la fonction :

$$V(k) = \frac{1 - a_m^2}{2} \text{Log}(\gamma^2 + y(k)^2) + \left( \hat{\theta}(k) - (a + a_m) \right)^2 \quad (109)$$

8.1. Calculer la différence  $V(k+1) - V(k)$  en utilisant les équations (105), (106) et (107) et donc en particulier :

$$y(k+1) = a_m y(k) - \left( \hat{\theta}(k) - (a + a_m) \right) y(k) . \quad (110)$$

8.2. En déduire une inégalité suffisante sur  $\Delta(k)$  pour que cette différence soit négative. Pour cela on utilisera l'inégalité suivante :

$$\text{Log}(\gamma^2 + a^2) - \text{Log}(\gamma^2 + b^2) \leq \frac{a^2 - b^2}{\gamma^2 + b^2} . \quad (111)$$

8.3. Proposer une expression de  $\Delta(k)$  ne faisant pas intervenir  $a$  et vérifiant cette inégalité. Pour cela, en notant avec (105) que, en multipliant  $a$  par  $y(k)$ , on obtient une expression indépendante de  $a$ , on choisira  $\Delta(k)$  de la forme  $\alpha(k) \left( \hat{\theta}(k) - (a + a_m) \right) y(k)^2$ , avec  $\alpha(k)$  à déterminer.

8.4. Quelles propriétés peut-on en déduire pour le modèle de référence adaptatif utilisant la récurrence (16) comme loi d'adaptation?

**9** Considérons le cas où une perturbation  $\{d(\cdot)\}$  agit sur le système réel comme dans :

$$y(k) = a y(k-1) + u(k-1) + d(k) \quad (112)$$

et où nous prenons une commande adaptative avec un paramètre explicite ayant pour objectif le modèle de référence :

$$y_m(k) = 0 \quad (113)$$

i.e. la commande :

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + \frac{y(k-1)}{1 + y(k-1)^2} y(k) , \\ u(k) &= -\hat{\theta}(k) y(k) . \end{cases} \quad (114)$$

9.1. Supposons pour le moment qu'il existe une suite  $\{d(\cdot)\}$  telle que la sortie est :

$$y(0) = 1 \quad , \quad y(k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \forall k \geq 1 . \quad (115)$$

Montrer que la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  correspondante est non bornée. Pour cela, on pourra utiliser les inégalités :

$$\log\left(\frac{k}{K+1}\right) \leq \sum_{i=K}^k \frac{1}{i} \leq \log\left(\frac{k-1}{K}\right) , \quad (116)$$

et montrer que, pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un entier  $K$  tel que nous avons :

$$\left(1 - \frac{2}{K}\right) \log\left(\frac{k}{K+1}\right) + \hat{\theta}(K) \leq \hat{\theta}(k) \leq \hat{\theta}(K) + \log\left(\frac{k-1}{K}\right) . \quad (117)$$

9.2. Donner une expression pour la suite  $\{d(\cdot)\}$  en fonction de  $\hat{\theta}(0)$  et montrer qu'elle n'est pas de carrés mais de cubes sommables, i.e. dans  $\ell^3$ .

# Plan des Notes

L'objet des chapitres suivants est de donner, dans des conditions plus générales, des méthodes systématiques pour obtenir les algorithmes donnés pour l'exemple de la section précédente et d'étudier les propriétés des boucles fermées ainsi obtenues.

Nous avons remarqué qu'une forme générale des algorithmes d'adaptation du vecteur des paramètres  $\theta$  est :

$$\widehat{\theta}(k) = \widehat{\theta}(k-1) + \Gamma(k)Z_f(k)e_f(k) \quad (1)$$

où  $\Gamma(k)$  est une matrice orientant le gain d'adaptation et les signaux  $Z_f$  et  $e_f$  sont obtenus en filtrant un vecteur  $Z$  :

$$D_Z(q^{-1})Z_f(k) = N_Z(q^{-1})Z(k), \quad D_e(q^{-1})e_f(k) = N_e(q^{-1})[Z(k)^t(\theta - \widehat{\theta}(k-1))], \quad (2)$$

$D_Z$  et  $N_Z$  étant des matrices polynômiales et  $D_e$  et  $N_e$  des polynômes. Au chapitre *Estimation des paramètres*, nous étudierons l'algorithme de base où  $D_Z$  et  $N_Z$  sont la matrice identité et  $D_e$  et  $N_e$  sont l'unité. Au chapitre *Compléments sur l'estimation* nous étudierons entre autres choses l'effet des filtres  $D_Z^{-1}N_Z$  et  $N_e/D_e$ .

Cet algorithme de base est donné par la méthode de l'observateur. Celle-ci utilise la propriété que le vecteur des paramètres que l'on cherche est constant et vérifie l'équation suivante, dite équation d'observation :

$$z(k) = Z(k)^T \theta \quad (3)$$

où  $Z$ , mentionné ci-dessus, et  $z$  sont obtenus à partir des signaux d'entrées-sorties et/ou de la consigne. Nous verrons au chapitre *Paramétrisation* que l'outil approprié pour obtenir cette équation est la représentation polynômiale des systèmes linéaires. Au cours de ce chapitre nous rappellerons quelques méthodes de synthèse de contrôleurs.

L'objet du chapitre *Commande directe* est d'indiquer sous forme générale les algorithmes liés à une paramétrisation directe et d'énoncer et de démontrer les propriétés qu'ils confèrent à la boucle fermée. Enfin, le chapitre *Commande indirecte* est dédié au même sujet pour la paramétrisation indirecte.

Nous voulons enfin insister sur l'importance des exercices que nous avons ajouté à la fin de chaque chapitre. Ils contiennent :

- soit des développements permettant une meilleure compréhension de ces notes,
- soit des compléments qui, bien que très importants, auraient pu détourner l'attention du lecteur si nous les avions présentés dans le corps de ce texte,
- soit des informations supplémentaires essentielles pour les applications.



# Chapitre 1

## Paramétrisation

L'objectif de ce chapitre est de montrer comment obtenir une équation d'observation du vecteur des paramètres  $\theta$  de la forme :

$$z(k) = Z(k)^\top \theta . \quad (1.1)$$

Différentes solutions vont être proposées selon que l'on s'intéresse à une paramétrisation explicite ou à une paramétrisation implicite et selon l'objectif de la commande.

### 1.1 Introduction

**Définition 1.1** *Étant donnée une famille  $\mathcal{M}$  de modèles, on appelle paramétrisation une application :  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{M}$  qui, à un vecteur de paramètres  $\theta$ , associe un modèle  $M$ .*

$$\theta \mapsto M$$

#### 1.1.1 Modèle

La famille de modèles, que nous considérons dans ces notes, est celle des modèles linéaires stationnaires à temps discret, d'ordre fini  $n$  donné et ayant une commande et une sortie. On peut les représenter par :

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= A X(k) + B u(k) , & X(0) &= X_0 \\ y(k) &= C X(k) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

où :  $u$  est la commande dans  $\mathbb{R}$ ,

$y$  est la sortie mesurée dans  $\mathbb{R}$ ,

$X$  est l'état dans  $\mathbb{R}^n$  et  $X_0$  est sa valeur initiale,

$A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices de dimensions appropriées.

Pour de tels systèmes, on peut prendre comme paramétrisation explicite l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n \times 1} \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{1 \times n} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ \theta = (B, A, C) &\mapsto M \end{aligned}$$

#### 1.1.2 État augmenté

Un état est, par définition, toute l'information dont on a besoin à un instant donné pour pouvoir prédire le comportement futur, connaissant la commande. Le vecteur  $X(k)$  n'est donc pas l'état

du système (1.2) puisqu'il manque la connaissance des matrices  $B$ ,  $A$ ,  $C$ . L'état de ce système est en fait le couple  $(\theta, X)$ , dit *état augmenté* pour éviter toute confusion. Sachant que les matrices  $B$ ,  $A$ ,  $C$  sont constantes, une représentation d'état des équations (1.2) du modèle  $M$  est de la forme :

$$\left. \begin{aligned} A(k+1) &= A(k) & , & & A(0) &= A_0 \\ B(k+1) &= B(k) & , & & B(0) &= B_0 \\ C(k+1) &= C(k) & , & & C(0) &= C_0 \\ X(k+1) &= A(k)X(k) + B(k)u(k) & , & & X(0) &= X_0 \\ y(k) &= C(k)X(k) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

### 1.1.3 Problèmes

Cette écriture du modèle  $M$  avec son état augmenté fait ressortir deux types de problèmes :

1. *L'état augmenté est non observable* : en effet, étant données les suites de commande  $\{u(\cdot)\}$  et de sortie  $\{y(\cdot)\}$ , on sait que toutes les représentations d'état (au sens usuel) minimales de la relation entrée-sortie sont équivalentes. Ainsi, si  $(B, A, C)$  est une représentation minimale d'état  $X$ , alors, pour toute matrice non singulière  $P$ , l'état augmenté  $(PB, PAP^{-1}, CP^{-1}, PX)$  donne le même couple entrée-sortie. C'est à dire que tous les états de l'ensemble :

$$\{(PB, PAP^{-1}, CP^{-1}, PX) \mid P \text{ non singulière}\}$$

sont indistinguables. Pour contourner cette difficulté, nous devons supprimer les degrés de liberté introduits par la matrice de changement de base  $P$  en imposant une base pour  $X$ . Ceci reviendra à choisir une représentation d'état particulière et pour cela les formes canoniques observable, observateur, commandable ou contrôleur sont de bons candidats.

2. *Le système  $M$  est bilinéaire en l'état augmenté.*

### 1.1.4 Réduction de l'inobservabilité

En restreignant la famille  $\mathcal{M}$  aux modèles observables, et donc en se plaçant en dehors de la singularité liée à une perte de rang de la matrice d'observabilité, on peut, par changement de base sur leur état  $X$ , réécrire  $M$  sous *forme observateur*, i.e. :

$$\begin{aligned} a_i(k+1) &= a_i(k) \quad , \quad a_i(0) = a_{i0} \quad i = 1, n \\ b_i(k+1) &= b_i(k) \quad , \quad b_i(0) = b_{i0} \quad i = 1, n \\ Y(k+1) &= \begin{pmatrix} -a_1(k) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 1 \\ -a_n(k) & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} Y(k) + \begin{pmatrix} b_1(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n(k) \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) &= (1 \ 0 \ \dots \ \dots \ 0) Y(k) \end{aligned} \quad (1.4)$$

où les  $a_{i0}$  et  $b_{i0}$  vérifient :

$$\frac{\sum_{i=1}^n b_{i0} z^{n-i}}{z^n + \sum_{i=1}^n a_{i0} z^{n-i}} = C_0 (zI - A_0)^{-1} B_0 . \quad (1.5)$$

Prenant alors :

$$\theta = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)^\top \quad (1.6)$$

comme vecteur de paramètre, nous avons défini, sur  $\mathbb{R}^{2n}$  au lieu de  $\mathbb{R}^{n^2+2n}$  comme auparavant, une paramétrisation de la sous famille de  $\mathcal{M}$  constituée des modèles observables.

**Remarque :** L'hypothèse d'observabilité que nous avons utilisée n'est pas restrictive car, par définition, un mode non observable n'intervient pas dans la relation entrée-sortie. Ceci n'est pas le cas de la non commandabilité.

### 1.1.5 Réduction de la non linéarité par immersion

La forme observable ci-dessus est encore bilinéaire en l'état augmenté  $(a_i, b_i, Y)$ . Nous allons supprimer cette non linéarité en augmentant la dimension de l'état augmenté – sans augmenter le nombre des paramètres –.

D'après (1.4), l'état  $Y$  peut s'écrire :

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

et on a :

$$\begin{aligned} y(k+1) &= -a_1(k)y(k) + b_1(k)u(k) + x_1(k) , \\ x_i(k+1-i) &= -a_{i+1}(k)y(k-i) + b_{i+1}(k)u(k-i) + x_{i+1}(k-i) , \quad i = 1, n-2 , \\ x_{n-1}(k+2-n) &= -a_n(k)y(k-n+1) + b_n(k)u(k-n+1) . \end{aligned} \quad (1.8)$$

En sommant ces équations, on obtient :

$$\begin{pmatrix} y(k+1) \\ y(k) \\ \cdot \\ y(k-n+2) \\ u(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ u(k-n+2) \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cccc|cccc} -a_1(k) & \cdot & \cdot & -a_n(k) & b_2(k) & \cdot & \cdot & b_n(k) \\ 1 & 0 & \cdot & 0 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & & 0 & & \\ \hline 0 & 1 & 0 & & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ & & & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right) \begin{pmatrix} y(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(k-n+1) \\ u(k-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ u(k-n+1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(k) \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} u(k) . \quad (1.9)$$

Ceci est une représentation non minimale avec un vecteur d'état :

$$Z = (y(k) \dots y(k-n+1) u(k-1) \dots u(k-n+1))^\top \quad (1.10)$$

dans  $\mathbb{R}^{2n-1}$  dont les composantes sont mesurées puisque ce sont des sorties et des commandes passées. On n'a donc pas besoin d'observateur pour  $Z$ . Ainsi, en prenant pour vecteur de paramètres :

$$\theta = (-a_1 \dots -a_n \ b_2 \dots b_n \ b_1)^\top , \quad (1.11)$$

le modèle est complètement décrit par :

$$\begin{aligned} \theta(k+1) &= \theta(k) & , & & \theta(0) &= \theta \\ Z(k+1) &= F(\theta(k)) Z(k) + G(\theta(k)) u(k) \\ y(k) &= (1 \ 0 \ \dots \ 0) Z(k) \end{aligned} \quad (1.12)$$

où  $F$  et  $G$  sont donnés par (1.9). Par ailleurs (1.9) peut se réécrire :

$$y(k+1) = \left( Z(k)^\top u(k) \right) \theta(k) . \quad (1.13)$$

Puisque  $Z(k)$  et  $u(k)$  sont connus dans cette équation, nous avons obtenu l'équation d'observation linéaire du vecteur  $\theta(k)$  que nous cherchions. Aussi la bilinéarité toujours présente dans (1.12) ne nous gêne pas pour l'observation du vecteur d'état augmenté  $(\theta(k)^\top Z(k)^\top)^\top$ .

## 1.2 Représentation polynômiale en l'opérateur de retard

L'équation (1.13) n'est rien d'autre que (écrite à l'instant  $k$ ) :

$$y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) . \quad (1.14)$$

Pour écrire ceci de façon plus compacte,

**Définition 1.2** On appelle opérateur de retard et on note  $q^{-1}$  l'application qui, à une suite  $\{u(\cdot)\}$ , associe la suite  $\{y(\cdot)\}$  définie par :

$$y(k) = u(k-1) , \quad \forall k \geq 1 \quad (1.15)$$

$$y(0) = 0 \quad (1.16)$$

$q^{-1}$  est linéaire et on remarque que la composition est "identique" à la multiplication :

$$q^{-1} \circ q^{-n} = q^{-n} \circ q^{-1} = q^{-(n+1)} . \quad (1.17)$$

Ainsi nous pouvons à juste titre utiliser l'algèbre polynômiale. L'intérêt de l'opérateur de retard par rapport à  $q$ , l'opérateur d'avance plus classique, est que l'on n'a pas à se préoccuper de problèmes de causalité. Mais, lié à cet avantage, il y a l'inconvénient de ne pas bien maîtriser ce qu'il se passe en 0 en termes de pôles ou de zéros. De plus pour avoir une définition précise, on doit fixer la condition initiale – à 0 en (1.16) –. Ainsi, si la suite  $\{y(\cdot)\}$  a une condition initiale  $y_0$ , (1.15)-(1.16) deviennent :

$$\{y(\cdot)\} = q^{-1}(\{u(\cdot)\}) + y_0 \{\delta_0(\cdot)\} \quad (1.18)$$

où  $\{\delta_i(\cdot)\}$  est la *suite impulsion* à l'instant  $i$  définie par :

$$\delta_i(k) = 0 , \quad \forall k \neq i \quad (1.19)$$

$$\delta_i(i) = 1 . \quad (1.20)$$

Maintenant, en posant :

$$A(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i q^{-i} , \quad B(q^{-1}) = \sum_{i=1}^n b_i q^{1-i} , \quad (1.21)$$

nous pouvons écrire (1.14) en :

$$A(q^{-1})\{y(\cdot)\} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n a_i y_{j-i} \{\delta_j(\cdot)\} = q^{-1}B(q^{-1})\{u(\cdot)\} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n b_i u_{j-i} \{\delta_j(\cdot)\} \quad (1.22)$$

où les  $y_{j-i}$  et  $u_{j-i}$  sont les conditions initiales. Cette notation est très utile puisque comme nous l'avons remarqué ci-dessus nous pouvons considérer  $A$  et  $B$  comme des polynômes et utiliser l'algèbre polynômiale. Par contre son écriture est lourde. En pratique, on ne prend pas la peine de préciser les conditions initiales et on écrit :

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-1}B(q^{-1})u(k) . \quad (1.23)$$

Dans cette écriture, on note que la variable du temps  $k$  est précisée. En effet d'une part, comme nous l'avons vu, cette équation n'est exacte que pour  $k$  supérieur ou égal à  $n$ , d'autre part, ceci permet par exemple d'écrire sans ambiguïté :

$$A(q^{-1})q^{-1}B(q^{-1})u(k) = B(q^{-1})u(k-1) + \sum_{i=1}^n a_i B(q^{-1})u(k-i-1) , \quad (1.24)$$

où les  $a_i$  sont les coefficients de  $A$ . Avec cette notation,

**Définition 1.3** Nous appellerons représentation polynômiale par opérateur de retard et nous noterons  $(P, Q, R)$  le système linéaire stationnaire décrit par :

$$\begin{aligned} P(q^{-1})x(k) &= Q(q^{-1})u(k) \\ y(k) &= R(q^{-1})x(k) \end{aligned} \quad (1.25)$$

où  $P$  est un polynôme dont le terme constant est normalisé à 1. La suite  $\{x(\cdot)\}$  est appelée la suite des états partiels.

**Définition 1.4** Deux représentations  $(P_1, Q_1, R_1)$  et  $(P_2, Q_2, R_2)$ , dont les suites d'états partiels sont  $\{x_1(\cdot)\}$  et  $\{x_2(\cdot)\}$ , sont dites équivalentes si il existent deux polynômes  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\alpha$  étant premier avec  $P_1$  tels que :

$$x_2(k) = \alpha(q^{-1})x_1(k) + \beta(q^{-1})u(k) . \quad (1.26)$$

Grâce à cette relation d'équivalence et en comparant à des représentations d'état, on peut montrer que les valeurs de  $z$  pour lesquelles la matrice  $(P(z^{-1}), Q(z^{-1}))$  chute de rang correspondent à des pôles non commandables. Pareillement, les valeurs de  $z$  pour lesquelles la matrice  $\begin{pmatrix} P(z^{-1}) \\ R(z^{-1}) \end{pmatrix}$  chute de rang correspondent à des pôles non observables. Ainsi,

**Définition 1.5** Une représentation polynômiale est dite sous forme observable si son polynôme  $R$  est égal à 1. Elle est dite sous forme commandable si son polynôme  $Q$  est égal à 1.

Ainsi (1.14) ou (1.23) est une représentation polynômiale sous forme observable.

L'objet de ces notes étant la commande linéaire adaptative, nous ne pousserons pas plus loin l'étude des représentations polynômiales, le lecteur intéressé pourra se reporter à [4, 10, 11, 20].

### 1.3 Paramétrisation explicite

Avec les équations du modèle sous la forme (1.12), nous voyons que les paramètres du vecteur  $\theta$  défini en (1.11), servant à la représentation du modèle, sont des paramètres explicites, selon la définition introduite au chapitre . Nous avons donc établi qu'une paramétrisation explicite de la famille  $\mathcal{M}$  des modèles linéaires stationnaires observables de dimension  $n$  est donnée par  $\begin{matrix} \mathbb{R}^{2n} & \rightarrow & \mathcal{M} \\ \theta & \mapsto & M \end{matrix}$  où  $\theta$  est le vecteur :

$$\theta = (-a_1 \dots -a_n \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)^\top , \quad (1.27)$$

les  $a_i$  et les  $b_i$  étant (voir (1.21)) les coefficients des polynômes d'une représentation polynômiale sous forme observable :

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) . \quad (1.28)$$

L'équation d'observation associée à cette paramétrisation est en fait cette même équation que nous pouvons réécrire sous la forme :

$$y(k) = (y(k-1) \dots y(k-n)u(k-1) \dots u(k-n))\theta . \quad (1.29)$$

Cette paramétrisation est la plus triviale, d'autres paramétrisations sont possibles comme il est montré dans l'Exercice 9.

Ayant les paramètres du modèle, on obtient les paramètres du contrôleur en appliquant une des méthodes de synthèse de loi de commande telles celles présentées ci-dessous. Cependant, en général ces synthèses ne sont applicables que si le modèle est commandable. Pour cela, il faut supposer que le vecteur  $\theta$  soit tel que les polynômes  $A$  et  $B$  associés soient premiers entre eux. Cette hypothèse est

appelée *hypothèse de commandabilité du modèle estimé*. Elle se traduit par le fait que le déterminant de la matrice

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_1 & 1 & b_{n-1} & & b_2 & b_1 & 0 & \\ a_{n-1} & & & a_2 & a_1 & b_n & & & b_2 & b_1 & \\ a_n & \ddots & & & a_2 & 0 & b_n & & & & b_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1} & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{array} \right)$$

dit *Bezoutien* est non nul. L'ensemble dans lequel nous cherchons les paramètres n'est donc pas l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^{2n}$  mais cet espace moins une variété algébrique. Cet ensemble n'est malheureusement pas connexe et ses parties connexes ne sont pas convexes. Ceci rend très difficile l'estimation sous contrainte de commandabilité.

## 1.4 Synthèse de commande et Paramétrisation implicite

Nous avons mentionné au chapitre qu'il existe une autre sorte de paramétrisation, la paramétrisation implicite. Celle-ci permet d'écrire le contrôleur directement et est donc liée à la loi de commande que nous voulons utiliser. Pour obtenir une équation d'observation liée à une telle paramétrisation, nous devons revenir sur les méthodes de synthèse de loi de commande.

### 1.4.1 Modèle de référence

#### Synthèse

Considérons un système commandable et observable :

$$\begin{aligned} A(q^{-1})x(k) &= u(k) \\ y(k) &= B(q^{-1})x(k-1) \end{aligned} \tag{1.30}$$

où  $A$  et  $B$  sont des polynômes premiers entre eux et de degré  $n_A$  et  $n_B$ . Soient trois polynômes  $P$ ,  $Q$  et  $R$ ,  $P$  et  $Q$  étant premiers entre eux et les zéros de  $P(z^{-1})$  et  $R(z^{-1})$ , fractions rationnelles en  $z$ , étant de module strictement inférieur à 1. Soit  $v$  un signal de *consigne* – la commande de la boucle

fermée – on veut pour le système bouclé, c'est à dire l'opérateur  $v \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}$

1. qu'il admette  $\frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})}$  pour fonction de transfert entre  $v$  et  $y$ , et que les pôles non commandables de cet opérateur soient les zéros de  $R(z^{-1})$ ,
2. qu'il y ait une stabilité interne exponentielle.

En particulier, ceci implique que le contrôleur doit être tel que les suites  $\{y(\cdot)\}$  et  $\{u(\cdot)\}$  du système bouclé vérifient :

$$S(q^{-1})R(q^{-1})P(q^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(q^{-1})R(q^{-1})Q(q^{-1}) \\ T(q^{-1}) \end{pmatrix} v(k) \quad (1.31)$$

où  $S$  et  $T$  sont des polynômes avec les zéros de  $S(z^{-1})$  de module strictement inférieur à 1.

On a le résultat suivant (voir Exercice 1.2) :

**Propriété 1.1** *Supposons le système à commander est commandable et observable. Sous cette condition, il existe une solution au problème de modèle de référence si et seulement si il existe un polynôme  $\overline{Q}$  tel que :*

$$Q = \overline{Q} q^{-1} B_i \quad (1.32)$$

où  $B_i$  est un polynôme dont le coefficient de plus bas degré est normalisé à 1 et qui contient tous les zéros instables – et donc aussi les retards – du système à commander, c'est à dire :

$$B = B_i B_s \quad \text{et} \quad B_s(z^{-1}) = 0 \implies |z| < 1. \quad (1.33)$$

La solution est donnée par le contrôleur :

$$C(q^{-1})u(k) + D(q^{-1})y(k) = E(q^{-1})v(k) \quad (1.34)$$

où  $C$ ,  $D$  et  $E$  vérifient :

$$\left. \begin{aligned} A\overline{C} + z^{-1}B_i D &= RP \\ C &= \overline{C} B_s \\ E &= R\overline{Q} \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

**Remarques :**

1. D'après le Théorème de Bezout 1.1 (Exercice 1.1), les degrés  $n_D$  et  $n_C$  de  $D$  et  $C$  vérifient :

$$n_D = n_A - 1 \quad \text{et} \quad n_C \leq n_{B_s} + \text{Max}\{n_{B_i}, n_R + n_P - n_A\} \quad (1.36)$$

$n_{B_s}$ ,  $n_{B_i}$ ,  $n_R$  et  $n_P$  étant les degrés de  $B_s$ ,  $B_i$ ,  $R$  et  $P$ .

2. Le contrôleur défini dans cette Propriété donne la représentation suivante pour l'opérateur  $v \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} :$$

$$\begin{aligned} B_s(q^{-1})R(q^{-1})P(q^{-1})x(k) &= R(q^{-1})\overline{Q}(q^{-1})v(k) \\ \begin{pmatrix} y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q^{-1}B_s(q^{-1})B_i(q^{-1}) \\ A(q^{-1}) \end{pmatrix} x(k) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Les zéros de  $R(z^{-1})$  correspondent donc comme désiré à des pôles non commandables de cet opérateur. Mais on voit aussi que les zéros de  $B_s(z^{-1})$  correspondent à des pôles non observables pour l'opérateur  $v \rightarrow y$  mais observables pour l'opérateur  $v \rightarrow u$ . Ainsi, si la condition (1.32) de la Propriété 1.1 n'est pas satisfaite (ceci revient à poser  $B_i = B$ ), le problème de modèle de référence pourra être résolu mais sans garantie de stabilité interne.

### Paramétrisation implicite

Pour obtenir une paramétrisation implicite, nous devons chercher une relation liant les suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  aux paramètres du contrôleur soit ici aux coefficients des polynômes  $C$ ,  $D$  et  $E$  introduits dans la Propriété 1.1. Pour obtenir cette relation, appliquons les identités d'opérateurs (1.35) aux suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  respectivement :

$$\overline{C}(q^{-1})A(q^{-1})y(k) + D(q^{-1})q^{-1}B_i(q^{-1})y(k) = R(q^{-1})P(q^{-1})y(k) \quad (1.38)$$

$$C(q^{-1})u(k) = \overline{C}(q^{-1})B_s(q^{-1})u(k) . \quad (1.39)$$

En utilisant l'équation (1.28) du système, nous obtenons :

$$C(q^{-1})[q^{-1}B_i(q^{-1})u(k)] + D(q^{-1})[q^{-1}B_i(q^{-1})y(k)] = R(q^{-1})P(q^{-1})y(k) . \quad (1.40)$$

Posons alors :

$$\begin{aligned} \Phi(k+1) &= B_i(q^{-1})(u(k) \dots u(k-n_C)y(k) \dots y(k-n_D))^\top \\ \theta &= (c_0 \dots c_{n_C} d_0 \dots d_{n_D})^\top \end{aligned} \quad (1.41)$$

où  $c_i$ ,  $d_i$  sont les coefficients de  $C$  et  $D$ . On obtient :

$$R(q^{-1})P(q^{-1})y(k) = \Phi(k)^\top \theta . \quad (1.42)$$

Ainsi, étant donné un problème de modèle de référence soluble, c'est à dire étant donné  $B_i$ ,  $P$ ,  $\overline{Q}$  et  $R$ , l'équation ci-dessus ne contient que le vecteur  $\theta$  comme inconnue. C'est donc une équation d'observation linéaire de ce vecteur. Pour avoir le contrôleur au complet, on remarque que le polynôme  $E$  ne dépend pas du système puisqu'il vérifie :

$$E = R\overline{Q} . \quad (1.43)$$

Nous avons établi :

**Propriété 1.2** *Si le polynôme  $B_i$  regroupant les zéros instables du système à commander est connu, il existe une paramétrisation implicite pour le problème de modèle de référence de  $\mathbb{R}^{n_C+n_D+2} \rightarrow \mathcal{M}$  où  $n_C$  et  $n_D$  sont donnés en (1.36). Pour cette paramétrisation, l'équation (1.42) est une équation d'observation linéaire.*

**Remarque :** L'hypothèse de la connaissance du polynôme  $B_i$  peut sembler très forte. Il existe cependant un cas où une bonne approximation peut être obtenue. En effet, si le système que l'on veut commander est un système linéaire stationnaire à temps continu de zéros  $z_i$  et de degré relatif  $n^*$  (= différence entre les degrés du dénominateur et du numérateur de sa fonction de transfert), alors, lorsque la période d'échantillonnage  $h$  tend vers zéro, les zéros du système à temps discret correspondant tendent soit vers  $\exp(z_i h)$  soit vers les zéros du polynôme  $B_{n^*}(z)$  défini par :

$$B_{n^*}(z) = \sum_{i=1}^{n^*} b_i^{n^*} z^{(n^*-i)} \quad (1.44)$$

où les  $b_i^n$  sont définis récursivement par :

$$b_i^n = i b_i^{n-1} + (n-i+1) b_{i-1}^{n-1} , \quad b_1^n = b_n^n = 1 . \quad (1.45)$$

Ainsi, lorsque les zéros  $z_i$  ont leur partie réelle strictement négative, le polynôme  $B_i$  peut être approximé par  $B_{n^*}$  qui est connu dès que  $n^*$  est connu.

L'équation (1.34) du contrôleur ne définit  $u(k)$  qu'implicitement puisque son calcul demande la division par le terme constant  $c_0$  du polynôme  $C$ . Pour la mise en oeuvre de cette loi de commande il est donc plus utile de la réécrire :

$$C'(q^{-1})u(k) + D'(q^{-1})y(k) = E'(q^{-1})v(k) \quad (1.46)$$

où l'indice ' signifie division par  $c_0$ . Pour obtenir la paramétrisation implicite associée, décomposons le vecteur  $\theta$  et le vecteur  $\Phi(k)$  introduit en (1.41) :

$$\theta = (c_0 \quad \theta_r^\top)^\top, \quad \Phi(k) = (B_i(q^{-1})u(k-1) \quad \Phi_r(k)^\top)^\top \quad (1.47)$$

Nous pouvons alors réécrire (1.42) en :

$$q^{-1}B_i(q^{-1})u(k) = \left( R(q^{-1})P(q^{-1})y(k) \quad \Phi_r(k)^\top \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{c_0} \\ \theta_r \\ -\frac{\theta_r}{c_0} \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Ainsi, en posant :

$$\Psi'(k) = \begin{pmatrix} R(q^{-1})\overline{Q}(q^{-1})v(k) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-n_C) \\ y(k) \\ \vdots \\ y(k-n_D) \end{pmatrix}, \quad \theta' = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_0} \\ \theta_r \\ -\frac{\theta_r}{c_0} \end{pmatrix}, \quad \Phi'(k) = \begin{pmatrix} R(q^{-1})P(q^{-1})y(k) \\ \Phi_r(k) \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

Nous avons obtenu :

**Propriété 1.3** *Si le polynôme  $B_i$  regroupant les zéros instables du système à commander est connu, il existe une paramétrisation implicite par un vecteur  $\theta'$  pour le problème de modèle de référence de  $\mathbb{R}^{n_C+n_D+2} \rightarrow \mathcal{M}$  où  $n_C$  et  $n_D$  sont donnés en (1.36). Il lui est associé une équation d'observation linéaire :*

$$q^{-1}B_i(q^{-1})u(k) = \Phi'(k)^\top \theta' \quad (1.50)$$

La loi de commande s'écrit :

$$u(k) = \Psi'(k)^\top \theta' \quad (1.51)$$

## 1.4.2 Placement de pôles

### Synthèse

Considérons un système commandable et observable :

$$\begin{aligned} A(q^{-1})x(k) &= u(k) \\ y(k) &= B(q^{-1})x(k-1) \end{aligned} \quad (1.52)$$

où  $A$  et  $B$  sont des polynômes premiers entre eux et de degré  $n_A$  et  $n_B$ . Soit  $P$  un polynôme dont le terme constant est égal à 1 et tel que les zéros de  $P(z^{-1})$ , fraction rationnelle en  $z$ , soient de module strictement inférieur à 1. On cherche un contrôleur pour que les pôles du système bouclé soient les zéros de  $P(z^{-1})$ . On a le résultat suivant (voir Exercice 1.5) :

**Propriété 1.4** *Si le système à commander est commandable et observable, il existe toujours une solution au problème de placement de pôles. En particulier, lorsque la suite de consignes  $\{v(\cdot)\}$  est la suite nulle, les suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  vérifient :*

$$u(k) = \sum_{i=1}^{n_P} u_i \lambda_i^k, \quad y(k) = \sum_{i=1}^{n_P} y_i \lambda_i^k \quad (1.53)$$

où les  $u_i$  et  $y_i$  sont des nombres complexes qui ne dépendent que des conditions initiales et les  $\lambda_i$  sont les zéros de  $P(z^{-1})$ .

La solution est donnée par le contrôleur :

$$C(q^{-1})u(k) + D(q^{-1})y(k) = v(k) \quad (1.54)$$

où  $C$  et  $D$  vérifient :

$$AC + z^{-1}BD = P. \quad (1.55)$$

**Remarque :** D'après le Théorème de Bezout (1.1) (Exercice 1.1), l'équation (1.55) a une solution en  $C$  et  $D$  si et seulement si les diviseurs communs à  $A$  et  $B$  divisent aussi  $P$ . L'hypothèse d'observabilité, équivalente à  $\{A$  et  $B$  sont premiers entre eux $\}$ , est donc primordiale. De plus, pour la solution, les degrés  $n_C$  et  $n_D$  de  $C$  et  $D$  vérifient :

$$n_D = n_A - 1 \quad \text{et} \quad n_C = \text{Max}\{n_B, n_P - n_A\}, \quad (1.56)$$

$n_A$ ,  $n_B$  et  $n_P$  étant les degrés de  $A$ ,  $B$  et  $P$ .

### Paramétrisation implicite

Appliquons l'identité d'opérateurs (1.55) aux suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  respectivement. En utilisant l'équation du système à commander, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(q^{-1})u(k) &= A(q^{-1})[C(q^{-1})u(k) + D(q^{-1})y(k)] \\ P(q^{-1})y(k) &= q^{-1}B(q^{-1})[C(q^{-1})u(k) + D(q^{-1})y(k)]. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Posons :

$$\theta_d = (1 \ c_1 \ \dots \ c_{n_C} \ d_0 \ \dots \ d_{n_D})^\top \quad (1.58)$$

$$\theta_e = (1 \ a_1 \ \dots \ a_{n_A} \ b_1 \ \dots \ b_{n_B})^\top \quad (1.59)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_d^\top & \theta_e^\top \end{pmatrix}^\top \quad (1.60)$$

$$\Phi(k) = (u(k-1) \ \dots \ u(k-n-n_C) \ y(k) \ \dots \ y(k-n-n_D))^\top \quad (1.61)$$

avec  $n_C$  et  $n_D$  donnés en (1.56),  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  et  $d_i$  étant les coefficients de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  et :

$$n = \text{Max}\{n_A, n_B\}. \quad (1.62)$$

Nous avons :

$$\begin{pmatrix} [P(q^{-1}) - 1]u(k) \\ P(q^{-1})y(k) \end{pmatrix} = F(\theta)\Phi(k) \quad (1.63)$$

où  $F$  est une matrice dont les composantes sont des produits de composantes de  $\theta_d$  par des composantes de  $\theta_e$  et sont donc des fonctions bilinéaires de celles de  $\theta$ . Précisément, ce sont les coefficients des produits  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$  et  $BD$ . Nous avons donc établi :

**Propriété 1.5** *Il existe une paramétrisation implicite de  $\mathbb{R}^{n_A+n_B+n_D+n_C+2} \rightarrow \mathcal{M}$  pour le problème de placement de pôles mais l'équation d'observation (1.63) qui lui est associée est bilinéaire.*

### 1.4.3 Régulation linéaire quadratique

#### Synthèse

Considérons un système commandable et observable :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) x(k) &= u(k) \\ y(k) &= B(q^{-1})x(k-1) \end{aligned} \quad (1.64)$$

où  $A$  et  $B$  sont des polynômes premiers entre eux et de degré  $n_A$  et  $n_B$ . On veut déterminer une loi de commande minimisant le critère suivant :

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \{y(i+1)^2 + r^2 u(i)^2\} . \quad (1.65)$$

On a le résultat suivant (voir Exercice 1.7) :

**Propriété 1.6** *Si le système à commander est commandable et observable, il existe une solution au problème de régulation linéaire quadratique.*

*La solution est donnée par le contrôleur :*

$$C(q^{-1})u(k) + D(q^{-1})y(k) = I(k) \quad (1.66)$$

où  $\{I(\cdot)\}$  est une suite de support fini  $\{0, n-1\}$  :

$$I(k) \neq 0 \implies k \leq n-1 \quad (1.67)$$

dont les composantes dépendent linéairement des conditions initiales de la suite  $\{x(\cdot)\}$  et  $C$  et  $D$  vérifient :

$$AC + z^{-1}BD = P \quad (1.68)$$

avec  $P$  un polynôme de terme constant égal à 1 vérifiant :

$$r^2 A(z)A(z^{-1}) + B(z)B(z^{-1}) = \alpha^2 P(z)P(z^{-1}) \quad (1.69)$$

et tel que les zéros de  $P(z^{-1})$  sont de module strictement inférieur à 1.

#### Paramétrisation implicite

À notre connaissance aucune paramétrisation implicite à laquelle on puisse associer une équation d'observation utile n'a été proposée.

## 1.5 Exercices

**1.1** Soit un système que l'on peut représenter par :

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) . \quad (1.70)$$

Montrer que, si les polynômes  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux, ce système est commandable. Pour cela, on utilisera le

**Théorème 1.1 (de Bezout)** *Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des polynômes de degré  $n_A$ ,  $n_B$  et  $n_C$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. Les diviseurs communs à  $A$  et  $B$  divisent  $C$ .

2. Il existe deux polynômes  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant :

$$A\alpha + B\beta = C \quad (1.71)$$

dont les degrés  $n_\alpha$  et  $n_\beta$  satisfont :

$$n_\beta \leq n_A - 1 \quad \text{et} \quad n_\alpha \leq \text{Max}\{n_B - 1, n_C - n_A\} . \quad (1.72)$$

**1.2** Démontrer la Propriété 1.1. Pour cela, on montrera que le problème est équivalent à résoudre les équations suivantes :

$$E z^{-1} B = F R Q \quad (1.73)$$

$$A C + z^{-1} B D = F R P \quad (1.74)$$

où  $F$  est un polynôme tel que les zéros de  $F R P$  sont de module strictement inférieur à 1.

**1.3** Soit le système observable à commander suivant :

$$\begin{aligned} (1 + a q^{-1}) x(k) &= u(k) \\ y(k) &= q^{-1} (b_0 + b_1 q^{-1}) x(k-1) \end{aligned} \quad (1.75)$$

où :

$$|b_1| < |b_0| . \quad (1.76)$$

Écrire complètement les équations d'observation associées aux deux paramétrisations implicites possibles du contrôleur fourni par la synthèse du modèle de référence, ce modèle étant donné par :

$$P(q^{-1}) = 1 - a_m q^{-1} \quad , \quad \bar{Q}(q^{-1}) = 1 - a_m \quad , \quad R(q^{-1}) = 1 . \quad (1.77)$$

**1.4** Soit un système à commander admettant la représentation polynomiale suivante :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) x(k) &= B_s(q^{-1}) u(k-1) \\ y(k) &= B_i(q^{-1}) x(k) \end{aligned} \quad (1.78)$$

où les polynômes  $A$  et  $B_i$ , de degré  $n_A$  et  $n_{B_i}$ , sont premiers entre eux et le polynôme  $B_s$ , de degré  $n_{B_s}$  a un terme constant non nul et est tel que les zéros de  $B_s(z^{-1})$  sont de module strictement inférieur à 1. Soit  $S$  un polynôme de terme constant égal à 1 tel que les zéros de  $S(z^{-1})$  sont de module strictement inférieur à 1. Étant donnée une suite  $\{x_m(\cdot)\}$ , on veut que, à l'instant  $k$ , la commande  $u(k)$  minimise le critère suivant :

$$J(k) = [S(q^{-1}) (x(k+1) - x_m(k+1))]^2 . \quad (1.79)$$

Ce critère quantifie l'erreur de prédiction  $x - x_m$  et pour cela, ce problème est appelé *minimisation de l'erreur de prédiction*.

1.4.1. Démontrer qu'il existe toujours une solution au problème de minimisation de l'erreur de prédiction et que cette solution est donnée par le contrôleur :

$$C(q^{-1}) u(k) + D(q^{-1}) y(k) = x_m(k) \quad (1.80)$$

où  $C$  et  $D$  vérifient :

$$C = \overline{C} B_s \quad (1.81)$$

$$A \overline{C} + z^{-1} B_i D = S . \quad (1.82)$$

Pour cela, on montrera que cette dernière équation a toujours une solution et qu'elle permet d'exprimer  $Sx$  en fonction de  $u$  et  $y$ . En déduire l'expression de  $\frac{\partial S(q^{-1})x(k+1)}{\partial u(k)}$  et donc celle de  $\frac{\partial J(k)}{\partial u(k)}$ .

1.4.2. Comparer le contrôleur obtenu à celui donné par une synthèse par modèle de référence. Que peut on en déduire sur l'existence d'une paramétrisation implicite pour la minimisation de l'erreur de prédiction et sur son équation d'observation associée ?

1.5 Démontrer la Propriété 1.4. Pour cela, on observera que l'équation (1.53) est équivalente à :

$$P(q^{-1}) u(k) = P(q^{-1}) y(k) = 0 . \quad (1.83)$$

1.6 Soit le système observable à commander :

$$\begin{aligned} (1 + a q^{-1}) x(k) &= u(k) \\ y(k) &= (b_0 + b_1 q^{-1}) x(k-1) \end{aligned} \quad (1.84)$$

où :

$$b_0 \neq a b_1. \quad (1.85)$$

Écrire l'équation d'observation associée à la paramétrisation implicite du contrôleur fourni par la synthèse de placement de pôles, ces pôles étant les zéros de :

$$P(z^{-1}) = 1. \quad (1.86)$$

1.7 Pour démontrer la Propriété 1.6, nous proposons les étapes suivantes :

1.7.1. Montrer que les équations (1.68) et (1.69) ont toujours une solution.

1.7.2. Montrer qu'une écriture rigoureuse de (1.64) est :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) \{x(\cdot)\} &= \{u(\cdot)\} + \{I_1(\cdot)\} \\ \{y(\cdot)\} &= q^{-1} B(q^{-1}) \{x(\cdot)\} + \{I_2(\cdot)\} \end{aligned} \quad (1.87)$$

où les suites  $\{I_1(\cdot)\}$  et  $\{I_2(\cdot)\}$  ne dépendent que des conditions initiales de la suite  $\{x(\cdot)\}$  et ont un support fini  $\{0, n-1\}$ .

1.7.3. Soit  $C$  et  $D$  vérifiant (1.68), on effectue le changement de variable :  $\{u(\cdot)\} \rightarrow \{I(\cdot)\}$  défini par :

$$C(q^{-1}) \{u(\cdot)\} + D(q^{-1}) \{y(\cdot)\} = \{I(\cdot)\} \quad (1.88)$$

On vérifiera que, à suite  $\{y(\cdot)\}$  donnée quelconque, cette transformation est inversible. En déduire que la première équation de (1.87) peut être remplacée par :

$$P(q^{-1}) \{x(\cdot)\} = \{I(\cdot)\} + C(q^{-1}) \{I_1(\cdot)\} - D(q^{-1}) \{I_2(\cdot)\} \quad (1.89)$$

1.7.4. Montrer que pour toute commande stabilisant exponentiellement le système en boucle fermée, on peut appliquer le

**Théorème 1.2 (de Parseval)** Soit  $\{u(\cdot)\}$  une suite de carrés sommables :

$$\sum_{i=0}^{\infty} u(i)^2 < \infty \quad (1.90)$$

on a :

$$\sum_{i=0}^{\infty} u(i)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |U(\omega)|^2 d\omega \quad (1.91)$$

où la fonction  $U$  est la transformée de Fourier de la suite  $\{u(\cdot)\}$  :

$$U(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} u(i) \exp(ij\omega) \quad (j^2 = -1) \quad (1.92)$$

1.7.5. Montrer en utilisant le Théorème de Parseval et les relations (1.69) et (1.87) que le critère est minimisé si la suite  $\{I(\cdot)\}$  a un support fini  $\{0, n-1\}$  et est telle que  $(I(0) \dots I(n-1))$  minimise le critère quadratique :

$$\alpha^2 \sum_{i=0}^{n-1} (I(i) + \{C(q^{-1})I_1\}(i) - \{D(q^{-1})I_2\}(i))^2 + 2r^2 [I_1(i) \{A(q^{-1})x\}(i) - I_2(i) \{B(q^{-1})x\}(i)]$$

où  $[A(q^{-1})x](i)$  et  $[B(q^{-1})x](i)$  dépendent linéairement de  $(I(0) \dots I(n-1))$  via l'équation (1.89). On vérifiera que la solution de ce problème dépend linéairement des composantes des suites  $\{I_1(\cdot)\}$  et  $\{I_2(\cdot)\}$ .

**1.8** Résoudre le problème de poursuite linéaire quadratique suivant :

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} (R(q^{-1})y(i+1) - B(q^{-1})v(i))^2 + r^2 (R(q^{-1})u(i) - A(q^{-1})v(i))^2 \quad (1.93)$$

où  $\{v(\cdot)\}$  est une suite de consigne. Pour cela on montrera qu'il suffit d'établir la relation :

$$A(q^{-1})\chi(k) = (R(q^{-1})u(i) - A(q^{-1})v(i)) \quad (1.94)$$

$$(R(q^{-1})y(i) - B(q^{-1})v(i-1)) = B(q^{-1})\chi(k-1) . \quad (1.95)$$

**1.9** Approche générale de la paramétrisation menant à une équation d'observation linéaire.

A COMPLETER

**1.10** Dans les applications, il est souvent souhaitable de ne pas boucler une commande adaptative directement sur le système à commander mais sur un système transformé. Ceci permet en effet de mieux prendre en compte certaines informations a priori, de réduire l'incertitude et donc le nombre de paramètres à adapter. L'idée est de refaçonner le système à commander par des bouclages ou des branches parallèles préalables de sorte que le système ainsi transformé entre dans le cadre d'hypothèses d'application de la commande adaptative. Ainsi soient  $\{u_p(\cdot)\}$  et  $\{y_p(\cdot)\}$  les suites de

commandes et de sorties du système à commander, les suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  que nous utilisons dans ces notes sont définies par :

$$\begin{pmatrix} U_y(q^{-1})y(k) \\ U_u(q^{-1})u(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [U_y(q^{-1}) - V_y(q^{-1})T(q^{-1})] & -q^{-1}W_y(q^{-1})T(q^{-1}) \\ V_u(q^{-1}) & W_u(q^{-1})T(q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_p(k) - y_d(k) \\ u_p(k) \end{pmatrix} \quad (1.96)$$

où  $U_u$ ,  $V_u$ ,  $W_u$ ,  $U_y$ ,  $V_y$ ,  $W_y$  et  $T$  sont des polynômes, le terme constant de  $U_u$ ,  $U_y$  et  $T$  étant égale à 1, et  $\{y_d(\cdot)\}$  est une suite de sorties désirées. Dans cette expression, il est intéressant d'interpréter la fonction de transfert  $1 - \frac{V_y(z^{-1})T(z^{-1})}{U_y(z^{-1})}$  comme celle d'un filtre passe bande correspondant à la bande de fréquences où l'on veut une réponse précise du système en boucle fermée. La fonction de transfert  $\frac{z^{-1}W_y(z^{-1})}{V_y(z^{-1})}$  représente alors celle d'un modèle du système dans la bande passante où moins de précision est demandée.

1.10.1. Démontrer la Propriété suivante :

**Propriété 1.7** *Supposons que les fractions rationnelles en  $z$  définies par  $U_u(z^{-1})$ ,  $U_y(z^{-1})$  et  $(U_y - V_yT)W_u + z^{-1}V_uW_y$  aient tous leurs zéros de module strictement inférieur à 1.*

1- *Si le polynôme  $T$  est choisi tel que la suite  $\{u_p(\cdot)\}$  est bornée lorsque les suites  $\{y_p(\cdot)\}$  et  $\{[T(q^{-1})u_p](\cdot)\}$  le sont, alors les suites  $\{u_p(\cdot)\}$  et  $\{y_p(\cdot)\}$  sont bornées lorsque les suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  le sont.*

2- *Si le système à commander avant transformation vérifie :*

$$A_p(q^{-1})y_p(k) = B_p(q^{-1})u_p(k-1) + d(k) \quad (1.97)$$

et le polynôme  $T$  est choisi tel que :

$$T(q^{-1})y_d(k) = 0 \quad , \quad T(q^{-1})d(k) = 0 \quad (1.98)$$

La suite  $\{y_p(\cdot) - y_d(\cdot)\}$  tend vers 0 si il en est de même pour les suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$ .

1.10.2. Montrer que si (1.97) et (1.98) sont vérifiées, on a :

$$\bar{A}(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) \quad (1.99)$$

où :

$$\bar{A} = U_y(A_pW_uT + q^{-1}B_pV_u) \quad , \quad B = U_u(-A_pW_yT + B_pU_y - B_pV_yT) \quad (1.100)$$

En déduire que le modèle du système transformé que l'on utilise pour la synthèse des contrôleurs adaptatifs doit être pris sous la forme :

$$A(q^{-1})S(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) \quad (1.101)$$

où  $S$  est le plus grand diviseur commun à  $T$  et  $V_u$  qui est connu a priori. Expliquer aussi pourquoi on peut espérer que le système transformé puisse être représenté par un modèle d'ordre réduit. Noter à ce sujet que la transformation peut avoir l'inconvénient d'introduire des modes non commandables et/ou non observables.

Les notions de commande  $u_p$  et de commande transformée  $u$  sont aussi utiles pour traiter les problèmes de saturation des actionneurs. Ainsi, introduisons une distinction entre commande linéairement calculée et commande réelle. Précisément, soit  $\{u_c(\cdot)\}$  la suites des commandes transformées calculées,

$\{u(\cdot)\}$  étant la suite des commandes transformées réelles. De même nous définissons les suites  $\{u_{pc}(\cdot)\}$  et  $\{u_p(\cdot)\}$ . Décomposons alors le polynôme  $W_u$  en :

$$W_u = W_{us} - z^{-1}W'_u \quad (1.102)$$

où le polynôme  $W_{us}$  a un terme constant unitaire. Nous définissons la relation entre commande calculée et commande réelle de la façon suivante :

$$\begin{aligned} W_{us}(q^{-1})u_{pc}(k) &= V_u(q^{-1})y_p(k) + W'_u(q^{-1})u_p(k-1) - u_c(k) - [U_u(q^{-1}) - 1]u(k) \\ u_p(k) &= f(u_{pc}(k)) \\ u(k) &= W_{us}(q^{-1})(u_{pc}(k) - u_p(k)) + u_c(k) \end{aligned} \quad (1.103)$$

où  $f$  décrit la limitation statique de l'actionneur.

1.10.3. Vérifier que si  $f$  est l'identité alors :

$$\{u(\cdot)\} = \{u_c(\cdot)\} \quad \text{et} \quad \{u_p(\cdot)\} = \{u_{pc}(\cdot)\} \quad (1.104)$$

1.10.4. Démontrer que si  $W_{us}(z^{-1})$ , fraction rationnelle en  $z$ , a tous ses zéros de module strictement inférieur à 1, les suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{u_{pc}(\cdot)\}$  sont bornées si les suites  $\{u_c(\cdot)\}$ ,  $\{u_p(\cdot)\}$  et  $\{y_p(\cdot)\}$  le sont.



## Chapitre 2

# Estimation des paramètres

Au chapitre précédent, nous avons établi que, pour les systèmes linéaires stationnaires à temps discret et d'ordre fini  $n$  donné, il existe toujours une paramétrisation indirecte (ou explicite) et, dans le cas du modèle de référence, directe des lois de commande avec un vecteur  $\theta$  constant que l'on peut observer à travers une équation linéaire :

$$z(k) = Z(k)^\top \theta \quad (2.1)$$

où  $z(k)$  et  $Z(k)$  sont obtenues à partir des valeurs passées et présentes des commandes et des sorties du système à commander. L'objectif de ce chapitre est de montrer comment, à partir de ce résultat, on peut obtenir un algorithme d'estimation.

### 2.1 Un problème d'observation

Puisque  $\theta$  est un vecteur constant, nous pouvons le considérer comme la condition initiale de l'état du système linéaire instationnaire non commandé de sortie  $z$  suivant :

$$\theta(k) = \theta(k-1) \quad , \quad \theta(0) = \theta \quad (2.2)$$

$$z(k) = Z(k)^\top \theta(k) . \quad (2.3)$$

Ceci nous amène à poser le problème d'estimation de  $\theta$  comme celui de l'observation du vecteur d'état  $\theta(k)$ . D'après la théorie des systèmes linéaires, on peut proposer l'observateur suivant :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k) \left( z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right) . \quad (2.4)$$

Bien que le système soit instationnaire, nous verrons à la section 5.1 que, comme dans le cas stationnaire, l'existence d'une suite de gains d'observation  $\{K(\cdot)\}$  donnant la convergence exponentielle de raison arbitraire de la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  vers  $\theta$  est reliée de façon nécessaire et suffisante à l'observabilité de ce système. Malheureusement, cette condition d'observabilité s'exprime en une condition sur la suite  $\{Z(\cdot)\}$  et donc sur les suites d'entrées et de sorties  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$ . Or, dans le cas de la commande adaptative, ces suites dépendent, à cause du bouclage, de la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$ . Ainsi, pour garantir la convergence exponentielle de la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  vers le vecteur  $\theta$  dont nous supposons l'existence, nous devons vérifier des hypothèses sur cette même suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$ . Afin d'éviter un argument circulaire dans notre raisonnement, nous voulons des propriétés de la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  vérifiées pour toutes suites  $\{z(\cdot)\}$  et  $\{Z(\cdot)\}$  ayant pour seule contrainte la vérification de (2.1). Précisément, nous voulons que la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  vérifie :

**P1 :**  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  est bornée,

$$\mathbf{P2} : \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-1) \right\| = 0,$$

$$\mathbf{P3} : \lim_{k \rightarrow \infty} z(k) - Z(k)^\top \widehat{\theta}(k) = 0.$$

En effet, dans ce cas, la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$ , étant bornée, devient asymptotiquement constante avec une erreur d'observation nulle. Elle "se comporte" donc asymptotiquement comme le supposé vecteur de paramètres  $\theta$ . Notre prochain objectif est donc de déterminer une suite de gains d'observation  $\{K(\cdot)\}$  telle que la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$  associée par (2.4) satisfasse ces propriétés P1, P2 et P3.

## 2.2 Choix du gain d'observation

D'après la propriété P1, la suite des gains d'observation  $\{K(\cdot)\}$  doit garantir la bornitude de la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$ . En posant :

$$\widetilde{\theta}(k) = \widehat{\theta}(k) - \theta, \quad (2.5)$$

nous pouvons réécrire (2.4) en :

$$\widetilde{\theta}(k) = \left( I - K(k) Z(k)^\top \right) \widetilde{\theta}(k-1). \quad (2.6)$$

La suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$ , ou de façon équivalente la suite  $\{\widetilde{\theta}(\cdot)\}$ , est donc bornée pour toute condition initiale si et seulement si la suite de matrices de transition :

$$F(k, 0) = \prod_{i=0}^k \left( I - K(i) Z(i)^\top \right) \quad (2.7)$$

est bornée. Il en résulte :

**Lemme 2.1** *La suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$  est bornée pour toute condition initiale si et seulement si il existe une suite bornée  $\{P(\cdot)\}$  de matrices symétriques positives satisfaisant (au sens des formes quadratiques) :*

$$P(k) \geq \left( I - K(k) Z(k)^\top \right) P(k-1) \left( I - Z(k) K(k)^\top \right) \quad (2.8)$$

avec  $P(0)$  définie positive.

**Preuve :** *Condition suffisante :* Puisque la matrice  $P(0)$  est définie positive, elle admet une racine carrée définie positive  $P(0)^{\frac{1}{2}}$  et, d'après l'inégalité de Schwarz, on a pour tout vecteur  $x$  :

$$\left( x^\top \widetilde{\theta}(0) \right)^2 = \left( x^\top P(0)^{\frac{1}{2}} P(0)^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\theta}(0) \right)^2 \quad (2.9)$$

$$\leq x^\top P(0) x \cdot \widetilde{\theta}(0)^\top P(0)^{-1} \widetilde{\theta}(0). \quad (2.10)$$

Cette inégalité étant vraie pour tout vecteur  $x$ , il en est de même des matrices :

$$\widetilde{\theta}(0) \widetilde{\theta}(0)^\top \leq P(0) \cdot \widetilde{\theta}(0)^\top P(0)^{-1} \widetilde{\theta}(0). \quad (2.11)$$

Par ailleurs, par récurrence, si :

$$\widetilde{\theta}(k-1) \widetilde{\theta}(k-1)^\top \leq P(k-1) \cdot \widetilde{\theta}(k-1)^\top P(k-1)^{-1} \widetilde{\theta}(k-1), \quad (2.12)$$

on a, avec (2.6) et (2.8) :

$$\widetilde{\theta}(k) \widetilde{\theta}(k)^\top \leq P(k) \cdot \widetilde{\theta}(k)^\top P(k)^{-1} \widetilde{\theta}(k). \quad (2.13)$$

Puisque la suite  $\{P(\cdot)\}$  est bornée, il en est de même de la suite  $\{\widetilde{\theta}(\cdot)\}$ .

*Condition nécessaire* : Nous savons que, si la suite  $\{\tilde{\theta}(\cdot)\}$  est bornée pour toute condition initiale, la suite de matrices de transition  $\{F(\cdot, 0)\}$  est bornée et donc la suite  $\{F(\cdot, 0)F(\cdot, 0)^\top\}$  est bornée. Définissons la suite  $\{P(\cdot)\}$  par :

$$P(0) = I \quad (2.14)$$

$$P(k) = F(k, 0)F(k, 0)^\top \quad (2.15)$$

Cette suite satisfait (2.8) et est bornée.  $\square$

**Lemme 2.2** Si la suite  $\{P(\cdot)\}$  satisfaisant (2.8) vérifie :

$$P(k) \leq P(k-1) \quad (2.16)$$

à l'instant  $k$ , alors, à ce même instant :

$$\begin{aligned} K(k) &= \alpha(k) \frac{P(k-1)Z(k)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}, \quad 0 \leq \alpha(k) \leq 2 \quad \text{si } Z(k)^\top P(k-1)Z(k) \neq 0 \\ &= \text{arbitraire} \quad \text{sinon.} \end{aligned} \quad (2.17)$$

**Preuve** : Pour tout vecteur  $x$  dans l'hyperplan orthogonal à  $P(k-1)Z(k)$ , on a d'après (2.8) :

$$x^\top P(k)x \geq x^\top P(k-1)x + \left(x^\top K(k)\right)^2 Z(k)^\top P(k-1)Z(k). \quad (2.18)$$

Mais avec (2.16), ceci implique :

soit :

$$x^\top K(k) = 0, \quad (2.19)$$

soit :

$$Z(k)^\top P(k-1)Z(k) = 0. \quad (2.20)$$

Si cette dernière égalité n'est pas satisfaite, alors  $K(k)$  est orthogonal à l'hyperplan orthogonal à  $P(k-1)Z(k)$ . Ces deux vecteurs sont donc colinéaires et on peut écrire :

$$K(k) = \alpha(k) \frac{P(k-1)Z(k)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \quad (2.21)$$

De plus, d'après (2.8) et (2.16), on a :

$$P(k-1) \geq P(k) \quad (2.22)$$

$$\geq P(k-1) - \alpha(k)(2 - \alpha(k)) \frac{P(k-1)Z(k)Z(k)^\top P(k-1)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \quad (2.23)$$

d'où le résultat.  $\square$

D'après ce Lemme, on voit que, si  $K(k)$  n'est pas choisi à l'instant  $k$  de façon à satisfaire (2.17), alors nécessairement on devra prendre  $P(k)$  telle que :

$$P(k) > P(k-1) \quad (2.24)$$

Comme on veut que la suite  $\{P(\cdot)\}$  soit bornée, si cette inégalité (2.24) a lieu un nombre de fois consécutives infini,  $\{P(\cdot)\}$  doit converger. Mais, puisqu'à l'instant  $k$ , on ne connaît pas les données futures, on ne peut prédire si on sera capable d'assurer cette convergence et non une divergence. La prudence impose donc de choisir  $K(k)$  satisfaisant (2.17) à chaque instant.

Nous obtenons :

**Propriété 2.1** Supposons qu'il existe un vecteur  $\theta$  tel que pour tout  $k$  :

$$z(k) = Z(k)^\top \theta \quad (2.25)$$

où  $\{z(\cdot)\}$  et  $\{Z(\cdot)\}$  sont des suites non nécessairement bornées. La suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$ , définie par :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k) \left( z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right) \quad (2.26)$$

avec :

$$K(k) = \alpha(k) \frac{P(k-1)Z(k)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \quad (2.27)$$

$$P_s \geq P(k) \geq \left( I - \beta(k) K(k) Z(k)^\top \right) P(k-1) \quad (2.28)$$

où  $P_s$  et  $P(0)$  sont des matrices symétriques définies positives et :

$$0 \leq \alpha(k) \quad , \quad 0 \leq \beta(k) \leq 2 - \alpha(k) \quad , \quad (2.29)$$

est bornée quelque soit sa condition initiale  $\hat{\theta}(0)$ .

**Preuve :** D'après le Lemme 2.1, puisque la suite  $\{P(\cdot)\}$  est bornée par  $P_s$ , il suffit de montrer que (2.8) est vérifiée. Ceci est une conséquence directe de (2.27), (2.29) et (2.28). En effet, on obtient :

$$\begin{aligned} & (I - K(k) Z(k)^\top) P(k-1) (I - Z(k) K(k)^\top) \\ &= P(k-1) - \alpha(k) (2 - \alpha(k)) \frac{P(k-1)Z(k)Z(k)^\top P(k-1)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\leq P(k-1) - \alpha(k) \beta(k) \frac{P(k-1)Z(k)Z(k)^\top P(k-1)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \quad (2.31)$$

$$\leq \left( I - \beta(k) K(k) Z(k)^\top \right) P(k-1) \quad (2.32)$$

$$\leq P(k) \quad \square \quad (2.33)$$

Pour établir les deux autres propriétés P2 et P3 que nous désirons pour la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$ , nous notons d'abord que :

$$\left\| \hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1) \right\|^2 = \left[ z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right]^2 \alpha(k)^2 \frac{Z(k)^\top P(k-1)^2 Z(k)}{(Z(k)^\top P(k-1)Z(k))^2} . \quad (2.34)$$

Mais, d'après (2.28), on a :

$$P(k-1) \leq P_s . \quad (2.35)$$

Donc, en notant  $\lambda_{\max}\{P_s\}$  la plus grande valeur propre de la matrice  $P_s$ , on a aussi :

$$\left\| \hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1) \right\|^2 \leq \frac{\left[ z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right]^2}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \alpha(k)^2 \lambda_{\max}\{P_s\} . \quad (2.36)$$

Par ailleurs, on a :

$$z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k) = (1 - \alpha(k)) \left( z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right) . \quad (2.37)$$

Ainsi, si la suite  $\left\{ \frac{(1-\alpha(\cdot))^2}{\alpha(\cdot)} Z(\cdot)^\top P(\cdot - 1) Z(\cdot) \right\}$  est bornée, la suite  $\{\alpha(\cdot)\}$  l'étant, nous aurons établi P2 et P3 si nous montrons :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left[ z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right]^2}{Z(k)^\top P(k-1) Z(k)} \alpha(k) = 0. \quad (2.38)$$

Nous allons établir cette convergence en montrant que la suite en question est en fait sommable. Pour cela, nous remarquons, d'après (2.28), que  $P(k)$  est définie positive si :

$$1 - \alpha(i) \beta(i) > 0, \quad \forall i \leq k. \quad (2.39)$$

En effet, par récurrence et en utilisant l'inégalité de Schwarz, on a pour tout vecteur  $x$  :

$$x^\top P(k)x \geq x^\top P(k-1)x - \frac{\alpha(k)\beta(k)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \left[ Z(k)^\top P(k-1)x \right]^2 \quad (2.40)$$

$$\geq (1 - \alpha(k)\beta(k)) x^\top P(k-1)x. \quad (2.41)$$

Ainsi, en choisissant les suites  $\{\alpha(\cdot)\}$  et  $\{\beta(\cdot)\}$  pour vérifier (2.39), nous pouvons définir la suite  $\{V(\cdot)\}$  de la façon suivante :

$$V(k) = \tilde{\theta}(k)^\top P(k)^{-1} \tilde{\theta}(k). \quad (2.42)$$

Le résultat de sommabilité que nous cherchons va nous être donné par l'étude de la récurrence satisfaite par  $\{V(\cdot)\}$ . Précisément, à partir de (2.26) et de la notation (2.5), on calcule :

$$\tilde{\theta}(k)^\top P(k-1)^{-1} \tilde{\theta}(k) = V(k-1) - \frac{\left[ z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right]^2}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \alpha(k) (2 - \alpha(k)). \quad (2.43)$$

Par ailleurs, on a le Lemme suivant (voir Exercice 2.1) :

**Lemme 2.3 (d'inversion matricielle)** *On a l'égalité suivante lorsqu'elle a un sens :*

$$(A - BC^{-1}D)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(C - DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}. \quad (2.44)$$

Alors, avec (2.27) et (2.28), on obtient :

$$P(k-1)^{-1} \left( I - \beta(k)K(k)Z(k)^\top \right)^{-1} = P(k-1)^{-1} \left( I + \beta(k) \frac{K(k)Z(k)^\top}{1 - \beta(k)Z(k)^\top K(k)} \right), \quad (2.45)$$

$$= P(k-1)^{-1} + \frac{\beta(k)\alpha(k)}{1 - \beta(k)\alpha(k)} \frac{Z(k)Z(k)^\top}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}, \quad (2.46)$$

$$\geq P(k)^{-1}. \quad (2.47)$$

Utilisant cette inégalité et (2.37) et (2.43), on déduit :

$$\begin{aligned} V(k) &\leq V(k-1) - \alpha(k) \frac{\left[ z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right]^2}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \left[ 2 - \alpha(k) - \frac{\beta(k)}{1 - \beta(k)\alpha(k)} (1 - \alpha(k))^2 \right] \\ &\leq V(k-1) - \frac{2 - \alpha(k) - \beta(k)}{1 - \beta(k)\alpha(k)} \alpha(k) \frac{\left[ z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right]^2}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Supposons alors que les suites  $\{\alpha(\cdot)\}$  et  $\{\beta(\cdot)\}$  sont choisies pour vérifier pour tout  $k$  :

$$\frac{2 - \alpha(k) - \beta(k)}{1 - \beta(k)\alpha(k)} > \varepsilon > 0. \quad (2.49)$$

On obtient par sommation :

$$\sum_{i=1}^k \alpha(k) \frac{[z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1)]^2}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \leq \frac{1}{\varepsilon} (V(0) - V(k)) \leq \frac{1}{\varepsilon} V(0) . \quad (2.50)$$

Avec l'équivalence :

$$\left\{ \alpha \geq 0 , \quad \beta \geq 0 , \quad 1 - \beta\alpha > 0 , \quad \frac{2 - \alpha - \beta}{1 - \beta\alpha} > \varepsilon > 0 \right\} \\ \iff \left\{ \alpha \geq 0 , \quad \varepsilon > 0 , \quad 1 - \varepsilon\alpha > 0 , \quad \frac{2 - \alpha - \varepsilon}{1 - \varepsilon\alpha} > \beta \geq 0 \right\} ,$$

nous avons établi :

**Propriété 2.2** *Supposons qu'il existe un vecteur  $\theta$  tel que pour tout  $k$  :*

$$z(k) = Z(k)^\top \theta \quad (2.51)$$

où  $\{z(\cdot)\}$  et  $\{Z(\cdot)\}$  sont des suites non nécessairement bornées. Définissons la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  par :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \alpha(k) \frac{P(k-1)Z(k)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \left( z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right) \quad (2.52)$$

avec :

$$P_s \geq P(k) \geq \left( I - \beta(k) K(k) Z(k)^\top \right) P(k-1) \quad (2.53)$$

où  $P_s$  et  $P(0)$  sont des matrices symétriques définies positives et

$$\alpha(k) \geq 0 , \quad 1 - \varepsilon\alpha(k) > 0 \\ \frac{2 - \alpha(k) - \varepsilon}{1 - \varepsilon\alpha(k)} > \beta(k) \geq 0 \\ \frac{(1 - \alpha(k))^2}{\alpha(k)} Z(k)^\top P(k-1)Z(k) \leq C \quad (2.54)$$

où  $\varepsilon > 0$  et  $C$  sont des constantes. Dans ces conditions,

**P1** : la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  est bornée,

**P2'** : la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot) - \hat{\theta}(\cdot - 1)\}$  est de carrés sommables,

**P3'** : la suite  $\{z(\cdot) - Z(\cdot)^\top \hat{\theta}(\cdot)\}$  est de carrés sommables.

Avec cette Propriété 2.2, nous avons établi l'existence de toute une famille d'algorithmes d'estimation dépendant du choix des suites  $\{P(\cdot)\}$ ,  $\{\alpha(\cdot)\}$  et  $\{\beta(\cdot)\}$  et satisfaisant les propriétés P1, P2 et P3 sous l'hypothèse de l'existence d'un vecteur  $\theta$  tel que pour tout  $k$  :

$$z(k) = Z(k)^\top \theta . \quad (2.55)$$

Rappelons que rien n'est supposé sur les suites  $\{z(\cdot)\}$  et  $\{Z(\cdot)\}$ . En particulier, ces suites peuvent être non bornées.

Des choix particuliers des suites  $\{P(\cdot)\}$ ,  $\{\alpha(\cdot)\}$  et  $\{\beta(\cdot)\}$  donnent les algorithmes suivants :

**Algorithme de projection régularisé :** Cet algorithme est obtenu en prenant :

$$\begin{aligned} P(k) &= I \\ \alpha(k) &= \frac{Z(k)^\top Z(k)}{r(k) + Z(k)^\top Z(k)} \quad , \quad 0 < r(k) \leq R \\ \beta(k) &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Il s'écrit donc :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{Z(k)}{r(k) + Z(k)^\top Z(k)} \left( z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right) \quad , \quad 0 < r(k) \leq R \quad (2.57)$$

**Algorithme des moindres carrés pondérés :** Cet algorithme est obtenu en prenant :

$$\begin{aligned} P(k) &= \left( I - \frac{P(k-1)Z(k)Z(k)^\top}{r(k) + Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \right) P(k-1) \quad , \quad 0 < r(k) \leq R \\ \alpha(k) &= \frac{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}{r(k) + Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \\ \beta(k) &= 1 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Il s'écrit donc :

$$\begin{aligned} P(k) &= \left( I - \frac{P(k-1)Z(k)Z(k)^\top}{r(k) + Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \right) P(k-1) \quad , \quad 0 < r(k) \leq R \\ \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + \frac{P(k-1)Z(k)}{r(k) + Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \left( z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right) . \end{aligned} \quad (2.59)$$

En choisissant la pondération  $r(k)$  comme :

$$r(k) = r \prod_{i=1}^k \lambda(i) \quad , \quad (2.60)$$

avec  $0 < \lambda(k) \leq 1$ , on obtient l'algorithme dit des moindres carrés avec facteur d'oubli  $\lambda(k)$ .

**Algorithme des moindres carrés avec regonflement :** Cet algorithme est obtenu en prenant :

$$\begin{aligned} P(k) &= \lambda(k) \left( I - \frac{P(k-1)Z(k)Z(k)^\top}{r(k) + Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \right) P(k-1) + (1 - \lambda(k)) Q(k) \\ \alpha(k) &= \frac{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}{r(k) + Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \\ \beta(k) &= 1 \end{aligned} \quad (2.61)$$

où  $\lambda(k)$ ,  $r(k)$  et  $Q(k)$  sont à choisir tels que :

$$0 < \lambda(k) \leq 1 \quad , \quad 0 < r(k) \leq R \quad , \quad P(k-1) \leq Q(k) \leq P_s \quad (2.62)$$

Il s'écrit donc :

$$\begin{aligned} P(k) &= \lambda(k) \left( I - \frac{P(k-1)Z(k)Z(k)^\top}{r(k) + Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \right) P(k-1) + (1 - \lambda(k)) Q(k) \\ \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + \frac{P(k-1)Z(k)}{r(k) + Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \left( z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right) . \end{aligned} \quad (2.63)$$

## 2.3 Un problème de minimisation

### 2.3.1 L'observateur vu comme un minimiseur

Les gains d'observation des algorithmes que nous venons de mentionner peuvent aussi être déduits d'un problème de minimisation. Jusqu'à maintenant, nous avons posé le problème d'estimation comme la recherche d'un vecteur  $\hat{\theta}(k)$  tel que  $z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k)$  et  $\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)$  soient les plus petits possible. Exprimé en termes de minimisation, on cherche  $\hat{\theta}(k)$  minimisant le critère suivant :

$$J_1(k, \hat{\theta}) = \left( \hat{\theta} - \hat{\theta}(k-1) \right)^\top P(k-1)^{-1} \left( \hat{\theta} - \hat{\theta}(k-1) \right) + \frac{\left( z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta} \right)^2}{r(k)} \quad (2.64)$$

où  $\{P(\cdot)\}$ , suite de matrices symétriques définies positives et  $\{r(\cdot)\}$ , suite de réels strictement positifs, sont des pondérations à préciser. Ce critère étant fortement convexe, son unique minimum est atteint au zéro de :

$$\frac{\partial J(k, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = 0. \quad (2.65)$$

On a donc :

$$\left( P(k-1)^{-1} + \frac{Z(k)Z(k)^\top}{r(k)} \right) \hat{\theta}(k) = P(k-1)^{-1} \hat{\theta}(k-1) + \frac{z(k)}{r(k)} Z(k). \quad (2.66)$$

Utilisant le Lemme d'inversion matricielle 2.3, on obtient :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{P(k-1)Z(k)}{r(k) + Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \left( z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right). \quad (2.67)$$

Comparant avec (2.27), nous sommes amenés à identifier :

$$\frac{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}{\alpha(k)} = r(k) + Z(k)^\top P(k-1)Z(k) \quad (2.68)$$

et  $r(k)$  devant être positif,  $\alpha(k)$  doit être plus petit que 1.

Nous avons donc établi que, lorsque  $\alpha(k) < 1$ , les gains d'observation que nous avons obtenu à la section précédente donnent la solution du problème de minimiser  $J_1(k, \hat{\theta})$  avec  $r(k)$  défini par :

$$r(k) = Z(k)^\top P(k-1)Z(k) \frac{1 - \alpha(k)}{\alpha(k)}. \quad (2.69)$$

Par contre, au contraire de l'approche observateur (voir (2.53) et (2.54)), l'approche minimisation de  $J_1$ , que nous venons de présenter, ne nous dit rien sur la façon de choisir les suites de pondération  $\{P(\cdot)\}$  et  $\{r(\cdot)\}$  pour garantir la satisfaction des propriétés P1, P2 et P3. Aussi, de nombreux autres critères peuvent être introduits pour quantifier le fait que  $z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k)$  et  $\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)$  doivent être les plus petits possible. Mais, pour chacun d'eux, il faudra s'assurer qu'il existe un algorithme donnant le minimiseur et que ce minimiseur vérifie les propriétés P1, P2 et P3.

Par ailleurs, si la suite  $\{P(\cdot)\}$  vérifie (2.59) de l'algorithme des moindres carrés, c'est à dire (en utilisant le Lemme d'inversion matricielle 2.3) :

$$P(k)^{-1} = P(k-1)^{-1} + \frac{Z(k)Z(k)^\top}{r(k)}, \quad (2.70)$$

l'équation (2.66) devient :

$$P(k)^{-1} \hat{\theta}(k) = P(k-1)^{-1} \hat{\theta}(k-1) + \frac{z(k)}{r(k)} Z(k) \quad (2.71)$$

$$= P(0)^{-1} \hat{\theta}(0) + \sum_{i=1}^k \frac{z(i)}{r(i)} Z(i) \quad (2.72)$$

$$= \left( P(0)^{-1} + \sum_{i=1}^k Z(i) Z(i)^\top \right) \hat{\theta}(k) . \quad (2.73)$$

On a donc la relation suivante :

$$P(0)^{-1} \left( \hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(0) \right) = \sum_{i=0}^k \frac{z(i) - Z(i)^\top \hat{\theta}(k)}{r(i)} Z(i) \quad (2.74)$$

Ce qui montre que  $\hat{\theta}(k)$  minimise, comme nous l'avons vu le critère  $J_1(k, \hat{\theta})$ , mais aussi le critère suivant dit *des moindres carrés pondérés de l'erreur d'équation* :

$$J_2(k, \hat{\theta}) = \left( \hat{\theta} - \hat{\theta}(0) \right)^\top P(0)^{-1} \left( \hat{\theta} - \hat{\theta}(0) \right) + \sum_{i=1}^k \frac{\left( z(i) - Z(i)^\top \hat{\theta} \right)^2}{r(i)} \quad (2.75)$$

Ainsi, l'algorithme des moindres carrés est :

- 1 – un observateur,
- 2 – un minimiseur de  $J_1(k, \hat{\theta})$ ,
- 3 – un minimiseur de  $J_2(k, \hat{\theta})$ .

### 2.3.2 Équation d'observation non linéaire

L'interprétation que nous venons de donner de l'observateur comme un minimiseur va nous permettre de traiter le cas où le vecteur de paramètres  $\theta$  n'est observé qu'à travers une équation non linéaire :

$$z(k) = Z(k, \theta) \quad (2.76)$$

où  $z(k)$  et, pour chaque valeur de  $\psi$ ,  $Z(k, \psi)$  sont obtenues à partir des valeurs passées et présentes des commandes et des sorties du système à commander. L'équation d'observation (1.63) associée à la paramétrisation directe de la synthèse de placement de pôles est un exemple d'équation (2.76).

Étant donné un vecteur  $\hat{\theta}$ , son erreur d'équation associée à l'instant  $k$  est :

$$e(k, \hat{\theta}) = z(k) - Z(k, \hat{\theta}) . \quad (2.77)$$

Le critère des moindres carrés de l'erreur d'équation avec facteur d'oubli est dans ce cas :

$$J_2(k, \hat{\theta}) = \|N(\hat{\theta})\|^2 + \sum_{i=1}^k \gamma(i) \|e(i, \hat{\theta})\|^2 , \quad (2.78)$$

où  $\{\gamma(\cdot)\}$  est une suite<sup>1</sup> croissante tendant vers  $+\infty$ ,  $N$  est une fonction continue et propre<sup>2</sup>. Précisément,  $N$  doit être telle qu'il existe une fonction croissante à valeurs positives  $\mathcal{N}$  vérifiant :

$$\|\hat{\theta}\|^2 \leq \mathcal{N} \left( \|N(\hat{\theta})\|^2 \right) . \quad (2.79)$$

<sup>1</sup>Par exemple  $\gamma(i) = \lambda^{-i}$  avec  $\lambda$  dans  $]0, 1[$ .

<sup>2</sup>L'image réciproque d'un compact est compacte.

Le choix le plus simple pour cette fonction  $N$  est bien sûr :

$$N(\hat{\theta}) = \hat{\theta} . \quad (2.80)$$

Cependant, pour des raisons d'implémentation, d'autres choix peuvent être plus judicieux (voir Exercice 2.7).

À partir du critère  $J_2$ , nous pouvons définir la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  par :

$$\hat{\theta}(k) \in \text{Arg} \min_{\hat{\theta} \in \mathcal{M}(k)} \left\| \hat{\theta} - \hat{\theta}(k-1) \right\| , \quad (2.81)$$

où  $\mathcal{M}(k)$  est l'ensemble :

$$\mathcal{M}(k) = \left\{ \hat{\theta} \mid J_2(k, \hat{\theta}) \leq j_0 \right\} , \quad (2.82)$$

avec  $j_0$  une constante positive à choisir. Ceci signifie qu'on prend  $\hat{\theta}(k)$  le plus près possible de  $\hat{\theta}(k-1)$  parmi les vecteurs  $\hat{\theta}$  qui rendent le critère des moindres carrés  $J_2$  inférieur à la constante  $j_0$ . On remarque tout d'abord que le vecteur  $\theta$  qui vérifie (2.76) satisfait :

$$J_2(k, \theta) = \|N(\theta)\|^2 . \quad (2.83)$$

Donc, si la constante  $j_0$  est choisie suffisamment grande pour que :

$$\|N(\theta)\|^2 \leq j_0 , \quad (2.84)$$

l'ensemble  $\mathcal{M}(k)$  est non vide et donc le vecteur  $\hat{\theta}(k)$  est bien défini. De plus la propriété (2.79) de la fonction  $N$  implique que la suite  $\{\|\hat{\theta}(\cdot)\|^2\}$  est bornée par  $\mathcal{N}(j_0)$ . La propriété P1 est donc satisfaite. En fait, nous avons :

**Propriété 2.3** *Supposons qu'il existe un vecteur  $\theta$  tel que pour tout  $k$  :*

$$z(k) = Z(k, \theta) \quad (2.85)$$

où, pour chaque valeur de  $\psi$ ,  $\{z(\cdot)\}$  et  $\{Z(\cdot, \psi)\}$  sont des suites non nécessairement bornées. Soit  $J_2$  la fonction suivante :

$$J_2(k, \hat{\theta}) = \|N(\hat{\theta})\|^2 + \sum_{i=1}^k \gamma(i) \|z(i) - Z(i, \hat{\theta})\|^2 \quad (2.86)$$

où  $\{\gamma(\cdot)\}$  est une suite croissante tendant vers  $+\infty$  et  $N$  est une fonction continue telle qu'il existe une fonction croissante à valeurs positives  $\mathcal{N}$  vérifiant :

$$\|\hat{\theta}\|^2 \leq \mathcal{N} \left( \|N(\hat{\theta})\|^2 \right) . \quad (2.87)$$

Définissons la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  par :

$$\hat{\theta}(k) \in \text{Arg} \min_{\hat{\theta} \in \mathcal{M}(k)} \left\| \hat{\theta} - \hat{\theta}(k-1) \right\| \quad (2.88)$$

où  $\mathcal{M}(k)$  est l'ensemble :

$$\mathcal{M}(k) = \left\{ \hat{\theta} \mid J_2(k, \hat{\theta}) \leq j_0 \right\} \quad (2.89)$$

Si la constante positive  $j_0$  est choisie suffisamment grande,

1. la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  est bornée,

$$2. \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-1) \right\| = 0,$$

$$3. \lim_{k \rightarrow \infty} z(k) - Z(k, \widehat{\theta}(k)) = 0.$$

**Preuve :** Le point 1 de cette Propriété a été démontré ci-dessus.

Pour le point 3, puisque  $\widehat{\theta}(k)$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{M}(k)$ , on a :

$$\|N(\widehat{\theta}(k))\|^2 + \sum_{i=1}^k \gamma(i) \|z(i) - Z(i, \widehat{\theta}(k))\|^2 \leq j_0. \quad (2.90)$$

On a donc en particulier pour tout  $k$  :

$$\|z(k) - Z(k, \widehat{\theta}(k))\|^2 \leq j_0 \frac{1}{\gamma(k)}. \quad (2.91)$$

La suite  $\{g(\cdot)\}$  tendant vers l'infini, le point 3 est établi.

Finalement pour le point 2, remarquons tout d'abord que, pour tout entier positif  $l$ ,  $\widehat{\theta}(k+l)$  appartient à  $\mathcal{M}(k)$ . En effet, de part sa définition, pour tout  $\psi$ , la suite  $\{J_2(\cdot, \psi)\}$  vérifie :

$$J_2(k, \psi) \leq J_2(k+l, \psi). \quad (2.92)$$

Ceci implique en particulier :

$$J_2(k, \widehat{\theta}(k+l)) \leq J_2(k+l, \widehat{\theta}(k+l)) \leq j_0. \quad (2.93)$$

Alors, puisque  $\widehat{\theta}$  minimise la distance à  $\widehat{\theta}(k-1)$  parmi tous les vecteurs  $\widehat{\theta}$  de  $\mathcal{M}(k)$  et que  $\widehat{\theta}(k+l)$  est un élément de  $\mathcal{M}(k)$ , on a pour tout entier positif  $k$  et  $l$  :

$$\left\| \widehat{\theta}(k+l) - \widehat{\theta}(k-1) \right\| \geq \left\| \widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-1) \right\|. \quad (2.94)$$

Cette inégalité est le point de départ de notre démonstration du point 2. Pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , appelons  $T_\varepsilon$  l'ensemble des entiers  $k$  tels que :

$$\left\| \widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-1) \right\| > 2\varepsilon. \quad (2.95)$$

D'après (2.94), ceci implique aussi que pour tout  $l$  et  $k$  de  $T_\varepsilon$  :

$$\left\| \widehat{\theta}(l-1) - \widehat{\theta}(k-1) \right\| > 2\varepsilon. \quad (2.96)$$

Soit alors  $\mathcal{B}(\widehat{\theta}, \varepsilon)$  la boule fermée dans  $\mathbb{R}^p$  de centre  $\widehat{\theta}$  et de rayon  $\varepsilon$ . Puisque la suite  $\{\|\widehat{\theta}(\cdot)\|^2\}$  est bornée par  $\mathcal{N}(j_0)$ , la relation d'inclusion suivante est vérifiée :

$$\bigcup_{k \in T_\varepsilon} \mathcal{B}(\widehat{\theta}(k-1), \varepsilon) \subset \overline{M_0} \quad (2.97)$$

où  $\overline{M_0}$  est l'ensemble :

$$\overline{M_0} = \left\{ \widehat{\theta} \mid \exists \widehat{\theta}_0 : \|\widehat{\theta}_0\|^2 \leq \mathcal{N}(j_0) \text{ et } \left\| \widehat{\theta} - \widehat{\theta}_0 \right\| \leq \varepsilon \right\} \quad (2.98)$$

Mais, d'après (2.96), pour tout  $l$  et  $k$  de  $T_\varepsilon$ , les boules  $\mathcal{B}(\widehat{\theta}(k-1), \varepsilon)$  et  $\mathcal{B}(\widehat{\theta}(l-1), \varepsilon)$  n'ont aucun élément en commun. Donc si  $v$  est le volume de la boule  $\mathcal{B}(\widehat{\theta}, \varepsilon)$  et  $V$  est le volume de l'ensemble fermé borné  $\overline{M_0}$ , l'inclusion (2.97) implique :

$$v \text{ Card}(T_\varepsilon) \leq V \quad (2.99)$$

où  $\text{Card}(T_\varepsilon)$  est le nombre d'éléments de  $T_\varepsilon$  qui d'après cette inégalité doit être fini. Nous concluons que pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, l'inégalité :

$$\left\| \widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-1) \right\| > 2\varepsilon \quad (2.100)$$

ne peut avoir lieu qu'un nombre fini de fois. Ceci achève la démonstration du point 2.  $\square$

Avec cette Propriété, nous avons une réponse satisfaisante du point de vue théorique au problème d'estimation lorsque le vecteur des paramètres n'est observé qu'à travers une équation non linéaire. Du point de vue pratique, la mise en oeuvre de l'algorithme (2.88), demande à chaque instant la résolution d'un problème de minimisation sous contraintes. Ceci peut être irréalisable en temps réel.

## 2.4 Exercices

**2.1** Démontrer le *Lemme d'inversion matricielle*. Pour cela on multiplie (2.44) par  $A - BC^{-1}D$ .

**2.2** Montrer que si dans la Propriété 2.2, la condition :

$$\frac{(1 - \alpha(k))^2}{\alpha(k)} Z(k)^\top P(k-1)Z(k) \leq C \quad (2.101)$$

est remplacée par :

$$\frac{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}{\alpha(k)} \leq C (1 + \|Z(k)\|^2) \quad (2.102)$$

Alors il existe une suite de carrés sommables  $\{\eta(\cdot)\}$  telle que pour tout  $k$  :

$$\left| z(k) - Z(k)^\top \widehat{\theta}(k) \right| \leq \eta(k) (1 + \|Z(k)\|) . \quad (2.103)$$

**2.3** Montrer que les suites  $\{P(\cdot)\}$ ,  $\{\alpha(\cdot)\}$  et  $\{\beta(\cdot)\}$  définies en (2.56), (2.58) et (2.61) satisfont les hypothèses de la Propriété 2.2.

**2.4** Montrer que la suite des erreurs d'observation a posteriori  $\{z(\cdot) - Z(\cdot)^\top \widehat{\theta}(\cdot)\}$  tend exponentiellement vers 0 lorsque la suite de gains d'observation est donnée par l'algorithme des moindres carrés avec facteur d'oubli  $\lambda(k) \leq \lambda < 1$ . Pour cela, on démontrera la propriété suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z(k) - Z(k)^\top \widehat{\theta}(k)}{r(k)} = 0 . \quad (2.104)$$

Remarquer, avec (2.91), qu'une telle convergence exponentielle de la suite des erreurs d'observation a posteriori est donnée dans le cas non linéaire par l'algorithme (2.88).

**2.5** Proposer une suite de gains d'observation telle que la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$  associée vérifie les propriétés P1, P2 et P3, dans le cas où l'équation d'observation :

$$z(k) = Z(k)^\top \theta \quad (2.105)$$

a plusieurs composantes, c'est à dire que  $z(k)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^l$  et  $Z(k)$  est une matrice  $l \times p$ .

**2.6** Étudier les propriétés de l'algorithme d'adaptation donné par l'observateur lorsque l'équation d'observation est entachée d'un bruit exponentiellement décroissant :

$$z(k) = Z(k)^\top \theta + n(k) \quad (2.106)$$

## A COMPLETER

**2.7** 2.7.1. Supposons que, pour le paramètre scalaire  $\theta$ , on ait l'équation d'observation suivante :

$$z(k) = Z_1(k)\theta + Z_2(k)\theta^2 \quad (2.107)$$

Montrer que le critère des moindres carrés avec facteur d'oubli  $\lambda$  est un polynôme du quatrième degré en  $\hat{\theta}$  dont les coefficients peuvent être obtenus à partir de la sortie de filtres de fonction de transfert  $\frac{1}{1 - \lambda z^{-1}}$ .

2.7.2. Que peut t'on en déduire pour le critère des moindres carrés de l'erreur d'équation avec facteur d'oubli fourni par la synthèse de placement de pôles. Quel choix semble plus approprié pour la fonction  $N$  dans ce cas?



## Chapitre 3

# Commande adaptative avec paramètres implicites

Sachant maintenant comment synthétiser et paramétrer une loi de commande et comment estimer des paramètres, nous sommes prêts pour expliquer et généraliser les algorithmes de commande adaptative vus au chapitre 1 et pour étudier les propriétés qu'ils confèrent à la boucle fermée. Dans ce chapitre, nous étudierons les algorithmes liés aux paramétrisations implicites des synthèses des modèles de référence et de placement de pôles vus au chapitre 1.

### 3.1 Modèle de référence

D'après la section 1.4.1 et la Propriété 1.1, supposons que le système à commander peut être décrit par :

$$\begin{aligned} A(q^{-1})x(k) &= u(k) \\ y(k) &= B_i(q^{-1})B_s(q^{-1})x(k-1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où :

1. les polynômes  $A$  et  $B_s$  sont de degré  $n_A$  et  $n_B$  connus, mais leurs coefficients sont inconnus,
2. les zéros de  $B_s(z^{-1})$ , fraction rationnelle en  $z$ , sont de module strictement inférieur à 1,
3. le polynôme  $B_i$  est connu.

Étant donnés trois polynômes  $P$ ,  $\bar{Q}$  et  $R$ ,  $P(z^{-1})$  et  $R(z^{-1})$  ayant tous leurs zéros de module strictement inférieur à 1, nous cherchons une loi de commande telle que, avec  $v$  un signal de consigne, la sortie  $y$  du système bouclé, vérifie :

$$B_s(q^{-1})R(q^{-1})(q^{-1}B_i(q^{-1})\bar{Q}(q^{-1})v(k) - P(q^{-1})y(k)) = 0. \quad (3.2)$$

D'après les Propriétés 1.1 et 1.2, nous savons que la loi de commande est obtenue en résolvant en  $u(k)$  l'équation :

$$R(q^{-1})\bar{Q}(q^{-1})v(k) = \Psi(k)^\top \theta \quad (3.3)$$

où :

- 1.

$$\Psi(k) = (u(k) \dots u(k-n_C) y(k) \dots y(k-n_D))^\top \quad (3.4)$$

avec :

$$n_D = n_A - 1 \quad \text{et} \quad n_C = n_{B_s} + \text{Max}\{n_{B_i}, n_R + n_P - n_A\}, \quad (3.5)$$

$n_C$  et  $n_D$  vérifiant (1.36).

2. le vecteur  $\theta$  vérifie l'équation :

$$R(q^{-1})P(q^{-1})y(k) = [q^{-1}B_i(q^{-1})\Psi(k)]^\top \theta . \quad (3.6)$$

Pour utiliser les méthodes d'estimation des paramètres vues au chapitre 2, nous interprétons l'équation (3.6) comme une équation d'observation et nous posons :

$$z(k) = R(q^{-1})P(q^{-1})y(k) \quad , \quad Z(k) = q^{-1}B_i(q^{-1})\Psi(k) . \quad (3.7)$$

D'après la Propriété 2.2, nous pouvons construire toute une famille de suites de gains d'observation  $\{K(\cdot)\}$  telles que la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  des paramètres estimés définie par :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k) \left( z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right) \quad (3.8)$$

vérifie les propriétés :

**P1** : la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  est bornée,

**P2** : la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot) - \hat{\theta}(\cdot-1)\}$  est de carrés sommables,

**P3** : la suite  $\{z(\cdot) - Z(\cdot)^\top \hat{\theta}(\cdot)\}$  est de carrés sommables.

Pour résoudre le problème de modèle de référence adaptatif, nous pouvons donc proposer :

**Algorithme N° 1** :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + K(k) \left( R(q^{-1})P(q^{-1})y(k) - [q^{-1}B_i(q^{-1})\Psi(k)]^\top \hat{\theta}(k-1) \right) \\ R(q^{-1})\overline{Q}(q^{-1})v(k) &= \Psi(k)^\top \hat{\theta}(k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.9) donnant une équation à résoudre en  $u(k)$ .

**Propriété 3.1** *Supposons que le système à commander satisfait (3.1). Si la suite des gains d'observation est choisie pour que les propriétés P1, P2 et P3 ci-dessus soient vérifiées et que, pour tout  $k$ , la première composante de  $\hat{\theta}(k)$  soit non nulle, alors la loi de commande définie par l'algorithme N° 1 assure que :*

1. les suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  du système bouclé sont bornées,
2. la suite  $R(q^{-1})[q^{-1}B_i(q^{-1})\overline{Q}(q^{-1})v(\cdot) - P(q^{-1})y(\cdot)]$  est de carrés sommables.

**Remarque** : Á première vue, cette Propriété nous indique que notre problème de modèle de référence est résolu. Cependant, si le premier point donne une réponse satisfaisante au problème de stabilité, le deuxième point ne correspond pas à l'objectif de poursuite (3.2). En effet, selon (3.2), on désire que la suite  $R(q^{-1})[q^{-1}B_i(q^{-1})\overline{Q}(q^{-1})v(\cdot) - P(q^{-1})y(\cdot)]$  soit exponentiellement décroissante, les raisons géométriques de cette décroissance étant données par les zéros de  $B(z^{-1})$ . La convergence indiquée par le point 2 n'est que celle d'une suite de carrés sommables qui peut très bien ne pas être exponentielle et donc donner un transitoir très long (voir Exercice 5).

**Preuve** : Supposons ici (voir Exercice 3.1) :

$$B_i(q^{-1}) = q^{-d} . \quad (3.10)$$

Soit  $\{\delta(\cdot)\}$  la suite des erreurs d'observation a posteriori :

$$\delta(k) = R(q^{-1})P(q^{-1})y(k) - [q^{-1}B_i(q^{-1})\Psi(k)]^\top \hat{\theta}(k) . \quad (3.11)$$

D'après P3, cette suite est de carrés sommables. De plus, avec la loi de commande (3.9), on obtient :

$$\begin{aligned} [q^{-1}B_i(q^{-1})\Psi(k)]^\top \widehat{\theta}(k) &= q^{-1}B_i(q^{-1})R(q^{-1})\overline{Q}(q^{-1})v(k) \\ &+ \left\{ [q^{-1}B_i(q^{-1})\Psi(k)]^\top \widehat{\theta}(k) - q^{-1}B_i(q^{-1}) \left[ \Psi(k)^\top \widehat{\theta}(k) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Avec l'hypothèse ci-dessus sur  $B_i$ , le terme entre accolades s'écrit :

$$\Psi(k-d-1)^\top \left( \widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-d-1) \right) .$$

Avec (3.11) et (3.12), on obtient :

$$\begin{aligned} R(q^{-1})P(q^{-1})y(k) &= q^{-1}B_i(q^{-1})R(q^{-1})\overline{Q}(q^{-1})v(k) \\ &+ \delta(k) + \Psi(k-d-1)^\top \left( \widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-d-1) \right) . \end{aligned} \quad (3.13)$$

On remarque alors que, si la suite  $\{\Psi(\cdot)\}$  est bornée, le point 2 de la Propriété 3.1 est une conséquence directe du fait que les suites  $\{\delta(\cdot)\}$  et  $\left\{ \widehat{\theta}(\cdot) - \widehat{\theta}(\cdot-d-1) \right\}$  sont de carrés sommables.

Par ailleurs, d'après l'équation (3.1) du système, on a :

$$B_s(q^{-1})[q^{-1}B_i(q^{-1})u(k)] = A(q^{-1})y(k) \quad (3.14)$$

ou, avec l'expression ci-dessus pour  $B_i$ ,

$$B_s(q^{-1})u(k-d-1) = A(q^{-1})y(k) . \quad (3.15)$$

Utilisant la définition de  $\Psi(k)$ , et en posant :

$$v_f(k) = q^{-1}B_i(q^{-1})R(q^{-1})\overline{Q}(q^{-1})v(k) , \quad (3.16)$$

on peut regrouper les équations (3.13) et (3.15) pour définir le système en boucle fermée représenté à la figure 3.1. Ce système se décompose en :

- un système linéaire dont les pôles sont soit en 0 soit des zéros des fractions  $B_s(z^{-1})$ ,  $R(z^{-1})$  et  $P(z^{-1})$ ,
- en contre réaction avec un opérateur linéaire statique de gain instationnaire de carrés sommables  $\left( \widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-d-1) \right)^\top$ .

Pour conclure à la bornitude des suites  $\{u(\cdot)\}$ ,  $\{y(\cdot)\}$  et  $\{\Psi(\cdot)\}$ , nous aurons besoin du résultat suivant :

**Lemme 3.1** *Considérons le système linéaire :*

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= A X(k) + B u(k) , & X(0) &= X_0 \\ y(k) &= C X(k) + D u(k) \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

où l'état  $X$  est dans  $\mathbb{R}^n$ , la commande  $u$  est dans  $\mathbb{R}^l$  et la sortie  $y$  est dans  $\mathbb{R}^m$ . Si :

1. les valeurs propres de  $A$  sont de module inférieur ou égal à 1,
2. les valeurs propres associées aux modes commandables de  $A$  sont de module strictement inférieur à 1,

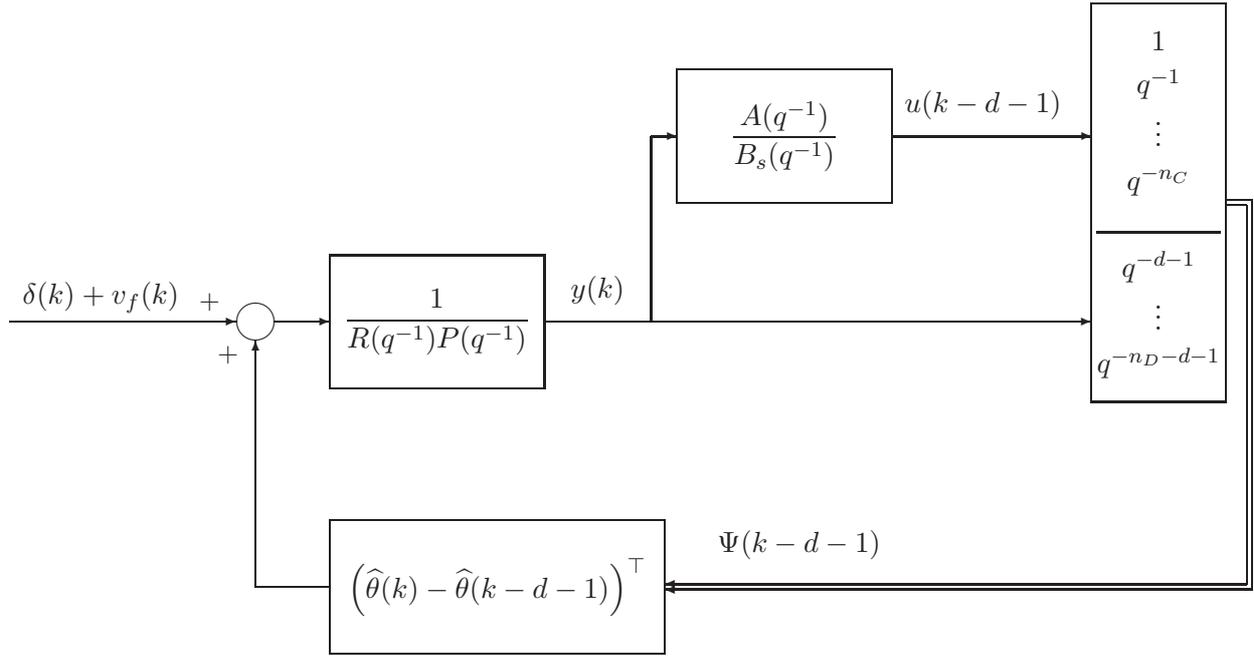


Figure 3.1: Analyse de stabilité pour l'algorithme N° 1

3. les valeurs propres de  $A$  de module égal à 1 ont un bloc de Jordan de dimension 1.

alors, il existe des constantes  $\beta$  et  $\gamma$  telles que :

$$\sup_{k \leq K} \|y(k)\| \leq \gamma \sup_{k \leq K} \|u(k)\| + \beta \|X_0\|. \quad (3.18)$$

**Preuve :** On a :

$$y(k) = CA^k X(0) + Du(k) + \sum_{j=1}^k CA^{j-1} Bu(k-j). \quad (3.19)$$

Mais, quitte à faire un changement de base, on peut supposer que les matrices  $A$  et  $B$  se décomposent en :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

De plus une conséquence de l'hypothèse 2 est l'existence de constantes positives  $c_1$  et  $\lambda$  telles que :

$$\lambda < 1 \quad \text{et} \quad \|A_{11}^{j-1}\| \leq c_1 \lambda^{j-1}. \quad (3.21)$$

De même les hypothèses 1 et 3 impliquent l'existence d'une constante  $c_2$  telle que :

$$\|A_{22}^{j-1}\| \leq c_2. \quad (3.22)$$

Par ailleurs, notons que :

$$A^k = \begin{pmatrix} A_{11}^k & S_k \\ 0 & A_{22}^k \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

où :

$$S_k = \sum_{j=1}^k A_{11}^{k-j} A_{12} A_{22}^{j-1}. \quad (3.24)$$

Avec ce qui précède, on a aussi :

$$\|S_k\| \leq \frac{c_1 c_2 \|A_{12}\|}{1 - \lambda}. \quad (3.25)$$

On en déduit l'existence de constantes  $c_3$  et  $c_4$  telle que :

$$\|A^k\| \leq c_3 \quad \text{et} \quad \|A^{j-1}B\| \leq c_4 \lambda^{j-1}. \quad (3.26)$$

Nous avons obtenu :

$$\|y(k)\| \leq c_3 \|C\| \|X(0)\| + \|D\| \|u(k)\| + c_4 \|C\| \sum_{j=1}^k \lambda^{j-1} \|u(k-j)\|. \quad (3.27)$$

La Propriété est donc établie en prenant :

$$\beta = c_3 \|C\| \quad \text{et} \quad \gamma = \text{Max} \left\{ \|D\|, c_4 \frac{\|C\|}{1 - \lambda} \right\} \quad \square \quad (3.28)$$

D'après ce Lemme, puisque les zéros de  $z^i$ ,  $B_s(z^{-1})$ ,  $R(z^{-1})$  et  $P(z^{-1})$  sont de module strictement inférieur à 1, il existe des constantes positives  $\beta_1$  et  $\gamma$  telles que :

$$\sup_{k \leq K} \|\Psi(k)\| \leq \gamma \sup_{k \leq K} \|\eta(k)\| + \beta_1 \|X_0\|, \quad (3.29)$$

où  $X_0$  est un vecteur regroupant les conditions initiales des suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  et  $\eta(k)$  est défini par :

$$\eta(k) = \delta(k) + v_f(k) + \Psi(k-d-1)^\top \left( \widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-d-1) \right). \quad (3.30)$$

L'inégalité (3.29) est une propriété du système en action dans le système représenté à la figure 3.1. La constante  $\gamma$  est appelé *gain*  $l^\infty$  de ce système. Pour obtenir une inégalité de même nature que (3.29) pour le système en réaction, nous remarquons que, d'après la propriété P2, il existe un entier  $K_0$  tel que pour tout  $k$  plus grand ou égal à  $K_0$ , on a :

$$\left\| \widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-d-1) \right\| \leq \frac{1}{2\gamma}. \quad (3.31)$$

Les propriétés P1, P2 et P3 et la bornitude de la suite  $\{v_f(\cdot)\}$  impliquent donc l'existence de constantes positives  $\beta_2$  et  $\beta_3$  telles que :

$$\sup_{k \leq K} |\eta(k)| \leq \beta_2 + \beta_3 \sup_{k \leq K_0} \|\Psi(k-d-1)\| + \frac{1}{2\gamma} \sup_{k \leq K} \|\Psi(k-d-1)\|. \quad (3.32)$$

Mais  $K_0$  étant fini,  $\sup_{k \leq K_0} \|\Psi(k-d-1)\|$  est fini s'il n'y a pas d'explosion en temps fini. La seule possibilité pour cette éventualité serait que le coefficient de  $u(k)$  soit nul dans l'équation à résoudre donnée en (3.9). Donc si le gain d'observation est choisi pour que la première composante de  $\widehat{\theta}(k)$  soit non nulle, il existe une constante positive  $\beta_4$ , dépendant des conditions initiales, telle qu'une inégalité de même nature que (3.29) est vérifiée par le système en réaction dans la figure 3.1 :

$$\sup_{k \leq K} |\eta(k)| \leq \beta_4 + \frac{1}{2\gamma} \sup_{k \leq K} \|\Psi(k-d-1)\|. \quad (3.33)$$

$\frac{1}{2\gamma}$  est donc le gain  $l^\infty$  de ce système en réaction.

Avec (3.29) et (3.33), nous sommes prêts pour appliquer une technique générale :

**Théorème 3.1 ( des petits gains )** *Si le produit des gains  $l^\infty$  des composantes en action et en réaction d'un système en boucle fermée est strictement inférieur à 1, les suites internes à ce système sont bornées s'il en est de même des suites externes.*

*Ce résultat est encore juste lorsqu'on remplace la norme  $l^\infty$  par n'importe quelle norme  $l^p$ .*

Précisément, (3.29) et (3.33) donnent :

$$\sup_{k \leq K} \|\Psi(k)\| \leq \gamma \left( \beta_4 + \frac{1}{2\gamma} \sup_{k \leq K} \|\Psi(k-d-1)\| \right) + \beta_1 \|X_0\| \quad (3.34)$$

ou encore :

$$\sup_{k \leq K} \|\Psi(k)\| \leq 2(\gamma \beta_4 + \beta_1 \|X_0\|) . \quad (3.35)$$

La suite  $\{\Psi(\cdot)\}$  et donc les suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  sont bornées.  $\square$

Pour établir la Propriété 3.1, nous devons supposer que la première composante de  $\widehat{\theta}(k)$  est non nulle pour tout  $k$ . Cette hypothèse résulte du fait que la loi de commande de l'algorithme N° 1 n'est pas explicite en  $u(k)$ . Dans la section 1.4.1, nous avons déjà observé cette difficulté et proposé dans la Propriété 1.3 une autre paramétrisation implicite par un vecteur  $\theta'$  que l'on peut observer linéairement :

$$B_i(q^{-1})u(k-1) = \Phi'(k)^\top \theta' \quad (3.36)$$

et donnant une expression explicite de  $u(k)$  :

$$u(k) = \Psi'(k)^\top \theta' , \quad (3.37)$$

les vecteurs  $\Phi'(k)$  et  $\Psi'(k)$  étant donnés par :

$$\Phi'(k) = \begin{pmatrix} R(q^{-1})P(q^{-1})y(k) \\ B_i(q^{-1})u(k-2) \\ \vdots \\ B_i(q^{-1})u(k-n_C-1) \\ B_i(q^{-1})y(k-1) \\ \vdots \\ B_i(q^{-1})y(k-n_D-1) \end{pmatrix} , \quad \Psi'(k) = \begin{pmatrix} R(q^{-1})\overline{Q}(q^{-1})v(k) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-n_C) \\ y(k) \\ \vdots \\ y(k-n_D) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

avec  $n_C$  et  $n_D$  vérifiant (1.36). Nous pouvons donc proposer :

**Algorithme N° 2 :**

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}(k) &= \widehat{\theta}(k-1) + K(k) \left( B_i(q^{-1})u(k-1) - \Phi'(k)^\top \widehat{\theta}(k-1) \right) \\ u(k) &= \Psi'(k)^\top \widehat{\theta}(k) \end{aligned} \quad (3.39)$$

**Propriété 3.2** *Supposons que le système à commander satisfait (3.1). Si la suite des gains d'observation est choisie pour que les propriétés P1, P2 et P3 ci-dessus soient vérifiées et qu'il existe une constante  $\beta$  strictement positive telle que, pour tout  $k$  :*

$$|\widehat{t}_1(k)| \geq \beta \quad (3.40)$$

$\widehat{t}_1(k)$  étant la première composante de  $\widehat{\theta}(k)$ ,

alors la loi de commande définie par l'algorithme N° 2 assure que :

1. les suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  du système bouclé sont bornées,
2. la suite  $R(q^{-1}) [q^{-1}B_i(q^{-1})\overline{Q}(q^{-1})v(\cdot) - P(q^{-1})y(\cdot)]$  est de carrés sommables.

Ainsi, bien que nous ayons pris des précautions pour éviter les problèmes sur la première composante de  $\widehat{\theta}(k)$ , l'analyse du système bouclé obtenu montre qu'il faut en fait supposer une condition encore plus forte que pour l'algorithme N° 1, à savoir que ce coefficient n'est même pas autorisé à tendre vers 0. Par ailleurs on peut faire le même commentaire à propos du point 2 que pour la Propriété 3.1.

**Preuve :** Comme dans le cas précédent, supposons ici (voir Exercice 3.2) :

$$B_i(q^{-1}) = q^{-d} \quad (3.41)$$

Notons tout d'abord l'égalité suivante :

$$B_i(q^{-1}) \Psi'(k-1) - \Phi'(k) = \begin{pmatrix} B_i(q^{-1}) R(q^{-1}) \overline{Q}(q^{-1}) v(k-1) - R(q^{-1}) P(q^{-1}) y(k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Soit alors  $\{\delta(\cdot)\}$  la suite des erreurs d'observation a posteriori :

$$\delta(k) = B_i(q^{-1}) u(k-1) - \Phi'(k)^\top \widehat{\theta}(k) . \quad (3.43)$$

Avec la loi de commande (3.39) et l'hypothèse ci-dessus pour  $B_i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} R(q^{-1}) P(q^{-1}) y(k) &= B_i(q^{-1}) R(q^{-1}) \overline{Q}(q^{-1}) v(k-1) \\ &\quad - \frac{1}{\widehat{t}_1(k)} \left[ \delta(k) + \Psi'(k-d-1)^\top \left( \widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-d-1) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

où  $\widehat{t}_1(k)$ , première composante de  $\widehat{\theta}(k)$ , vérifie (3.40). Comme pour la preuve de la Propriété 3.1, nous regroupons les équations (3.44) et (3.15) pour définir le système en boucle fermée représenté à la figure 3.2.

La suite de la démonstration est alors identique à celle de la Propriété 3.1 (Exercice 3.2) en notant que :

1. les suites  $\{v_f(\cdot)\}$  et  $\left\{ \frac{\delta(\cdot)}{\widehat{t}_1(\cdot)} \right\}$  sont bornées,
2. la suite  $\left\{ \frac{(\widehat{\theta}(\cdot-d-1) - \widehat{\theta}(\cdot))^\top}{\widehat{t}_1(\cdot)} \right\}$  est de carrés sommables,
3. les zéros de  $z^i$ ,  $B_s(z^{-1})$ ,  $R(z^{-1})$  et  $P(z^{-1})$  sont de module strictement inférieur à 1.  $\square$

## 3.2 Placement de pôles

D'après la section 1.4.2 et la Propriété 1.4, supposons que le système à commander peut être décrit par :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) x(k) &= u(k) \\ y(k) &= B(q^{-1}) x(k-1) \end{aligned} \quad (3.45)$$

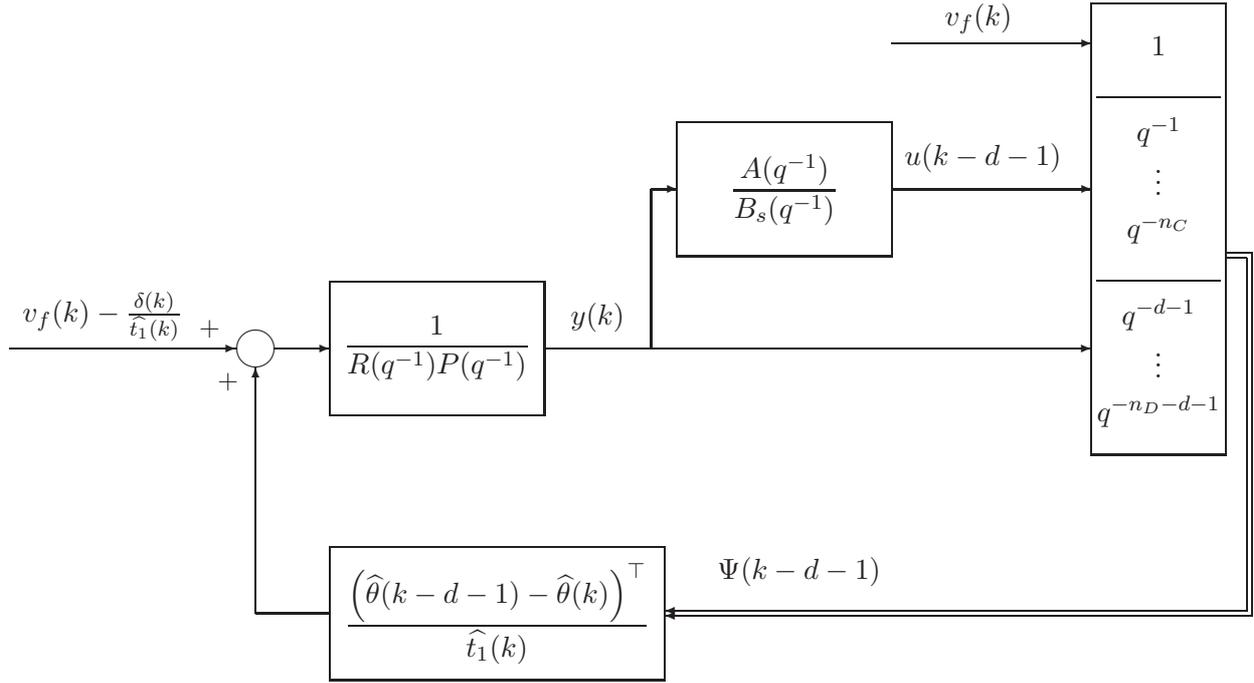


Figure 3.2: Analyse de stabilité pour l'algorithme N° 2

où les polynômes  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux et de degré  $n_A$  et  $n_B$  connus, mais leurs coefficients sont inconnus. Étant donné un polynôme  $P$ , dont le terme constant est égal à 1 et tel que les zéros de  $P(z^{-1})$  soient de module strictement inférieur à 1, nous cherchons une loi de commande telle que les pôles du système bouclé soient les zéros de  $P(z^{-1})$ .

D'après les Propriétés 1.4 et 1.5, nous savons que la loi de commande est obtenue en résolvant en  $u(k)$  l'équation :

$$v(k) = \Psi(k)^\top \theta_d \quad (3.46)$$

où

$$\Psi(k) = (u(k) \dots u(k - n_C) y(k) \dots y(k - n_D))^\top, \quad (3.47)$$

avec :

$$n_D = n_A - 1 \quad \text{et} \quad n_C = \text{Max} \{n_B, n_P - n_A\}, \quad (3.48)$$

et le vecteur  $\theta_d$  vérifie l'équation (1.63) :

$$\begin{pmatrix} [P(q^{-1}) - 1] u(k) \\ P(q^{-1}) y(k) \end{pmatrix} = F(\theta_d, \theta_e) \Phi(k) \quad (3.49)$$

où  $F$  est une matrice dont les composantes sont des produits de celles de  $\theta_d$  et  $\theta_e$ . Cette équation est du type de l'équation (2.76) du chapitre 2. Supposons donc que nous puissions implémenter l'algorithme d'estimation (2.88) avec une constante  $j_0$  choisie suffisamment grande. Nous pouvons alors proposer pour résoudre le problème de placement de pôles adaptatif :

**Algorithme N° 3 :**

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}(k) &= \begin{pmatrix} \widehat{\theta}_d(k) \\ \widehat{\theta}_e(k) \end{pmatrix} \quad \text{donné par (2.88)} \\ v(k) &= \Psi(k)^\top \widehat{\theta}_d(k)\end{aligned}\tag{3.50}$$

(3.50) donnant une équation à résoudre en  $u(k)$ .

**Propriété 3.3** *Supposons que le système à commander satisfait (3.45). La loi de commande définie par l'algorithme N° 3 assure que :*

1. les suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  du système bouclé sont bornées,
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} B(k, q^{-1}) q^{-1} v(k) - P(q^{-1}) y(k) = 0$  où  $B(k, q^{-1})$  est obtenu à partir du vecteur de paramètres explicites  $\widehat{\theta}_e(k)$  (voir (3.51) et (3.57)).

**Remarque :** On notera avec l'Exercice 5 que la suite mentionnée au point 2 de cette Propriété converge exponentiellement vers 0.

**Preuve :** Rappelons tout d'abord que nous avons établi dans la Propriété 2.3 que :

1. la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$  est bornée,
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-1)\| = 0$ ,
3.  $\lim_{k \rightarrow \infty} z(k) - Z(k, \widehat{\theta}(k)) = 0$ .

D'après la section 1.4.2, nous pouvons décomposer :

$$\widehat{\theta}_d(k) = \left(1 \quad \widehat{\theta}'_d(k)^\top\right)^\top, \quad \widehat{\theta}_e(k) = (1 \ a_1(k) \ \dots \ a_{n_A}(k) \ b_1(k) \ \dots \ b_{n_B}(k))^\top\tag{3.51}$$

La loi de commande peut alors se réécrire :

$$u(k) = -\psi(k)^\top \widehat{\theta}'_d(k) + v(k)\tag{3.52}$$

où le vecteur  $\psi(k)$  est obtenu en décomposant :

$$\Psi(k) = \begin{pmatrix} u(k) & \psi(k)^\top \end{pmatrix}^\top\tag{3.53}$$

L'erreur d'observation a posteriori est alors d'après (1.57) :

$$\delta(k) = z(k) - Z(k, \widehat{\theta}(k))\tag{3.54}$$

$$= \begin{pmatrix} [P(q^{-1}) - 1] u(k) - \psi(k)^\top \widehat{\theta}'_d(k) - \sum_{i=1}^{n_A} a_i(k) [\psi(k-i)^\top \widehat{\theta}'_d(k) + u(k-i)] \\ P(q^{-1}) y(k) - \sum_{i=1}^{n_B} b_i(k) [\psi(k-i-1)^\top \widehat{\theta}'_d(k) + u(k-i-1)] \end{pmatrix}\tag{3.55}$$

ou encore, en utilisant la loi de commande (3.52) :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} P(q^{-1}) u(k) \\ P(q^{-1}) y(k) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A(k, q^{-1}) \\ B(k, q^{-1}) q^{-1} \end{pmatrix} v(k) \\ &+ \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n_A} a_i(k) \psi(k-i)^\top [\widehat{\theta}'_d(k) - \widehat{\theta}'_d(k-i)] \\ \sum_{i=1}^{n_B} b_i(k) \psi(k-i-1)^\top [\widehat{\theta}'_d(k) - \widehat{\theta}'_d(k-i-1)] \end{pmatrix} + \delta(k)\end{aligned}\tag{3.56}$$

où  $A(k, q^{-1})$  et  $B(k, q^{-1})$  sont :

$$A(k, q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_A} a_i(k) q^{-i} \quad , \quad B(k, q^{-1}) = \sum_{i=1}^{n_B} b_i(k) q^{-(i+1)} \quad (3.57)$$

Ce système en boucle fermée est représenté à la figure 3.3. La suite de la démonstration est alors

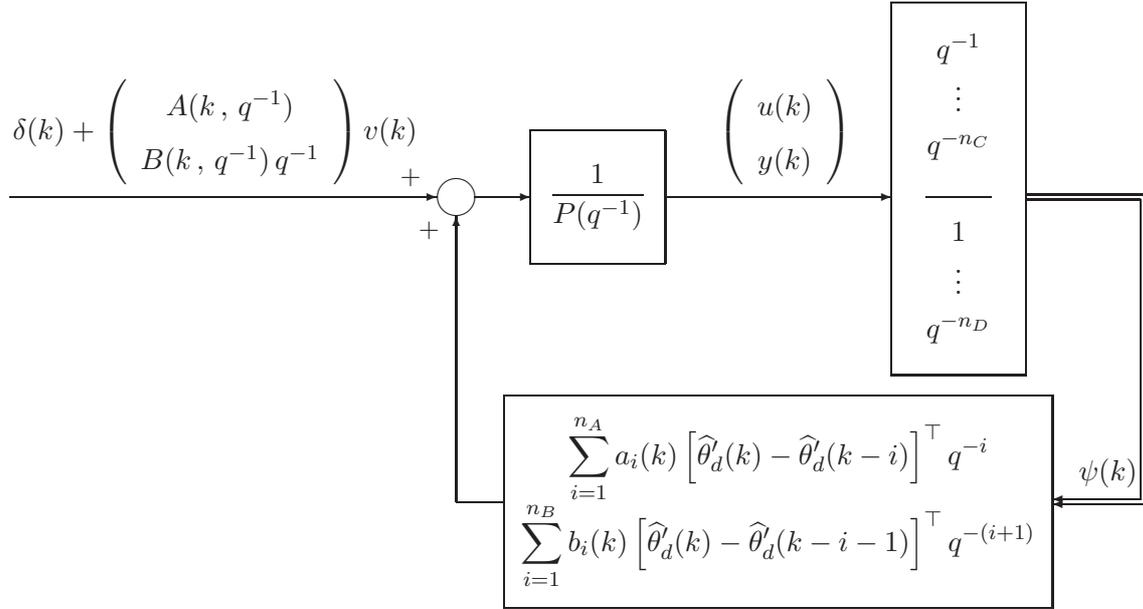


Figure 3.3: Analyse de stabilité pour l'algorithme N° 3

identique à celle de la Propriété 3.1 (Exercice 3.4) en notant que :

1. les suites  $\{\delta(\cdot)\}$  et  $\left\{ \begin{pmatrix} A(\cdot, q^{-1}) \\ B(\cdot, q^{-1}) q^{-1} \end{pmatrix} v(\cdot) \right\}$  sont bornées,
2. Pour tout entier  $i$  (fini), les suites  $\left\{ \hat{\theta}'_d(\cdot) - \hat{\theta}'_d(\cdot - i) \right\}$  tendent vers 0,
3. les zéros de  $z^i$  et  $P(z^{-1})$  sont de module strictement inférieur à 1. □

### 3.3 Exercices

**3.1** Démontrer la Propriété 3.1 dans le cas où le polynôme  $B_i$  est quelconque. Pour cela, on supposera que la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  est telle que les polynômes de la suite  $\{\hat{C}(\cdot, q^{-1})\}$  associée sont uniformément premiers avec  $B_i$ .

A COMPLETER

Cette propriété peut être garantie par projection (voir Chapitre 5).

**3.2** 3.2.1. Compléter la preuve de la Propriété 3.2 en travaillant à partir de la figure 3.2.

3.2.2. Refaire la démonstration complète dans le cas où le polynôme  $B_i$  est quelconque. Pour cela, on supposera que la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  est telle que les polynômes de la suite  $\{\hat{C}(\cdot, q^{-1})\}$  associée sont uniformément premier avec  $B_i$ .

**3.3** Démontrer que dans les Propriétés 3.1 et 3.2, on peut remplacer la propriété P3 par :  
Il existe une suite de carrés sommables  $\{\eta(\cdot)\}$  telle que pour tout  $k$  (voir Exercice 2) :

$$\left| z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k) \right| \leq \eta(k) (1 + \|Z(k)\|) \quad (3.58)$$

**3.4** Compléter la preuve de la Propriété 3.3 en travaillant à partir de la figure 3.3.

**3.5** Montrer que dans les points 2 des Propriétés 3.1 et 3.2, on peut remplacer "est de carrés sommables" par "tend exponentiellement vers 0" lorsque la suite de gains d'observation est choisie telle que l'erreur d'observation a posteriori tend exponentiellement vers 0 (voir Exercice 4). Pour cela, on montrera à l'aide d'une représentation d'état des figures 3.1 ou 3.2 et de la propriété des systèmes linéaires lentement variables que les systèmes bouclés correspondant sont exponentiellement stables.

De la même façon et d'après la remarque dans l'Exercice 4, montrer que, dans la Propriété 3.3, la suite  $\{B(\cdot, q^{-1})q^{-1}v(\cdot) - P(q^{-1})y(\cdot)\}$  est exponentiellement décroissante.

**3.6** Démontrer que, dans le résultat du Lemme 3.1, on peut remplacer la norme  $l^\infty$  par n'importe quelle norme  $l^p$ , précisément, on peut remplacer :

$$\sup_{k \leq K} \|y(k)\| \quad \text{et} \quad \sup_{k \leq K} \|u(k)\|$$

par :

$$\left( \sum_{k=0}^K \|y(k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \left( \sum_{k=0}^K \|u(k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$



## Chapitre 4

# Commande adaptative avec paramètres explicites

### 4.1 Placement de pôles

Supposons que le système à commander peut être décrit par :

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) \quad (4.1)$$

où les polynômes  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux et de degré  $n_A$  et  $n_B$  connus, mais leurs coefficients sont inconnus. Étant donné un polynôme  $P$ , de degré  $n_P$ , dont le terme constant est égal à 1 et tel que les zéros de  $P(z^{-1})$  soient de module strictement inférieur à 1, nous cherchons une loi de commande telle que les pôles du système bouclé soient les zéros de  $P(z^{-1})$ .

D'après la Propriété 1.4, nous savons que la loi de commande est obtenue en résolvant en  $u(k)$  l'équation :

$$v(k) = \Psi(k)^\top \theta_d \quad (4.2)$$

où :

$$\Psi(k) = (u(k) \dots u(k-n_C) y(k) \dots y(k-n_D))^\top, \quad (4.3)$$

avec :

$$n_D = n_A - 1 \quad \text{et} \quad n_C = \text{Max}\{n_B, n_P - n_A\}. \quad (4.4)$$

Dans (4.2), le vecteur  $\theta_d$  est obtenue de la façon suivante :

Soit  $c_i, d_i$  ses composantes ou plus précisément posons :

$$\theta_d = (1, c_1 \dots c_{n_C} d_1 \dots d_{n_D})^\top, \quad (4.5)$$

alors les polynômes  $C$  et  $D$  définis par :

$$C(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_C} c_i q^{-i}, \quad D(q^{-1}) = \sum_{i=1}^{n_D} d_i q^{-i+1} \quad (4.6)$$

vérifient l'équation (1.55), i.e. :

$$AC + z^{-1}BD = P. \quad (4.7)$$

Remarquons que cette équation peut aussi s'écrire :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ a_1 & \ddots & & & b_1 \\ a_2 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_1 & \vdots \\ \vdots & & & a_2 & \vdots \\ 0 & & & \vdots & 0 \end{pmatrix}}_{n_C} \theta_d = \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{n_C+n_A} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

où les  $a_i$  et les  $b_i$  sont les coefficients des polynômes  $A$  et  $B$  et les  $p_i$  sont les coefficients de  $P$  – complétés par des 0 si besoin –. Il est utile de réécrire cette équation sous la forme compacte :

$$M(\theta) \theta_d = P \quad (4.9)$$

avec  $\theta$  le vecteur de paramétrisation explicite suivant :

$$\theta = (b_1, \dots, b_{n_B}, -a_1, \dots, -a_{n_A}). \quad (4.10)$$

En effet, avec cette notation, (4.1) peut aussi s'écrire :

$$y(k) = \Psi(k-1)^\top \theta. \quad (4.11)$$

Par ailleurs, on peut vérifier que la matrice  $M(\theta)$  est inversible si et seulement si les polynômes  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.

Adoptant une approche indirecte pour résoudre notre problème, nous pouvons proposer l'algorithme suivant :

**Algorithme N° 4 :**

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + K(k) \left( y(k) - \Psi(k-1)^\top \hat{\theta}(k-1) \right) \\ P^\top \left( M(\hat{\theta}(k))^{-1} \right)^\top \Psi(k) &= v(k) \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Notons que cet algorithme requiert l'inversion de la matrice  $M(\hat{\theta}(k))$  à chaque instant. Puisque  $\det(M(\theta))$  est un polynôme en les composantes du vecteur  $\theta$ , on voit facilement par récurrence qu'on peut toujours trouver un gain d'observation  $K(k)$  tel que cette matrice soit inversible et que les hypothèses de la Propriété 2.2 soient vérifiées.

**Propriété 4.1** *Supposons que le système à commander satisfait (4.1). Si la suite des gains d'observation est choisie pour que les propriétés P1, P2 et P3 de la Propriété 2.2 chapitre soient vérifiées et qu'il existe une constante  $\beta$  strictement positive telle que, pour tout  $k$  :*

$$\left| \det(M(\hat{\theta}(k))) \right| \geq \beta, \quad (4.13)$$

alors la loi de commande définie par l'algorithme N° 4 assure que :

1. les suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  du système bouclé sont bornées,

2. la suite  $\left\{P(q^{-1})y(\cdot) - \widehat{B}(\cdot, q^{-1})v(\cdot)\right\}$  est de carrés sommables avec  $\widehat{B}$  l'estimée du polynome  $B$  donnée par  $\widehat{\theta}$ .

**Remarque :** S'il est facile de garantir l'inversibilité de  $M(\widehat{\theta}(k))$  pour chaque  $k$ , à ce jour, on ne sait obtenir l'inversibilité "uniforme" demandée en (4.13) qu'en modifiant en fait l'algorithme N° 4. Ces modifications n'étant pas du ressort d'une simple introduction à la commande adaptative, nous ne les présenterons pas.

**Preuve :** Soient  $\widehat{A}(k, q^{-1})$ ,  $\widehat{B}(k, q^{-1})$ ,  $\widehat{C}(k, q^{-1})$  et  $\widehat{D}(k, q^{-1})$  les polynômes obtenus à partir des composantes des vecteurs  $\widehat{\theta}(k)$  et  $\left(M(\widehat{\theta}(k))^{-1}\right)P$ . Par définition ces polynômes vérifient :

$$\widehat{A}(k, z^{-1})\widehat{C}(k, z^{-1}) + z^{-1}\widehat{B}(k, z^{-1})\widehat{D}(k, z^{-1}) = P(z^{-1}). \quad (4.14)$$

Avec ces notations, la suite  $\{\delta(\cdot)\}$  des erreurs d'équation a posteriori s'écrit :

$$\delta(k) = y(k) - \Psi(k-1)^\top \widehat{\theta}(k), \quad (4.15)$$

$$= \widehat{A}(k, q^{-1})y(k) - \widehat{B}(k, q^{-1})u(k-1). \quad (4.16)$$

De même la deuxième équation de (4.12) s'écrit :

$$\widehat{C}(k, q^{-1})u(k) + \widehat{D}(k, q^{-1})y(k) = v(k). \quad (4.17)$$

Regroupant (4.16) et (4.17) on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} \widehat{A}(k, q^{-1}) & -\widehat{B}(k, q^{-1})q^{-1} \\ \widehat{D}(k, q^{-1}) & \widehat{C}(k, q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(k) \\ v(k) \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Faisons agir sur cette égalité entre suites l'opérateur :

$$\begin{pmatrix} \widehat{C}(k, q^{-1}) & \widehat{B}(k, q^{-1})q^{-1} \\ -\widehat{D}(k, q^{-1}) & \widehat{A}(k, q^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Il est alors important de noter que, les opérateurs étant instationnaires, leur *composition* n'est pas isomorphe à la multiplication des polynômes qui leur sont associés. Par exemple, avec  $\circ$  la notation usuelle de l'opération de composition, on a :

$$\widehat{C}(k, q^{-1}) \left[ \widehat{A}(k, q^{-1})y(k) \right] = \left[ \widehat{C}(k, q^{-1}) \circ \widehat{A}(k, q^{-1}) \right] y(k) \quad (4.19)$$

$$= \left[ \widehat{C}(k, q^{-1})\widehat{A}(k, q^{-1}) + \Delta(k, q^{-1}) \right] y(k) \quad (4.20)$$

où  $\Delta(k, q^{-1})$  est l'opérateur défini par :

$$\Delta(k, q^{-1}) = \left[ \sum_{i=1}^{n_C} \sum_{j=0}^{n_A} c_i(k) [a_j(k-i) - a_j(k)] q^{-(i+j)+1} \right] q^{-1}. \quad (4.21)$$

Ses coefficients sont donc obtenus comme produit d'un coefficient par une différence de coefficients. À noter également que c'est un opérateur strictement causal. On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} \widehat{C}(k, q^{-1}) & \widehat{B}(k, q^{-1})q^{-1} \\ -\widehat{D}(k, q^{-1}) & \widehat{A}(k, q^{-1}) \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \widehat{A}(k, q^{-1}) & -\widehat{B}(k, q^{-1})q^{-1} \\ \widehat{D}(k, q^{-1}) & \widehat{C}(k, q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta(k) \\ v(k) \end{pmatrix} \right] = 0. \quad (4.22)$$

En utilisant (4.14) et (4.20), on en déduit :

$$P(q^{-1}) \begin{pmatrix} y(k) \\ u(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1(k, q^{-1}) & \Delta_2(k, q^{-1}) q^{-1} \\ \Delta_3(k, q^{-1}) & \Delta_4(k, q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(k-1) \\ u(k-1) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$+ \begin{pmatrix} \widehat{C}(k, q^{-1}) & \widehat{B}(k, q^{-1}) q^{-1} \\ -\widehat{D}(k, q^{-1}) & \widehat{A}(k, q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta(k) \\ v(k) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\Delta_1 = \left[ \widehat{C} \circ \widehat{A} - \widehat{C} \widehat{A} + \widehat{B} \circ q^{-1} \circ \widehat{D} + \widehat{B} \widehat{D} \circ q^{-1} \right] \circ q \quad (4.24)$$

$$\Delta_2 = \left[ \widehat{B} \circ q^{-1} \circ \widehat{C} - \widehat{C} \circ \widehat{B} \circ q^{-1} \right] \circ q \quad (4.25)$$

$$\Delta_3 = \left[ \widehat{A} \circ \widehat{D} - \widehat{D} \widehat{A} \right] \circ q \quad (4.26)$$

$$\Delta_4 = \left[ \widehat{D} \circ \widehat{B} \circ q^{-1} - \widehat{D} \widehat{B} \circ q^{-1} + \widehat{A} \circ \widehat{C} - \widehat{A} \widehat{C} \right] \circ q \quad (4.27)$$

Ces opérateurs  $\Delta_i$  ont donc pour coefficients des produits de composantes de  $\widehat{\theta}(k)$  ou de  $\left( M(\widehat{\theta}(k))^{-1} \right) P$  par des composantes de différences  $\widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-i)$  ou  $\left( M(\widehat{\theta}(k))^{-1} - M(\widehat{\theta}(k-i))^{-1} \right) P$ , avec  $i$  dans  $\{1, \dots, n_A + n_C\}$ . Or d'après P1 et P2', la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$  est bornée et les suites  $\{\widehat{\theta}(\cdot) - \widehat{\theta}(\cdot - i)\}$  sont de carrés sommables. Grâce à (4.13), on vérifie facilement qu'il en est de même de  $\left\{ \left( M(\widehat{\theta}(\cdot))^{-1} \right) P \right\}$  et de  $\left\{ \left( M(\widehat{\theta}(\cdot))^{-1} - M(\widehat{\theta}(\cdot - i))^{-1} \right) P \right\}$ . On en déduit que chacune des suites des coefficients des opérateurs  $\{\Delta_i\}_{i=1,4}$  est de carrés sommables.

En posant alors :

$$\psi(k) = (u(k-1), \dots, u(k-n), y(k-1), \dots, y(k-n)) , \quad (4.28)$$

avec :

$$n = \max \{n_A + n_B, n_P\} , \quad (4.29)$$

l'équation (4.22), caractérisant le système en boucle fermée, permet de le représenter à la figure 4.1. Nous savons que :

1. la suite de matrices  $\{\Delta(\cdot)\}$  est de carrés sommables,
2. les zéros de  $R(z^{-1})$  étant dans le disque unité ouvert,
3. la suite  $\{\delta(\cdot)\}$  est de carrés sommables,
4. la suite  $\{v(\cdot)\}$  est bornée.

Donc en appliquant le théorème des petits gains comme au chapitre 3, nous pouvons établir la bornitude des suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$ .

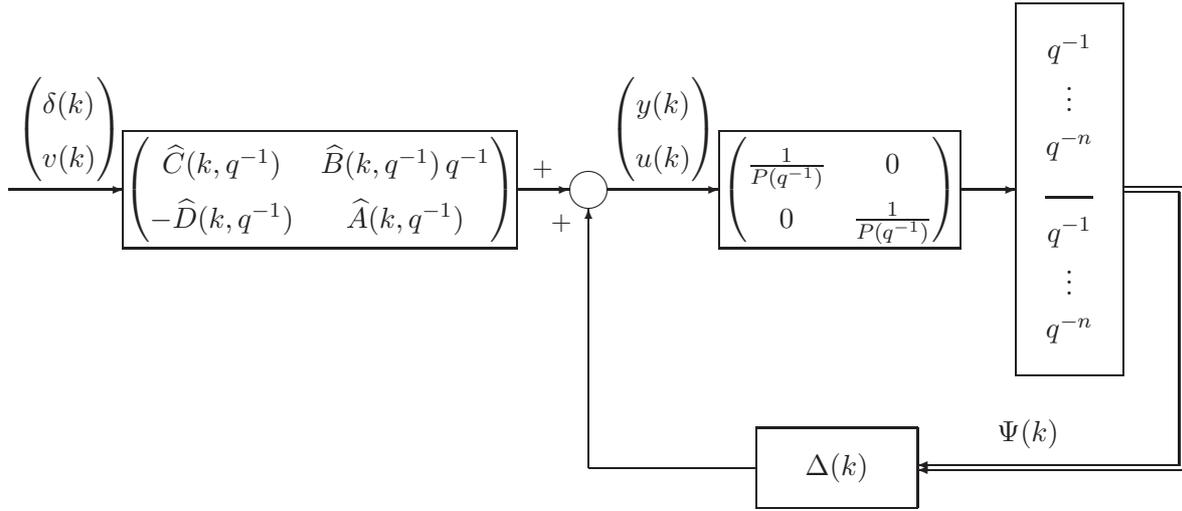


Figure 4.1: Analyse de stabilité pour l'algorithme N° 3

Notre conclusion résulte directement de l'égalité :

$$P(q^{-1})y(k) - \widehat{B}(k, q^{-1})q^{-1}v(k) = \tag{4.30}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta_1(k, q^{-1}) & \Delta_2(k, q^{-1})q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(k-1) \\ u(k-1) \end{pmatrix} + \widehat{C}(k, q^{-1})\delta(k)$$

où les termes de la seconde ligne sont des sommes finies de multiplications d'éléments de suite bornées par des éléments de suites de carrés sommables.  $\square$



## Chapitre 5

# Compléments sur l'estimation des paramètres

### 5.1 Convergence des paramètres estimés

Au chapitre 2, nous avons établi les propriétés P1, P2 et P3 pour la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  de vecteur de paramètres estimés. Pour cela, notre seule hypothèse était l'existence d'un vecteur  $\theta$  tel que :

$$\begin{aligned}\theta(k) &= \theta(k-1) = \theta \\ z(k) &= Z(k)^\top \theta(k-1)\end{aligned}\tag{5.1}$$

Cependant, nous n'avons pas démontré la convergence de la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  vers ce vecteur  $\theta$ . Si le système (5.1) était stationnaire, c'est à dire si  $Z$  était constant, la théorie de l'observateur nous indique qu'on pourrait toujours trouver un gain d'observation garantissant une *convergence exponentielle* vers 0 de la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot) - \theta\}$  si et seulement si le système est observable. Ce résultat s'étend au cas instationnaire :

**Propriété 5.1** *Supposons que, dans (5.1), la suite  $\{Z(\cdot)\}$  est bornée. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout scalaire  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , il existe une suite bornée  $\{K(\cdot)\}$  et une constante  $a$  telles que, pour tout  $k$  et  $q$  :*

$$\left\| \prod_{i=k+1}^{k+q} \left( I - K(i)Z(i)^\top \right) \right\| \leq a \lambda^q\tag{5.2}$$

2. *Il existe un entier  $l$  et une constante strictement positive  $\sigma$  tels que, pour tout  $k$  :*

$$\sum_{i=k+1}^{k+l} Z(i)Z(i)^\top \geq \sigma I\tag{5.3}$$

**Preuve :** 1  $\implies$  2

Posons :

$$F(m, n) = \prod_{k=n+1}^m \left( I - K(k)Z(k)^\top \right), \quad F(m, m) = I\tag{5.4}$$

On a par construction :

$$F(m, n) = F(m, n+1) \left( I - K(n+1)Z(n+1)^\top \right)\tag{5.5}$$

$$= F(m, n+1) - F(m, n+1)K(n+1)Z(n+1)^\top\tag{5.6}$$

On en déduit :

$$F(m, n) = I - \sum_{k=n+1}^m F(m, k)K(k)Z(k)^\top. \quad (5.7)$$

D'après la propriété 1, pour tout vecteur  $x$ , l'inégalité suivante est vérifiée pour tout  $m$  et  $n$  :

$$\|x\| - \sum_{k=n+1}^m \|F(m, k)K(k)\| |Z(k)^\top x| \leq a \lambda^{m-n} \|x\|. \quad (5.8)$$

De plus, puisque la suite  $\{K(\cdot)\}$  est bornée, il existe une constante  $c$ , dépendant de  $\lambda$ , telle que, pour tout  $m$  et  $n$  :

$$\|x\| - ca \sum_{k=n+1}^m |Z(k)^\top x| \leq a \lambda^{m-n} \|x\|. \quad (5.9)$$

Avec l'inégalité de Schwarz, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^m |Z(k)^\top x| \leq \sqrt{m-n} \left( x^\top \sum_{k=n+1}^m Z(k)Z(k)^\top x \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.10)$$

Ainsi, pour tout  $m$  et  $n$ , on a :

$$\left( \frac{1 - a\lambda^{m-n}}{ca} \right)^2 \frac{1}{m-n} x^\top x \leq x^\top \sum_{k=n+1}^m Z(k)Z(k)^\top x. \quad (5.11)$$

Les constantes  $a$  et  $c$  étant fixées par le choix de  $\lambda$ , nous pouvons trouver un entier  $l$  tel que :

$$\lambda^l \leq \frac{1}{2a}. \quad (5.12)$$

On en déduit que la propriété 2 est satisfaite avec :

$$\sigma = \left( \frac{1}{2ca} \right)^2 \frac{1}{l}. \quad (5.13)$$

2  $\implies$  1

Prenons le gain d'observation donné par l'algorithme des moindres carrés avec facteur d'oubli :

$$K(k) = P(k)Z(k)^\top \quad (5.14)$$

$$P(k)^{-1} = \lambda^2 P(k-1)^{-1} + Z(k)Z(k)^\top \quad (5.15)$$

D'après la propriété 2, on a :

$$P(k)^{-1} = \sum_{i=k-l+1}^k \lambda^{2(k-i)} Z(i)Z(i)^\top + \lambda^{2(k-l)} \sum_{i=0}^{k-l} \lambda^{2(l-i)} Z(i)Z(i)^\top \geq \sigma \lambda^{2(l-1)} I \quad (5.16)$$

De plus, la suite  $\{Z(\cdot)\}$  étant supposée bornée, il existe une constante  $z$  telle que :

$$P(k)^{-1} \leq \frac{z}{1-\lambda^2} I \quad (5.17)$$

Considérons donc le système :

$$\tilde{\theta}(k) = \left( I - P(k)Z(k)Z(k)^\top \right) \tilde{\theta}(k-1) \quad (5.18)$$

et posons :

$$V(k) = \tilde{\theta}(k)^\top P(k)^{-1} \tilde{\theta}(k) \quad (5.19)$$

On calcule :

$$V(k) = \tilde{\theta}(k-1)^\top P(k)^{-1} \tilde{\theta}(k-1) - \left( Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1) \right)^2 \left( 2 - Z(k)^\top P(k) Z(k) \right) \quad (5.20)$$

$$= \lambda^2 V(k-1) - \left( Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1) \right)^2 \left( 1 - Z(k)^\top P(k) Z(k) \right) \quad (5.21)$$

Or, avec le Lemme d'inversion matricielle 2.3, on obtient :

$$Z(k)^\top P(k) Z(k) = \frac{Z(k)^\top P(k-1) Z(k)}{\lambda^2 + Z(k)^\top P(k-1) Z(k)} \leq 1 \quad (5.22)$$

Donc :

$$V(k) \leq \lambda^2 V(k-1) \quad (5.23)$$

Ceci implique pour tout  $k$  et  $q$  :

$$V(k+q) \leq \lambda^{2q} V(k) \quad (5.24)$$

Mais avec (5.16) et (5.17) et la définition de  $V$ , ceci montre :

$$\sigma \lambda^{2(l-1)} \left\| \tilde{\theta}(k+q) \right\|^2 \leq \lambda^{2q} \frac{z}{1-\lambda^2} \left\| \tilde{\theta}(k) \right\|^2 \quad (5.25)$$

D'où la propriété 1, avec :

$$a = \left( \frac{z}{\sigma(1-\lambda^2)\lambda^{2(l-1)}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \square \quad (5.26)$$

**Remarques :** 1. Pour la preuve de  $1 \implies 2$ , il suffit qu'il existe un  $\lambda$  strictement inférieur à 1. Nous avons donc établi le résultat plus fort :

*Si il existe une suite bornée  $\{K(\cdot)\}$  telle que l'inégalité (5.2) est satisfaite pour une valeur de  $\lambda$  strictement inférieure à 1, alors pour toute valeur de  $\lambda$ , on peut trouver une suite bornée  $\{K(\cdot)\}$  la satisfaisant.*

2. La condition (5.3) de la propriété 2 signifie que la matrice  $(Z(k+1) \dots Z(k+l))$  est de rang plein. Ceci montre que la suite  $\{Z(\cdot)\}$  engendre régulièrement l'espace tout entier. La condition (5.3) est appelée condition de *balayage persistant*.

En pratique, la suite  $\{Z(\cdot)\}$  est obtenue à partir des signaux mesurés d'un système. On peut se poser la question de savoir comment satisfaire cette condition de balayage persistant. Pour ce faire une idée sur la question, supposons que  $Z(k)$  soit l'état à l'instant  $k$  d'un système linéaire stationnaire de dimension  $p$  de commande scalaire  $u$  :

$$Z(k+1) = F Z(k) + G u(k) \quad (5.27)$$

On a (voir Exercice 5.1) :

**Propriété 5.2** *Supposons la paire  $(F, G)$  commandable. Si il existe une constante  $\alpha$  strictement positive et un entier  $m$  plus grand ou égal à  $p-1$  tels qu'on ait, pour tout  $k$  :*

$$\sum_{i=k}^{k+m} \begin{pmatrix} u(i) \\ \vdots \\ u(i+p-1) \end{pmatrix} (u(i) \dots u(i+p-1)) \geq \alpha I \quad (5.28)$$

alors il existe une constante  $\beta$  strictement positive telle que, pour tout  $k$  :

$$\sum_{i=k}^{k+p+m} Z(i)Z(i)^\top \geq \beta \alpha I \quad (5.29)$$

La condition (5.28) est dite condition d'*excitation persistante*. Pour la satisfaire, une suite  $\{u(\cdot)\}$  doit exhiber un comportement suffisamment irrégulier dans le temps. Par exemple cette suite devra être une suite périodique d'impulsions :

$$\left. \begin{array}{l} u(kT) = 1 \\ u(kT + j) = 0, \quad 0 < j < T \end{array} \right\} \forall k, \quad T > p \quad (5.30)$$

ou contenir au moins  $m$  fréquences distinctes (Exercice 5.2) :

$$u(k) = \sum_{i=0}^m u_i \sin(\omega_i k + \phi_i) \quad (5.31)$$

avec  $u_i \neq 0$  et  $\omega_i \neq \omega_j$  si  $i$  est différent de  $j$ . On pourrait réexprimer cette Propriété 5.2 en écrivant : *Un système commandable transforme une excitation persistante dans le temps en un balayage persistant de l'espace.*

Une autre façon d'établir que la condition de balayage persistant est vérifiée est de montrer que la suite  $\{Z(\cdot)\}$  se rapproche suffisamment d'une suite la satisfaisant (Exercices 5.3 et 5.4) :

**Lemme 5.1** *Soit  $\{Z_m(\cdot)\}$  une suite de vecteurs satisfaisant la condition de balayage persistant. Il existe  $\varepsilon$  tel que si, pour une constante  $c$ , on a pour tout  $k$  et  $K$  :*

$$\sum_{i=k+1}^{k+K} \|Z(i) - Z_m(i)\| \leq \varepsilon K + c \quad (5.32)$$

*alors la suite  $\{Z(\cdot)\}$  vérifie aussi la condition de balayage persistant.*

Nous avons donc établi que, si la condition de balayage persistant est réalisée, on peut trouver une suite de gains d'observation donnant une convergence exponentielle de la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  des paramètres adaptés vers le vecteur  $\theta$ . Malheureusement, et surtout dans le cas de la commande adaptative, cette condition peut ne pas être satisfaite. De plus, le choix de la suite de gains d'observation peut ne pas être appropriée. Il est alors important de remarquer la conséquence suivante des propriétés P1, P2 et P3 de la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  :

**Lemme 5.2** *Si la suite  $\{Z(\cdot)\}$  est bornée et la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  vérifie les propriétés P1, P2 et P3, alors :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(k)^\top \left( \limsup_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{i=k}^{k+K-1} Z(i)Z(i)^\top \right) \tilde{\theta}(k) = 0. \quad (5.33)$$

**Preuve :** D'après P2 et P3, nous savons que, pour toute constante  $\varepsilon$  strictement positive, on peut trouver un instant  $k_0$  tel que, pour tout  $k$  supérieur à  $k_0$ ,

$$\tilde{\theta}(k)^\top Z(k)Z(k)^\top \tilde{\theta}(k) \leq \varepsilon, \quad \left\| \hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1) \right\| \leq \varepsilon. \quad (5.34)$$

De plus la suite  $\{Z(\cdot)\}$  étant bornée par hypothèse et la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$  d'après P1, il existe des constantes  $z$  et  $t$  telles que pour tout  $k$  :

$$\|Z(k)\| \leq z \quad , \quad \|\widetilde{\theta}(k)\| \leq t . \quad (5.35)$$

Alors le résultat est une conséquence directe des inégalités suivantes, pour tout  $K$  et tout  $k$  plus grand que  $k_0$  :

$$\begin{aligned} & \widetilde{\theta}(k)^\top \left( \frac{1}{K} \sum_{i=k}^{k+K-1} Z(i)Z(i)^\top \right) \widetilde{\theta}(k) \\ &= \frac{1}{K} \sum_{i=k}^{k+K-1} \left( Z(i)^\top \widetilde{\theta}(i) \right)^2 + \frac{1}{K} \sum_{i=k}^{k+K-1} \left( \widetilde{\theta}(k) - \widetilde{\theta}(i) \right)^\top Z(i)Z(i)^\top \left( \widetilde{\theta}(k) + \widetilde{\theta}(i) \right) , \\ &\leq \frac{1}{K} \sum_{i=k}^{k+K-1} \left( Z(i)^\top \widetilde{\theta}(i) \right)^2 + \frac{2tz^2}{K} \sum_{i=k}^{k+K-1} \left| \widetilde{\theta}(k) - \widetilde{\theta}(i) \right|^\top , \\ &\leq \frac{1}{K} \sum_{i=k}^{k+K-1} \left( Z(i)^\top \widetilde{\theta}(i) \right)^2 + \frac{2tz^2}{K} \sum_{i=k}^{k+K-1} \left| \sum_{j=k+1}^i \widetilde{\theta}(j-1) - \widetilde{\theta}(j) \right|^\top , \\ &\leq \frac{1}{K} \sum_{i=k}^{k+K-1} \left( Z(i)^\top \widetilde{\theta}(i) \right)^2 + \frac{2tz^2}{K} \sum_{j=k+1}^{k+K-1} (k+K-j) \left| \widetilde{\theta}(j-1) - \widetilde{\theta}(j) \right|^\top , \\ &\leq \varepsilon^2 + \varepsilon z^2 t \frac{K-1}{K} . \quad \square \end{aligned}$$

Ainsi lorsque la suite  $\{Z(\cdot)\}$  est bornée, le Lemme 5.2 implique :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \widehat{\theta}(k) - \theta \right)^\top \left[ \liminf_{k \rightarrow \infty} \limsup_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{i=k}^{k+K-1} Z(i)Z(i)^\top \right] \left( \widehat{\theta}(k) - \theta \right) = 0 \quad (5.36)$$

Nous avons donc établi :

**Propriété 5.3** *Si la suite  $\{Z(\cdot)\}$  est bornée et la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$  vérifie les propriétés P1, P2 et P3, alors la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$  converge vers  $\theta$  dans le sous-espace image de la matrice*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \limsup_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{i=k}^{k+K-1} Z(i)Z(i)^\top .$$

*Il y a donc convergence vers le vecteur  $\theta$  si cette matrice est définie positive.*

Au contraire de la Propriété 5.1, la convergence obtenue dans la Propriété 5.3 peut ne pas être exponentielle. De plus, pour certains algorithmes, on peut trouver des conditions encore moins restrictives de convergence. Ainsi, pour l'algorithme de projection régularisé (2.56), on a (Exercice 5.5) :

**Propriété 5.4** *Si il existe une suite de nombre entier  $\{L(\cdot)\}$  bornée par  $l$  telle que :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k \lambda_{\min} \left\{ \sum_{j=L(i)}^{L(i+1)-1} \frac{Z(k)Z(i)^\top}{r + Z(k)^\top Z(k)} \right\} = \infty \quad (5.37)$$

où la suite  $\{L(\cdot)\}$  est définie par :

$$L(0) = 0 \quad , \quad L(i+1) = L(i) + l(i) \quad (5.38)$$

alors pour toute condition initiale, la solution correspondante de :

$$\tilde{\theta}(k) = \left( I - \frac{Z(k)Z(k)^\top}{r + Z(k)^\top Z(k)} \right) \tilde{\theta}(k-1) \quad , \quad r > 0 \quad (5.39)$$

converge vers 0.

Pour l'algorithme des moindres carrés pondérés, la convergence de la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  a toujours lieu mais vers un vecteur qui n'est pas nécessairement  $\theta$  :

**Propriété 5.5** Les solutions de :

$$\tilde{\theta}(k) = \left( I - \frac{P(k-1)Z(k)Z(k)^\top}{r(k) + Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \right) \tilde{\theta}(k-1) \quad (5.40)$$

$$P(k) = \left( I - \frac{P(k-1)Z(k)Z(k)^\top}{r(k) + Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \right) P(k-1) \quad , \quad P(0) > 0 \quad , \quad r(k) > 0 \quad (5.41)$$

convergent pour toute condition initiale. De plus si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{\min} \left\{ \sum_{i=0}^k \frac{Z(i)Z(i)^\top}{r(i)} \right\} = \infty \quad (5.42)$$

alors les solutions convergent vers 0.

**Preuve :** Un calcul direct donne :

$$P(k)^{-1} \tilde{\theta}(k) = P(k-1)^{-1} \tilde{\theta}(k-1) = P(0)^{-1} \tilde{\theta}(0) \quad (5.43)$$

Il suffit donc de montrer que la suite  $\{P(\cdot)\}$  converge. Ceci est une conséquence directe de la définition de cette suite. En effet cette suite est une suite décroissante de matrices symétriques positives. Donc, pour tous les vecteurs de base unitaires  $e_i$  et  $e_j$  et pour tout scalaire  $\alpha$ , la suite  $\{(e_i + \alpha e_j)^\top P(\cdot)(e_i + \alpha e_j)\}$  est décroissante et positive. Ceci implique la convergence de toutes les suites  $\{P_{ij}(\cdot)\}$ , éléments de  $\{P(\cdot)\}$ . La deuxième partie de la Propriété est alors une conséquence directe du Lemme d'inversion matricielle 2.3 qui nous donne :

$$P(k) = \left( P(0)^{-1} + \sum_{i=0}^k \frac{Z(i)Z(i)^\top}{r(i)} \right)^{-1} \quad (5.44)$$

□

**Remarque :** La convergence donnée par cet algorithme des moindres carrés n'est jamais exponentielle si la suite  $\{Z(\cdot)/\sqrt{r(\cdot)}\}$  est bornée. En effet, d'après la Preuve ci-dessus, nous avons pour tout  $k$  :

$$\|\tilde{\theta}(k)\| \geq \lambda_{\min} \{P(k)\} \|P(0)^{-1} \tilde{\theta}(0)\| \quad (5.45)$$

$$\geq \frac{\lambda_{\min} \{P(0)^{-1}\}}{\lambda_{\max} \{P(k)^{-1}\}} \|\tilde{\theta}(0)\| \quad (5.46)$$

$$\geq \frac{\lambda_{\min} \{P(0)^{-1}\}}{\text{tr} \{P(0)^{-1}\} + \sum_{i=0}^k \frac{Z(i)Z(i)^\top}{r(i)}} \|\tilde{\theta}(0)\| \quad (5.47)$$

$$\geq \frac{\lambda_{\min} \{P(0)^{-1}\}}{\text{tr} \{P(0)^{-1}\} + (k+1)z^2} \|\tilde{\theta}(0)\| \quad (5.48)$$

où  $z^2$  est la borne de la suite  $\left\{ \frac{Z(\cdot)^\top P(0)Z(\cdot)}{r(\cdot)} \right\}$ .

## 5.2 Filtrage des signaux dans l'estimation

### 5.3 Algorithme d'estimation avec zone morte

Considérons maintenant le cas où l'équation d'observation est :

$$z(k) = Z(k)^\top \theta + d(k) \quad (5.49)$$

où  $\{d(\cdot)\}$  est une suite bornée. Si nous prenons pour algorithme d'estimation, un observateur du type :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k) \left( z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1) \right), \quad (5.50)$$

l'erreur paramétrique :

$$\tilde{\theta}(k) = \hat{\theta}(k) - \theta \quad (5.51)$$

satisfait :

$$\tilde{\theta}(k) = \tilde{\theta}(k-1) - K(k) \left( Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1) + d(k) \right). \quad (5.52)$$

Ainsi, lorsque  $Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1)$  est non nul, nous avons :

$$\tilde{\theta}(k) = (I - a(k)K(k)Z(k)^\top) \tilde{\theta}(k-1), \quad (5.53)$$

avec :

$$a(k) = \frac{e(k)}{e(k) - d(k)}, \quad e(k) = z(k) - Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1). \quad (5.54)$$

Si on compare (5.53) avec (2.6), on voit que l'effet de la perturbation  $d$  est de modifier le gain d'observation  $K(k)$  en  $a(k)K(k)$ . Cette modification ne porte pas sur l'orientation mais sur l'amplitude et la direction. En particulier, si selon (2.27),  $K(k)$  est donné par

$$K(k) = \alpha(k) \frac{P(k-1)Z(k)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}, \quad (5.55)$$

l'effet de la perturbation  $d$  est de modifier  $\alpha(k)$  en  $a(k)$ . Donc, d'après la Propriété 2.1, en prenant  $P(k)$  satisfaisant :

$$P_s \geq P(k) \geq \left( I - \beta(k)K(k)Z(k)^\top \right) P(k-1), \quad (5.56)$$

i.e.  $\beta(k) = 0$ , la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  est bornée si on a :

$$0 \leq a(k)\alpha(k) \leq 2 \quad (5.57)$$

ou encore

$$0 \leq \frac{e(k)\alpha(k)}{e(k) - d(k)} \leq 2. \quad (5.58)$$

Lorsque  $d(k)$  peut être quelconque, il n'existe aucune façon de choisir  $\alpha(k)$  pour garantir que cette condition est satisfaite. Par contre, si nous connaissons un réel  $\Delta$  tel que :

$$|d(k)| \leq \Delta \quad \forall k \geq 0, \quad (5.59)$$

alors nous voyons que le signe du rapport  $\frac{e(k)}{e(k) - d(k)}$  est positif lorsque nous avons :

$$|e(k)| \geq \Delta. \quad (5.60)$$

dans ce cas, on obtient l'estimation :

$$\frac{\alpha(k)}{1 + \frac{\Delta}{|e(k)|}} \leq \frac{\alpha(k)e(k)}{e(k) - d(k)} \leq \frac{\alpha(k)}{1 - \frac{\Delta}{|e(k)|}} . \quad (5.61)$$

Pour satisfaire (5.58), ceci nous conduit à choisir  $\alpha(k)$  comme :

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= \gamma(k) \left(1 - \frac{\Delta}{|e(k)|}\right) & \text{si } |e(k)| \geq \Delta , \\ &= 0 & \text{sinon ,} \end{aligned} \quad (5.62)$$

avec :

$$0 \leq \gamma(k) \leq 2 . \quad (5.63)$$

Ce choix pour  $\alpha(k)$  s'écrit de façon équivalente comme :

$$\alpha(k) = \gamma(k) \max \left\{ 1 - \frac{\Delta}{|e(k)|}, 0 \right\} . \quad (5.64)$$

Ainsi le gain d'observation est pris nul lorsque l'erreur d'équation ou d'observation a priori est inférieur en module au seuil  $\Delta$  sur la perturbation. L'algorithme d'estimation est alors dit à *zone morte* .

Il nous reste maintenant à étudier ce que deviennent les propriétés P1, P2 et P3. Nous avons :

**Propriété 5.6** *Étant donné  $\Delta$ , supposons qu'il existe un vecteur  $\theta$  satisfaisant :*

$$|z(k) - Z(k)^\top \theta| \leq \Delta - \eta \quad \forall k \geq 0 , \quad (5.65)$$

avec  $\eta$  un réel positif ou nul et où les suites  $\{z(\cdot)\}$  et  $\{Z(\cdot)\}$  sont des suites non nécessairement ornées. Définissons la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  par :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \alpha(k) \frac{P(k-1)Z(k)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} (z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1)) , \quad (5.66)$$

avec :

$$\alpha(k) = \gamma(k) \max \left\{ 1 - \frac{\Delta}{|e(k)|}, 0 \right\} , \quad (5.67)$$

$$P_s \geq P(k) \geq \left( I - \beta(k) \alpha(k) \frac{P(k-1)Z(k)Z(k)^\top}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \right) P(k-1) , \quad (5.68)$$

où  $P_s$  et  $P(0)$  sont des matrices symétriques définies positives et :

$$\gamma(k) \geq 0 \quad , \quad 1 - \varepsilon\gamma(k) > 0 \quad (5.69)$$

$$\begin{cases} \frac{|e(k)|}{|e(k)| + \Delta} \frac{2 - \varepsilon - \gamma(k)}{1 - \varepsilon\gamma(k)} \geq \beta(k) \geq 0 & \text{si } |e(k)| > \Delta , \\ \beta(k) = 0 & \text{si } |e(k)| \leq \Delta , \end{cases} \quad (5.70)$$

$$\frac{(1 - \gamma(k))^2}{\gamma(k)} Z(k)^\top P(k-1)Z(k) \leq C \quad (5.71)$$

où  $\varepsilon > 0$  et  $C$  sont des constantes. Dans ces conditions,

**P1** : la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  est bornée,

**P2'** : la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot) - \widehat{\theta}(\cdot - 1)\}$  est de carrés sommables,

**P2''** : si  $\eta > 0$  et la suite  $\{Z(\cdot)^\top P(\cdot - 1)Z(\cdot)\}$  est bornée, la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot) - \widehat{\theta}(\cdot - 1)\}$  est sommable et donc la suite  $\{\widehat{\theta}(\cdot)\}$  converge,

**P3''** : la suite  $\{\max\{|z(\cdot) - Z(\cdot)^\top \widehat{\theta}(\cdot)| - \Delta, 0\}\}$  est de carrés sommables.

**Preuve** : Commençons par rappeler que , puisque nous avons :

$$|d(k)| \leq \Delta ,$$

les définitions (5.54) de  $a(k)$  et (5.67) de  $\alpha(k)$  donnent :

$$a(k)\alpha(k) = \frac{e(k)}{e(k) - d(k)} \gamma(k) \max\left\{1 - \frac{\Delta}{|e(k)|}, 0\right\} , \quad (5.72)$$

$$= \frac{|e(k)|}{|e(k) - d(k)|} \gamma(k) \max\left\{1 - \frac{\Delta}{|e(k)|}, 0\right\} , \quad (5.73)$$

$$= \gamma(k) \frac{\max\{|e(k)| - \Delta, 0\}}{|e(k) - d(k)|} . \quad (5.74)$$

et, lorsque  $|e(k)| \geq \Delta$ ,

$$\frac{|e(k)|}{|e(k)| + \Delta} \leq \frac{|e(k)|}{|e(k) + d|} = a(k) \leq \frac{|e(k)|}{|e(k)| - \Delta} . \quad (5.75)$$

Nous avons aussi :

$$0 \leq a(k)\alpha(k) \leq \gamma(k) . \quad (5.76)$$

Ceci permet en particulier d'écrire l'égalité :

$$\alpha(k) (z(k) - Z(k)^\top \widehat{\theta}(k - 1)) = Z(k)^\top \widetilde{\theta}(k - 1) a(k) \alpha(k) . \quad (5.77)$$

Observons alors les 3 points suivants :

1. Nous avons :

$$|z(k) - Z(k)^\top \widehat{\theta}(k)| = \left|1 - \gamma(k) \max\left\{1 - \frac{\Delta}{|e(k)|}, 0\right\}\right| |z(k) - Z(k)^\top \widehat{\theta}(k - 1)| , \quad (5.78)$$

$$= |e(k)| - \gamma(k) \max\{|e(k)| - \Delta, 0\} . \quad (5.79)$$

Donc, pour  $|e(k)| \leq \Delta$ , nous avons :

$$|z(k) - Z(k)^\top \widehat{\theta}(k)| - \Delta \leq 0 \leq |1 - \gamma(k)| \max\{|e(k)| - \Delta, 0\} . \quad (5.80)$$

Dans l'autre cas  $\Delta < |e(k)|$ , nous avons :

$$|z(k) - Z(k)^\top \widehat{\theta}(k)| - \Delta \leq |(1 - \gamma(k)) |e(k)| + \gamma(k)\Delta| - \Delta , \quad (5.81)$$

$$\leq |(1 - \gamma(k)) (|e(k) - \Delta) + \Delta| - \Delta , \quad (5.82)$$

$$\leq |1 - \gamma(k)| (|e(k)| - \Delta) , \quad (5.83)$$

$$\leq |1 - \gamma(k)| \max\{|e(k)| - \Delta, 0\} . \quad (5.84)$$

Puisque la suite  $\left\{\frac{(1-\gamma(\cdot))^2}{\gamma(\cdot)} Z(\cdot)^\top P(\cdot - 1)Z(\cdot)\right\}$  est bornée par hypothèse, on en conclut que la propriété P3'' est satisfaite si la suite  $\left\{\frac{\gamma(\cdot) \max\{|e(\cdot)| - \Delta, 0\}^2}{Z(\cdot)^\top P(\cdot - 1)Z(\cdot)}\right\}$  est sommable. Or nous avons :

$$|Z(k)^\top \widetilde{\theta}(k - 1)|^2 a(k)^2 \alpha(k)^2 = |e(k) - d(k)|^2 \frac{|e(k)|^2}{|e(k) - d(k)|^2} \gamma(k)^2 \max\left\{1 - \frac{\Delta}{|e(k)|}, 0\right\}^2 . \quad (5.85)$$

La suite qui nous intéresse satisfait donc :

$$\frac{\gamma(k) \max\{|e(k)| - \Delta, 0\}^2}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} = \frac{|Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1)|^2 a(k) \alpha(k)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \frac{a(k) \alpha(k)}{\gamma(k)}, \quad (5.86)$$

$$\leq \frac{|Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1)|^2 a(k) \alpha(k)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}, \quad (5.87)$$

où nous avons utilisé l'inégalité :

$$\frac{a(k) \alpha(k)}{\gamma(k)} = \frac{\max\{|e(k)| - \Delta, 0\}}{|e(k) - d(k)|} \leq 1. \quad (5.88)$$

Ainsi il nous suffit d'établir que la suite :

$$s(k) = \frac{|Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1)|^2 a(k) \alpha(k)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \quad (5.89)$$

est sommable.

2. Nous avons :

$$\|\hat{\theta}(k) - \hat{\theta}(k-1)\| = \gamma(k) \nu(k) |z(k) - Z(k)^\top \hat{\theta}(k-1)| \frac{\|P(k-1)Z(k)\|}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}, \quad (5.90)$$

$$\leq \gamma(k) \max\{|e(k)| - \Delta, 0\} \frac{\sqrt{Z(k)^\top P(k-1)^2 Z(k)}}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}, \quad (5.91)$$

$$\leq \frac{\gamma(k) \max\{|e(k)| - \Delta, 0\}}{\sqrt{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}} \sqrt{\lambda \max\{P_s\}}. \quad (5.92)$$

Puisque la suite  $\{\gamma(\cdot)\}$  est bornée, la propriété P2 est aussi une conséquence de la sommabilité de la suite  $\left\{ \frac{\gamma(\cdot) \max\{|e(\cdot)| - \Delta, 0\}^2}{Z(\cdot)^\top P(\cdot-1)Z(\cdot)} \right\}$  et donc de celle de  $\{s(\cdot)\}$ . De plus la propriété P2'' est satisfaite si la suite  $\{Z(\cdot)^\top P(\cdot-1)Z(\cdot)\}$  est bornée et la suite  $\left\{ \frac{\gamma(\cdot) \max\{|e(\cdot)| - \Delta, 0\}}{Z(\cdot)^\top P(\cdot-1)Z(\cdot)} \right\}$  est sommable. Or nous avons :

$$|Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1)|^2 a(k) \alpha(k) = |e(k) - d(k)| \gamma(k) \max\{|e(k)| - \Delta, 0\} \quad (5.93)$$

et l'implication :

$$\{|e(k)| \geq \Delta, \quad |d(k)| \leq \Delta - \eta\} \implies |e(k) - d(k)| \geq \eta. \quad (5.94)$$

Nous en déduisons :

$$|Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1)|^2 a(k) \alpha(k) \geq \eta \gamma(k) \max\{|e(k)| - \Delta, 0\}. \quad (5.95)$$

Lorsque  $\eta$  est non nul, ceci nous donne :

$$\frac{\gamma(k) \max\{|e(k)| - \Delta, 0\}}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \leq \frac{1}{\eta} \frac{|Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1)|^2 a(k) \alpha(k)}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}. \quad (5.96)$$

Donc, de nouveau, la propriété P2'' est satisfaite si la suite  $\{s(\cdot)\}$  est sommable.

3. La matrice  $P(k)$  est définie positive puisque, comme en (2.39) et (2.41), nous déduisons de (5.70) :

$$1 - \alpha(i)\beta(i) = 1 - \gamma(i) \max \left\{ 1 - \frac{\Delta}{|e(i)|}, 0 \right\} \beta(i) \geq 1 - \gamma(i)\beta(i), \quad (5.97)$$

$$\geq 1 - \frac{2\gamma(i) - \gamma(i)^2 - \varepsilon\gamma(i)}{1 - \varepsilon\gamma(i)} \quad (5.98)$$

$$> \frac{(1 - \gamma(i))^2}{1 - \varepsilon\gamma(i)} \geq 0. \quad (5.99)$$

La suite  $\{V(\cdot)\}$  définie par :

$$V(k) = \tilde{\theta}(k)^\top P(k)^{-1} \tilde{\theta}(k) \quad (5.100)$$

est donc bien définie et vérifie :

$$\|\tilde{\theta}(k)\| \lambda_{\min}\{P_s^{-1}\} \leq V(k). \quad (5.101)$$

La propriété P1 est donc satisfaite si cette suite est bornée.

Étudions maintenant le comportement de la suite  $\{V(\cdot)\}$ . De (5.77) nous déduisons :

$$\tilde{\theta}(k) = \left( I - \frac{a(k)\alpha(k)P(k-1)Z(k)Z(k)^\top}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \right) \tilde{\theta}(k-1). \quad (5.102)$$

Ceci conduit à :

$$\begin{aligned} & \tilde{\theta}(k)^\top P(k-1)^{-1} \tilde{\theta}(k) \\ &= \tilde{\theta}(k-1)^\top \left( P(k-1)^{-1} - \frac{a(k)\alpha(k)Z(k)Z(k)^\top}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \right) \left( I - \frac{a(k)\alpha(k)P(k-1)Z(k)Z(k)^\top}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \right) \tilde{\theta}(k-1), \\ &= \tilde{\theta}(k-1)^\top \left( P(k-1)^{-1} - a(k)\alpha(k)(2 - a(k)\alpha(k)) \frac{Z(k)Z(k)^\top}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \right) \tilde{\theta}(k-1), \\ &= V(k-1) - a(k)\alpha(k)(2 - a(k)\alpha(k)) \frac{(Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1))^2}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs de l'égalité matricielle :

$$\left( I - \alpha(k)\beta(k) \frac{P(k-1)Z(k)Z(k)^\top}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)} \right)^{-1} = I + \frac{\alpha(k)\beta(k)}{1 - \alpha(k)\beta(k)} \frac{P(k-1)Z(k)Z(k)^\top}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}, \quad (5.103)$$

nous déduisons :

$$P_s^{-1} \leq P(k)^{-1} \leq P(k-1)^{-1} + \frac{\alpha(k)\beta(k)}{1 - \alpha(k)\beta(k)} \frac{Z(k)Z(k)^\top}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}. \quad (5.104)$$

Puisque nous avons :

$$Z(k)^\top \tilde{\theta}(k) = (1 - a(k)\alpha(k)) Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1), \quad (5.105)$$

nous avons obtenu :

$$\begin{aligned} & V(k) \\ &\leq \tilde{\theta}(k)^\top P(k-1)^{-1} \tilde{\theta}(k) + \frac{\alpha(k)\beta(k)}{1 - \alpha(k)\beta(k)} \frac{(Z(k)^\top \tilde{\theta}(k))^2}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}, \\ &\leq V(k-1) - \left( a(k)\alpha(k)(2 - a(k)\alpha(k)) - \frac{\alpha(k)\beta(k)(1 - a(k)\alpha(k))^2}{1 - \alpha(k)\beta(k)} \right) \frac{(Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1))^2}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}, \\ &\leq V(k-1) - \left( \frac{a(k)\alpha(k)(2 - a(k)\alpha(k)) - \alpha(k)\beta(k)}{1 - \alpha(k)\beta(k)} \right) \frac{(Z(k)^\top \tilde{\theta}(k-1))^2}{Z(k)^\top P(k-1)Z(k)}, \\ &\leq V(k-1) - \left( \frac{a(k)\alpha(k)(2 - a(k)\alpha(k)) - \alpha(k)\beta(k)}{a(k)\alpha(k)(1 - \alpha(k)\beta(k))} \right) s(k). \end{aligned}$$

Notre résultat sera donc établi si nous démontrons que nous avons :

$$\frac{a(k)\alpha(k)(2 - a(k)\alpha(k)) - \alpha(k)\beta(k)}{a(k)\alpha(k)(1 - \alpha(k)\beta(k))} \geq \varepsilon \quad \forall k \geq 0. \quad (5.106)$$

- Si  $\alpha(k) = 0$ , le terme de gauche est égal (par continuité) à  $\frac{2a(k) - \beta(k)}{a(k)}$ . Ayant aucune information sur le signe de  $a(k)$  dans ce cas, nous devons avoir

$$\beta(k) = 0.$$

- Si  $\alpha(k) \neq 0$ , i.e.  $|e(k)| > \Delta$ , alors  $a(k)$  est strictement positif. Aussi le terme de gauche est décroissant en  $\beta(k)$ . L'inégalité est donc satisfaite si nous avons:

$$\beta(k) \leq \frac{a(k)(2 - \varepsilon - a(k)\alpha(k))}{(1 - \varepsilon a(k)\alpha(k))} \quad \forall k \geq 0. \quad (5.107)$$

Le terme de droite est bien strictement positif, en particulier d'après (5.69). Puisque les inégalités (5.76) sont satisfaites, intéressons-nous alors à la fonction :

$$f(x) = \frac{2 - \varepsilon - x}{1 - \varepsilon x}$$

avec  $x$  dans l'intervalle  $[0, \gamma]$ . Elle est décroissante et atteint son minimum en  $\gamma$ . Nous avons donc :

$$f(x) \geq \frac{2 - \varepsilon - \gamma}{1 - \varepsilon \gamma} \quad \forall x \in [0, \gamma]. \quad (5.108)$$

Avec les inégalités (5.75), nous en déduisons qu'il suffit que  $\beta(k)$  satisfasse :

$$\beta(k) \leq \frac{|e(k)|}{|e(k)| + \Delta} \frac{2 - \varepsilon - \gamma(k)}{1 - \varepsilon \gamma(k)}. \quad (5.109)$$

L'inégalité (5.107) est donc bien satisfaite si  $\beta(k)$  est choisi satisfaisant (5.70).  $\square$

## 5.4 Exercices

**5.1** La difficulté dans la démonstration de la Propriété 5.2 est de montrer qu'on peut ne pas prendre en compte l'effet des conditions initiales et ceci même si la matrice  $F$  a des valeurs propres plus grande que 1. Pour cette démonstration, nous proposons les étapes suivantes :

5.1.1. Rappelons le

**Théorème 5.1 (de Cayley Hamilton)** *Pour toute matrice  $F$  de dimensions  $p \times p$ , il existe  $p + 1$  scalaires  $a_0, \dots, a_p$ , avec  $a_p = 1$ , tels que :*

$$a_0 I + a_1 F + \dots + a_{p-1} F^{p-1} + a_p F^p = 0 \quad (5.110)$$

En déduire :

5.1.1.1. l'existence d'une matrice  $M$  de dimensions  $(m + p + 1) \times (m + 1)$  telle que, pour tout vecteur  $x$ , on ait :

$$(F^{p+m} F^{p+m-1} \dots F I) x M = 0 \quad (5.111)$$

5.1.1.2. l'égalité suivante pour tout  $l$  compris entre 1 et  $m + 1$  et pour tout  $k$  :

$$\sum_{j=0}^p a_j \sum_{i=0}^{j+m-l} F^{j+m-l-i} G u(k+i) = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=i}^p a_j F^{j-i} \right) G u(k+i+m-l) \quad (5.112)$$

en posant :

$$F^{-i} = 0 \quad \forall i > 0 \quad (5.113)$$

5.1.2. Pour tout  $j$  compris entre 1 et  $p + m$ , écrire l'expression de  $Z(k + j)$  en fonction de  $Z(k)$  et  $Gu(k), \dots, Gu(k + j - 1)$ .

5.1.3. Montrer que, pour tout  $k$ , on a l'équation suivante :

$$(Z(k+m+p) \dots Z(k)) M = C A \begin{pmatrix} u(k+m) & \dots & u(k) \\ \vdots & & \vdots \\ u(k+m+p) & \dots & u(k+p) \end{pmatrix} \quad (5.114)$$

où  $A$  et  $C$  sont des matrices,  $C$  étant la matrice de commandabilité :

$$C = (G F G \dots F^{p-1} G) \quad (5.115)$$

5.1.4. Établir la Propriété 5.2

**5.2** On a la propriété suivante :

**Propriété 5.7** Pour toute suite  $\{u(\cdot)\}$  satisfaisant :

$$u(k) = \sum_{i=0}^m u_i \sin(\omega_i k + \phi_i) \quad (5.116)$$

où  $m$  est un entier plus grand ou égal à  $p - 1$ , les  $u_i$  sont non nuls et  $\omega_i$  est différent de  $\omega_j$  si  $i$  est différent de  $j$ ,

on peut trouver une constante  $\alpha$  strictement positive telle que :

$$\sum_{i=k}^{k+m} \begin{pmatrix} u(i) \\ \vdots \\ u(i+p-1) \end{pmatrix} (u(i) \dots u(i+p-1)) \geq \alpha I \quad (5.117)$$

Pour démontrer ceci, on montrera que (5.116) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} U(k+1) &= A U(k) \\ u(k) &= C U(k) \end{aligned} \quad (5.118)$$

où la condition initiale  $U(0)$ , la matrice diagonale à coefficients complexes  $A$  et le vecteur ligne  $C$  sont tels qu'il existe un scalaire  $\beta$  strictement positif satisfaisant :

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{(p-1)} \end{pmatrix} (C^\top \overline{A^\top} C^\top \dots \overline{A^{(p-1)}^\top} C^\top) \geq \beta I \quad (5.119)$$

et pour tout  $k$  :

$$\sum_{i=k}^{k+m} A^i U(0) \overline{U(0)^\top A^i} \geq \beta I \quad (5.120)$$

avec  $\bar{\cdot}$  représentant le complexe conjugué.

**5.3** Pour démontrer le Lemme 5.1, on montrera que l'entier  $m$  pour la suite  $\{Z(\cdot)\}$  doit être un multiple suffisamment grand de celui associé à la suite  $\{Z_m(\cdot)\}$ . On utilisera aussi, l'inégalité suivante pour tout  $k$  et tout vecteur  $x$  :

$$\left( Z(k)^\top x \right)^2 \geq \frac{1}{2} \left( Z_m(k)^\top x \right)^2 - \|Z_m(k) - Z(k)\|^2 \|x\|^2 \quad (5.121)$$

**5.4** Pour démontrer la convergence exponentielle des paramètres directs dans le cas d'une synthèse par modèle de référence, considérons la suite  $\{Z(\cdot)\}$  définie par (3.7) et (3.4) où les suites  $\{u(\cdot)\}$  et  $\{y(\cdot)\}$  sont liées par (3.1).

5.4.1. Montrer que l'on a :

$$B_s(q^{-1}) Z(k) = M(q^{-1}) y(k) \quad (5.122)$$

où  $M$  est le vecteur de polynômes suivant :

$$M(q^{-1}) = A(q^{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ q^{-nC} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + q^{-1} B_s(q^{-1}) B_i(q^{-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ q^{-nD} \end{pmatrix} \quad (5.123)$$

5.4.2. À l'aide du point 2 de la Propriété 3.1 et du Lemme 5.1, montrer qu'une condition suffisante pour que la suite  $\{\hat{\theta}(\cdot)\}$  définie par (3.9) converge vers le vecteur  $\theta$  qui vérifie (3.6) est que la suite de consignes  $\{v(\cdot)\}$  soit telle que la suite  $\{Z_m(\cdot)\}$  définie par :

$$P(q^{-1}) B_s(q^{-1}) Z_m(k) = B_i(q^{-1}) \overline{Q}(q^{-1}) v(k-1) \quad (5.124)$$

vérifie la condition de balayage persistant.

**5.5** Pour démontrer la Propriété 5.3, posons :

$$\overline{Z}(j) = \sqrt{\frac{1}{r(j) + Z(j)^\top Z(j)}} Z(j) \quad (5.125)$$

et définissons la matrice :

$$\mathcal{F}(i) = \prod_{j=L(i)}^{L(i+1)-1} \left( I - \overline{Z}(j) \overline{Z}(j)^\top \right) \quad (5.126)$$

5.5.1. Montrer par récurrence l'égalité suivante :

$$\mathcal{F}(i) = I - \mathcal{Z}(i)\mathcal{L}(i)^{-1}\mathcal{Z}(i) \quad (5.127)$$

où :

$$\mathcal{Z}(i) = (\overline{\mathcal{Z}}(L(i)) \overline{\mathcal{Z}}(L(i)+1) \dots \overline{\mathcal{Z}}(L(i+1)-1)) \quad (5.128)$$

et  $\mathcal{L}(i)$  est une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur sa diagonale et vérifiant :

$$\mathcal{L}(i) + \mathcal{L}(i)^\top = \mathcal{Z}(i)^\top \mathcal{Z}(i) + \mathcal{D}(i) \quad (5.129)$$

avec  $\mathcal{D}(i)$  une matrice diagonale dont les composantes sont :  $2 - \overline{\mathcal{Z}}(j)^\top \overline{\mathcal{Z}}(j)$ .

5.5.2. Dédurre de la relation ci-dessus l'inégalité suivante :

$$\lambda_{\max} \left\{ \mathcal{F}(i)^\top \mathcal{F}(i) \right\} \leq 1 - \frac{\lambda_{\min} \left\{ \mathcal{Z}(i)\mathcal{Z}(i)^\top \right\}}{\text{tr} \left\{ \mathcal{L}(i)\mathcal{L}(i)^\top \right\}} \lambda_{\min} \left\{ \mathcal{D}(i) \right\} \quad (5.130)$$

où  $\text{tr}\{\cdot\}$  est la trace de la matrice.

5.5.3. En remarquant que  $\|\overline{\mathcal{Z}}(j)\|^2$  est inférieur à 1 et que la suite  $\{l(\cdot)\}$  est bornée, montrer qu'il existe une constante strictement positive  $\varepsilon$  telle que :

$$\left\| \tilde{\theta}(L(i+1)-1) \right\|^2 \leq \left( 1 - \varepsilon \lambda_{\min} \left\{ \mathcal{Z}(i)\mathcal{Z}(i)^\top \right\} \right) \left\| \tilde{\theta}(L(i)-1) \right\|^2 \quad (5.131)$$

5.5.3. Établir la Propriété 5.3 en utilisant l'inégalité suivante vérifiée par toute suite positive  $\{a(\cdot)\}$  :

$$\prod_{j=i+1}^{i+n} a(j) \leq \left( \frac{1}{n} \sum_{j=i+1}^{i+n} a(j) \right)^n \quad (5.132)$$



## Chapitre 6

# Étude numérique d'un exemple simple

Pour compléter cette introduction à la théorie de la commande adaptative des systèmes linéaires, nous proposons au lecteur de faire une mise en œuvre et de tester divers algorithmes dans des conditions avec ou sans perturbations.

### 6.1 Le système et son approximation

Le système considéré est un système du second ordre à temps discret d'entrée  $u$  et sortie  $y$  liées par la relation :

$$y(k+2) - (p_1 + p_2) * y(k+1) + p_1 * p_2 * y(k) = g * (u(k+1) - z * u(k)) + d(k)$$

où  $d$  est une perturbation,  $p_1$  et  $p_2$  sont les pôles,  $z$  est un zéro et  $g$  est le gain dit *gain haute fréquence*. La fonction de transfert du système est donc :

$$H(q) = g \frac{q - z}{(q - p_1)(q - p_2)} .$$

Si  $z$  est proche de  $p_2$ , il y a "presque" simplification. Ceci correspond à une "presque" non commandabilité. Si la valeur "commune" à  $z$  et  $p_2$  est strictement inférieure à 1, nous pouvons faire cette simplification et obtenir, lorsque  $g$  est proche de 1, le modèle simplifié pour  $H$  :

$$H_m = \frac{1}{q - a} .$$

avec  $a$  voisin de  $p_2$ .

### 6.2 Une commande adaptative

Le modèle associé à  $H_m$  est :

$$y(k+1) = a y(k) + u(k) .$$

En se fixant pour objectif de faire suivre par la sortie le signal de sortie  $y_m$  du modèle de référence :

$$y_m(k+1) = a_m y_m(k) + v(k) ,$$

l'exposé fait dans les paragraphes précédents permet d'écrire un certain nombre de commandes adaptatives reposant par exemple sur une approche :

**explicite**, avec  $\theta = a$  comme paramètre inconnu obtenu par

**gra\_sor**: une minimisation d'erreur de sortie  $y(k) - \hat{y}(k)$  a priori;

**obs\_sor\_prio**: un observateur à partir de l'erreur de sortie  $y(k) - \hat{y}(k)$  a priori;  
**obs\_sor\_post**: un observateur à partir de l'erreur de sortie  $y(k) - \hat{y}(k)$  a posteriori;  
**obs\_equ**: un observateur à partir de l'erreur d'équation  $y(k) - \theta y(k-1) - u(k-1)$ ;

%% Boucle de temps des methodes avec parametres explicites

```
for iter =1:(Nb_iteration-1)
    % stockage
    yrout(iter)=yrm1;
    yout(iter)=ym1;
    uout(iter)=um1;
    thetaout(iter)=thetam1;
    % systeme
    y=a1*yrm1+a2*yrm2+b1*um1+b2*um2+d(iter);
    % reference
    yr=am*yrm1+r(iter);
    % choix adaptation
    switch methode
        case 'gra_sor'
            % y modele a priori
            yhap=thetam1*yhm1+um1;
            % erreur de sortie a priori
            er=y-yhap;
            % gradient a priori
            phi=thetam1*gm1+yhm1;
        case 'obs_sor_prio'
            % y modele a priori
            yhap=thetam1*yhm1+um1;
            % erreur de sortie a priori
            er=y-yhap;
            phi=yhm1;
        case 'obs_sor_post'
            % y modele a priori
            yhap=thetam1*yhm1+um1;
            % erreur de sortie a priori
            er=y-yhap;
            phi=yhm1;
        case 'obs_equ'
            er=y-thetam1*yrm1-um1;
            phi=yrm1;
        otherwise
            error(['10, '.....', ...
                10, '. methode inconnue .', ...
                10, '.....'])
    end
    % adaptation
    theta=thetam1+((phi/(gamma+phi^2))*er);
    % commande
    u=(am-theta)*y+r(iter);
    % decalage temps
    um2=um1;
```

```

    um1=u;

    ym2=ym1;
    ym1=y;

    yrm1=yr;

    thetam1=theta;

    switch methode
        case 'gra_sor'
            gm1=phi;
            yhm1=yhap;
        case 'obs_sor_prio'
            yhm1=yhap;
        case 'obs_sor_post'
            % y modele a posteriori
            yhm1=theta*yhm1+um1;
        otherwise
            end
    end
end
% dernier stockage
yrout(Nb_iteration)=yrm1;
yout(Nb_iteration)=ym1;
uout(Nb_iteration)=um1;
thetaout(Nb_iteration)=thetam1;

```

**implicite**, avec  $\theta = a - a_m$  comme paramètre inconnu obtenu par

**gra\_sor**: une minimisation de l'erreur de sortie  $y(k) - y_m(k)$ ;

**obs\_sor**: un observateur à partir de l'erreur de sortie  $y(k) - y_m(k)$ ;

**obs\_equ**: un observateur à partir de l'erreur d'équation  $y(k) - a_m y(k-1) - v(k-1)$

```

%% Boucle de temps des methodes avec parametrisation implicite
for iter=1:Nb_iteration-1
    % stockage
    yrout(iter)=yrm1;
    yout(iter)=ym1;
    uout(iter)=um1;
    thetaout(iter)=thetam1;
    % systeme
    y=a1*ym1+a2*ym2+b1*um1+b2*um2+d(iter);
    % reference
    yr=am*yrm1+r(iter);
    % choix adaptation
    switch methode
        case 'gra_sor'
            er=y-yr;
            % gradient
            phi=am*gm1-ym1;

```

```

    case 'obs_sor'
        er=y-yr;
        phi=ym1;
    case 'obs_equ'
        er=y-am*ym1-r(iter);
        phi=ym1;
    otherwise
        error('methode inconnue')
end
% adaptation
theta=thetam1+((phi/(gamma+phi^2))*er);
% commande
u=-theta*y+r(iter);
% decalage temps
um2=um1;
um1=u;

ym2=ym1;
ym1=y;

yrm1=yr;

thetam1=theta;

switch methode
    case 'gra_sor'
        gm1=phi;
    otherwise
end
end
% dernier stockage
ymout(Nb_iteration)=ymm1;
yout(Nb_iteration)=ym1;
uout(Nb_iteration)=um1;
thetaout(Nb_iteration)=thetam1;

```

Observons qu'il y a excitation persistante si il existe un entier  $K$  et un réel strictement positif  $\varepsilon$  tels que la variable  $\phi$  dans ces algorithmes vérifient

$$\frac{1}{K} \sum_{l=k}^{k+K} \phi(l)^2 \geq \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq 0$$

### 6.3 Essais numériques

Pour nos essais numériques, nous prenons :

$$a_m = 0 \quad , \quad v(k) = a_v \cos(k f_v) \quad , \quad d(k) = a_d \cos(k f_d)$$

et nous vérifions que nous avons bien une excitation persistante dans tous les cas. Il s'agit dans un premier temps d'observer<sup>1</sup> les suites de commande, sorties et paramètres obtenus ainsi que le portrait

<sup>1</sup>Pour clarifier ces graphiques il peut être utile de ne montrer qu'un point sur deux.

de phase du couple (paramètre, sortie). Dans un deuxième temps, il s'agit de proposer une théorie permettant de prévoir ce qui a été observé.

### 6.3.1 Tests sur les algorithmes dans le cas sans perturbation

Les algorithmes reposant sur l'erreur d'équation donnent satisfaction lorsqu'il y a ni erreur de modèle, i.e.  $z = p_2 = 0$  et  $g = 1$ , ni perturbation, i.e.  $d = 0$ .

Par contre, pour ceux reposant sur une erreur de sortie, nous savons qu'une condition de passivité et donc de stabilité est impliquée et que dans le cas d'erreur de sortie a priori, la vitesse d'adaptation joue aussi un rôle.

Nous commençons donc par étudier le cas où le système le pôle du système est stable ou instable et le signal de référence est grand ou petit, soit les cas donnés dans le tableau ci-dessous pour les méthodes avec paramétrisation explicite et implicite.

$p_1$	$p_2$	$z$	$g$	$a_v$	$f_v$	$a_d$	$f_d$
2	0	0	1	0.1	0	0	0
0.9	0	0	1	0.1	0	0	0
0.9	0	0	1	3	0	0	0

### 6.3.2 Tests sur les algorithmes dans le cas avec perturbation

D'après l'étude faite des algorithmes, nous pouvons nous attendre à ne pas avoir de problème si l'effet des perturbations est de créer des signaux additifs de carrés sommables. Mais au-delà nous ne savons rien.

**Cas d'un bruit** Nous étudions, pour les méthodes avec paramétrisation explicite et implicite, les 2 cas suivants

$p_1$	$p_2$	$z$	$g$	$a_v$	$f_v$	$a_d$	$f_d$
2	0	0	1	0	0	0.1	0
0.9	0	0	1	0.01	0	0.1	0
0.9	0	0	1	0.3	0	0.01	0
0.9	0	0	1	0.01	0	0.3	0

Il n'y a pas d'erreur de modélisation, il y a seulement le bruit additif  $d$ . Dans le premier cas, le rapport signal sur bruit  $\frac{r}{d}$  est plus grand que 1; dans le second il est plus petit que 1.

**Erreur de modélisation** Nous étudions ensuite le cas où il n'y a pas de bruit mais une erreur de modélisation avec une "presque" simplification entre le zéro  $z$  et le pôle  $p_2$  qui sont voisins mais strictement inférieurs à 1.

$p_1$	$p_2$	$z$	$g$	$a_v$	$f_v$	$a_d$	$f_d$
-3.	0.990	0.992	1	0.1	0	0	0
-3.	0.990	0.992	1	0.1	$\pi$	0	0
-3.	0.990	0.992	1	0.1	0	0.01	0



# Références

- [1] Anderson B.D.O., Bitmead R.R., Johnson C.R., Kokotovic P.V., Kosut R.L., Mareels I.M.Y., Praly L., Riedle B.D. : *Stability of adaptive systems: Passivity and averaging analysis*. MIT Press 1986.
- [2] Åström K.J., Hägglund T. : *Automatic Tuning of PID Controllers*. Instrument Society of America, Research Triangle Park, North Carolina, 1988.
- [3] Åström K.J., Wittenmark B. : *Adaptive control*. 2nd Edition. Prentice Hall 1994
- [4] Callier F. M., Desoer C. A. : *Multivariable feedback systems*. Springer Verlag, A Dowden & Culver Book, 1982.
- [5] Gawthrop P.J. : *Continuous-time self-tuning control : Volume 1 - design*. John wiley & Sons 1987.
- [6] Goodwin G.C., K.S. Sin : *Adaptive filtering, prediction and control*. Prentice-Hall 1984.
- [7] Grimble M.J. : *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. Wiley
- [8] Harris C.J., Billings S.A. : *Self-tuning and adaptive control: Theory and applications*. Peter Peregrinus 1982.
- [9] Ioannou P., Fidan B. : *Adaptive Control Tutorial*. SIAM, Advances in Control Design. DC11. 2006
- [10] Kailath T. : *Linear systems*. Prentice Hall, 1980.
- [11] Kucera V. : *Discrete linear control : The polynomial equation approach*. Wiley 1979.
- [12] Landau I.D.: *Adaptive control: The model reference approach*. Control and Systems Theory. Vol. 8. Dekker 1979.
- [13] Landau I.D. : *Identification et commande des systèmes à l'aide des progiciels P.I.M. et PC-REG*. Editions Hermes 1988.
- [14] Landau I.D., Dugard L. : *Commande adaptative: Aspects pratiques et théoriques*. Masson 1986.
- [15] Ljung L. : *System identification : Theory for the user*. Prentice Hall 1987.
- [16] Najim K. : *Commande adaptative des processus industriels*. Masson 1982.
- [17] Narendra K.S. : *Adaptive and learning systems: Theory and applications*. Plenum Press 1986.
- [18] Narendra K., Annaswamy A. : *Stable adaptive systems*. Information and Systems Sciences Series. Prentice Hall. 1989.

- [19] Sastry S., Bodson M. : *Adaptive control : Stability, convergence and robustness*. Prentice Hall advance reference series. 1989.
- [20] Wolovich, W.A. : *Linear multivariable systems*. Springer Verlag 1974.

# Index

- algorithme de modèle de référence N° 1, 50
- algorithme de modèle de référence N° 2, 54
- algorithme de placement de pôles, 57, 62
- algorithme de projection régularisé, 41, 71
- algorithme des moindres carrés, 41, 43, 46, 72
- approche directe, 2, 9
- approche indirecte, 2, 4, 7
  
- balayage persistant, 69
- bezoutien, 23
- boîte noire, 1
  
- commandabilité du modèle estimé, 23
- commande adaptative, 1
- composition d'opérateurs instationnaires, 63
- consigne, 23
- convergence exponentielle, 67, 80
- critère des moindres carrés, 43
  
- erreur d'équation, 4, 7, 9
- erreur d'observation, 4, 8
- erreur de sortie, 5, 9
- estimation non linéaire, 43
- état augmenté, 18
- état partiel, 22
- excitation persistente, 4, 70
  
- forme commandable, 22
- forme observable, 22
- forme observateur, 18
  
- gain  $l^\infty$ , 53
  
- lemme d'inversion matricielle, 39
  
- méthode de gradient, 7
- méthode de l'observateur, 1
- méthode de Lyapunov, 2, 13
- méthode de minimisation, 2
- méthode de sensibilité, 2
- minimisation de l'erreur de prédiction, 29
- modèle de comportement, 1
- modèle de connaissance, 1
- modèle de référence, 3, 23, 49
  
- opérateur de retard, 21
  
- paramètres explicites, 1, 3
- paramètres implicites, 1, 8
- paramétrisation, 17
- paramétrisation explicite, 22
- paramétrisation implicite, 25, 27
- passivité, 6, 12
- placement de pôles, 3, 55
- placement de pôles, 26
- principe d'équivalence certaine, 3
  
- réduire l'incertitude, 31
- régulation linéaire quadratique, 3, 28
- reparamétrisation, 8
- représentation polynômiale, 21, 22
  
- saturation des actionneurs, 32
- sortie modèle, 5
- suite implusion, 21
  
- théorème de Bezout, 28
- théorème de Cayley Hamilton, 78
- théorème de Parseval, 31
- théorème des petits gains, 54
  
- zone morte, 74