COMMANDE ADAPTATIVE INDIRECTE MULTIVARIABLE :

STABILITE ET ROBUSTESSE

L PRALY

CAI - Ecole des Mines
35, Rue Saint-Honoré
77305 Fontainebleau (France)
Tel : (6) 422.48.21

RESUME :

Nous établissons une propriété de bornitude des schémas indirects de commande adaptative lorsque la norme du résidu entre le modèle linéaire supposé et le système réel est majorée par la norme des signaux. Cette formulation permet de prendre en compte des problèmes de robustesse tels qu'une réduction d'ordre, des non linéarités ou des effets instationnaires

ABSTRACT :

We state the boundedness of indirect adaptive control schemes even when the norm of the residuals between the true plant and the assumed linear model is bounded from above by the norm of the signals In this formulation we can imbed such problems as reduced order model, non linearities or time variation effects

I - INTRODUCTION :

Bien qu'aujourd'jui un certain nombre de résultats de stabilité soient établis en commande adaptative, il existe encore de nombreux progrés à faire pour rapprocher ce contexte théorique des applications potentielles En particulier on peut se demander ce qu'il se passe lorsque le système diffère du modèle linéaire en ce qu'il est d'un ordre plus élevé, contient des non linéarités ou est sujet à des perturbations de structure ou d'état

Plus précisement soit u_n le vecteur de commande dans $\mathbb{R}^m$, y_n le vecteur de sortie dans $\mathbb{R}^\ell$, on choisit un modèle linéaire en se donnant des entiers N_a, N_b et en supposant l'existence d'une matrice Θ telle que si ϕ_n est le vecteur bloc défini par :

$$\phi_n^t = \left(y_{n-1}^t \quad . \quad y_{n-N_a}^t \quad u_n^t \quad . \quad u_{n-N_b}^t\right) \tag{1}$$

On ait :

$$y_n = \Theta^t \phi_n + w_n \tag{2}$$

w_n représente alors le résidu entre le modèle et le système

Le problème que nous nous posons ici est de savoir quelles conditions sur w_n requièrent les schémas adaptatifs pour assurer une stabilité globale C'est à dire qu'elle est la robustesse de la stabilité vis à vis des résidus de modélisation

Dans [1], un premier résultat montre sous des hypothèses assez larges l'existence de domaines stables pour un schéma indirect Dans [2], ces domaines sont précisés pour un schéma direct et lorsque w_n résulte d'un modèle d'ordre réduit Dans [3] Narendra et Peterson montrent les avantages acquis par l'introduction de non linéarités (seuil, projection) dans les lois d'adaptation (voir aussi [4]) Un autre type de non linéarité est discuté dans [5], il s'agit de la variation du gain d'adaptation par rapport aux signaux d'entrée et de sortie A notre connaissance le résultat le plus complet est donné dans [6] : pour un schéma direct particulier, la stabilité globale est démontrée lorsque

$$\|w_n\| < \varepsilon \text{ Max } \{\phi, \|\phi_n\|\} \tag{3}$$

où ϕ est une constante positive et ε est défini à partir des caractéristiques du système bouclé (en supposant w_n nul)

Nous allons ici établir le même type de résultats pour les schémas indirects Au chapitre II, nous reviendrons sur le problème de modélisation et nous introduirons une procédure dite de mise en forme pour rapprocher le système réel de la structure de modèle définie par (1)-(2) Aux chapitres III et IV, nous étudierons les procédures d'identification et de contrôle Au chapitre V nous énoncerons le théorème de stabilité et donnerons une interprétation en terme de robustesse

Les preuves des résultats présentés ici peuvent être trouvées dans [10]

II - PROCEDURE DE MISE EN FORME :

Considérons un système multientrée-multisortie pour lequel, suivant l'expression (2), on s'est fixé des entiers N_a, N_b et supposé l'existence d'une matrice θ

On se pose alors le problème de minimiser le résidu w_n Pour cela on met en oeuvre une procédure, dite procédure de mise en forme, qui consiste à observer et commander le système au travers de filtres série ou/et après un premier feedback. Les filtres série serviront par exemple à canceller les poles ou les zéros rapides négligés, le feedback à priori à prendre en compte les informations connues sur le système.

Par la suite nous appellerons u_n, y_n les commandes et sorties non pas du système réel mais du système mis en forme. Revenons alors sur l'expression (2) et précisons nos hypothèses sur w_n :

Nous introduisons une suite connue de nombres réels positifs s_n vérifiant :

$$\text{Max}\,\{s,\ \|\phi_n\|\} \leq s_n \leq \lambda\, s_{n-1} + \text{Max}\,\{s,\ \|\phi_n\|\} + S \tag{4}$$

où λ, s, S satisfont

$$o \leq \lambda \leq 1, \quad s > o, \quad S \geq o \tag{5}$$

nous faisons l'hypothèse suivante :

$$\|y_n - \theta^t\,\phi_n\|^2 \leq v_n\, s_n^2 \tag{6}$$

où v_n est une suite de nombres réels positifs tels que :

HP1 : $\|v_n\| \leq V$

HP2 : $\exists\ \eta_w$, $\exists(\Sigma,K)$: $\forall k \geq K$, $\forall q$

tels que : $\forall n \in [q+1, q+k]$ $s_n \geq \Sigma$

alors : $\frac{1}{k} \sum_{n=q+1}^{q+k} v_n \leq \eta_w$

HP2 signifie que v_n est petit en moyenne lorsque s_n est grand On dira que v_n est η_w - petit en moyenne relativement à s_n

Pour préciser les rôles de s_n et v_n , étudions le problème suivant :

Modèle d'ordre réduit et/ou négligence de couplage :

Supposons que pour tout n, on ait

$$y_n = \theta^t\,\phi_n + (\theta_n^{rt}\,\phi_n^r + w_n) \tag{7}$$

où - le vecteur ϕ_n^r est tel qu'il existe un entier d et :

$$\phi_n^r = (y_{n-1}^t \ \ . \ \ y_{n-N_a-d}^t \ \ u_n^t \ \ . \ \ u_{n-N_b-d}^t)^t \tag{8}$$

Notons que

$$\|\phi_n^r\| \leq \|\phi_n\| + \ . \ + \|\phi_{n-d}\| \tag{9}$$

- w_n est borné pour tout n :

$$\|w_n\|^2 \leq W \tag{10}$$

si on pose alors :

$$s_n = \lambda\, s_{n-1} + \mathrm{Max}\,\{s, \|\phi_n\|\} \qquad \lambda < 1 \tag{11}$$

on obtient

$$v_n < 2\left(\frac{W}{s_n^2} + \left(\frac{\|\theta_n^r\|}{\lambda^d}\right)^2\right) < 2\left(\frac{W}{s^2} + \left(\frac{\|\theta_n^r\|}{\lambda^d}\right)^2\right) \tag{12}$$

Les hyptohèses HP1, HP2 seront satisfaites si s est suffisamment grand et si :

$$\|\theta_n^r\| < L < \sqrt{\frac{n_w}{2}} \tag{13}$$

C'est à dire lorsque les paramètres négligés ne sont pas trop grands

Ainsi résumant les propriétés du résidu de modélisation par la constante n_w, nous voyons d'après (13) par exemple que la procédure de mise en forme consiste pour un même n_w à tolérer des écarts plus grands entre système réel et modèle
Le problème posé est alors de trouver une procédure d'identification de la matrice θ et une procédure de calcul d'un contrôleur telles que le système bouclé par ce contrôleur soit stable sous les seules hypothèses :

- N_a, N_b et s_n sont connus
- v_n satisfait HP1, HP2 (Ce qui implique l'existence de θ)

III - PROCEDURE D'IDENTIFICATION :

Le problème d'identification de la matrice θ consiste à chaque nouvel instant n à définir une estimation θ_n connaissant toutes les informations passées
L'estimée θ_n donne alors une expression du même type que (2) :

$$y_n = \theta_n^t\, \phi_n + \varepsilon_n \tag{14}$$

Nous considérons ici des algorithmes tels qu'on ait les propriétés suivantes :

HI1 : $\|\theta_n\| < M_1$

HI2 : $\dfrac{\|\varepsilon_n\|}{s_n} < M_2$

HI3 : $\dfrac{\|\varepsilon_n\|}{s_n}$ est n_ε - petit en moyenne relativement à s_n

HI4 : $\|\theta_n - \theta_{n-1}\|$ est n_Θ - petit en moyenne relativement à s_n

Ces hypothèses signifient essentiellement que $\|\varepsilon_n\|$ et $\|\theta_n - \theta_{n-1}\|\,\|\phi_n\|$ doivent avoir les mêmes propriétés que le résidu $\|w_n\|$
La procédure d'identification a alors pour conséquence de relier les constantes n_ε et n_Θ à n_w. Et pour un couple donné n_ε n_Θ il s'agit de choisir une procédure telle que n_w soit maximal De façon usuelle cet objectif est obtenu en utilisant des algorithmes à seuil et/ou avec projection [4]

Par exemple lorsque, pour θ_o donné, on connait un majorant de la norme $\|\theta - \theta_o\|$, on peut utiliser l'algorithme avec projection suivant :

$$\theta_{n-\frac{1}{2}} = \theta_{n-1} + g_n\, P_{n-1}\, \phi_n\, (y_n - \theta_{n-1}^t\, \phi_n)^t \tag{15}$$

$$g_n = \frac{\alpha_n}{\mu_n\, s_n^2 + \phi_n^t\, P_{n-1}\, \phi_n} \tag{16}$$

$$P_n \geq P_{n-1} - g_n\, P_{n-1}\, \phi_n\, \phi_n^t\, P_{n-1} \tag{17}$$

$$\theta_n = \theta_o + \mathrm{Min}\left\{1, \frac{R}{\|\theta_{n-\frac{1}{2}} - \theta_o\|}\right\} (\theta_{n-\frac{1}{2}} - \theta_o) \tag{18}$$

avec α_n, μ_n, P_n, R choisis tels que :

$$o < \alpha \leq \alpha_n < 1 \tag{19}$$
$$o < \mu \leq \mu_n \leq M \tag{20}$$
$$o < \Lambda_o \leq \lambda\min P_n \leq \lambda\max P_n \leq \Lambda_1 \tag{21}$$
$$R \geq \frac{\Lambda_1^o}{\Lambda_o} \quad \| \Theta - \Theta_o \| \tag{22}$$

On montre dans ce cas que pour tout η_w strictement positif, on a :

$$\eta_\varepsilon \leq M_\varepsilon \sqrt{\eta_w} \tag{23}$$
$$\eta_\Theta \leq M_\Theta \sqrt{\eta_w} \tag{24}$$

IV - PROCEDURE DE CONTROLE :

La procédure de contrôle consiste à définir une matrice ψ_n telle que la commande u_{n+1} puisse être calculée implicitement de la façon suivante :

$$\psi_n^t \, \Phi_{n+1} = Q_n(b)\, y_n^* + P_n(b)\, \varepsilon_n \tag{25}$$

où y_n^* est la sortie de référence :

$Q_n(b)$ et $P_n(b)$ sont des matrices polynomiales ($m \times \ell$) où b est l'opérateur de retard

$$b y_n^* = y_{n-1}^* \tag{26}$$

En pratique ψ_n, $Q_n(b)$, $P_n(b)$ sont déduites de Θ_n en utilisant les méthodes classiques de synthèse de loi de commande telles le placement de poles [7] ou la commande quadratique [8]

Pour préciser nos hypothèses, introduisons les notations suivantes :

Découpant Θ_n et ψ_n en blocs équivalents à ceux de Φ_n, nous pesons :

$$\Theta_n^t = (- A_n^1 \; . \; - A_n^{N_a} \; B_n^o \; B_n^1 \; . \; B_n^{N_b}) \tag{27}$$
$$\psi_n^t = (D_n^o \; . \; D_n^{N_a - 1} \; I \; C_n^1 \; . \; C_n^{N_b}) \tag{28}$$
$$A_n(b) = I + A_n^1 b + \; . \; + A_n^{N_a} b^{N_a} \tag{29}$$
$$B_n(b) = B_n^o + B_n^1 b + \; . \; + B_n^{N_b} b^{N_b} \tag{30}$$
$$C_n(b) = I + C_n^1 b + \; . \; + C_n^{N_b} b^{N_b} \tag{31}$$
$$D_n(b) = D_n^o + D_n^1 b + \; . \; + D_n^{N_a - 1} b^{N_a - 1} \tag{32}$$

On défnit alors le polynôme $\hat{r}_n(b)$ par

$$\det \begin{vmatrix} A_n(b) & - b\, B_n(b) \\ D_n(b) & C_n(b) \end{vmatrix} = \hat{r}_n(b) \tag{33}$$

On suppose l'existence d'une suite $r_n(b)$ de polynômes de degré au plus N_r tel que

$$N_r = \ell\, N_a + m\, N_b \tag{34}$$

et

$$r_n(b) = 1 + r_n^1 b + \; . \; + r_r^{N_r} b^{N_r} \tag{35}$$

Par exemple pour une synthèse par placement de pôles [7], on prendra

$$r(b) = r_n(b) = \hat{r}_n(b) \tag{36}$$

et on calculera ψ_n pour satisfaire (33)

On note $\hat{R}_n$ (resp R_n) le vecteur dont les composantes sont les coefficients de $\hat{r}_n(b)$ (resp $r_n(b)$) et F_n la matrice compagnon de $r_n(b)$

$$F_n = \begin{pmatrix} -r_n^1 & \cdots\cdots & & -r_n^{N_r} \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \quad 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (37)$$

Nous supposons que la procédure de contrôle vérifie les hypothèses suivantes

HC1 : $\| \psi_n \| < M_3$

HC2 : $\exists\, N_1$: $\forall k > N_1$, $\forall q$

tels que : $\frac{1}{k} \sum_{n=q+1}^{q+k} \| \Theta_n - \Theta_{n-1} \| < n_\Theta$

alors : $\frac{1}{k} \sum_{n=q+1}^{q+k} \| \psi_n - \psi_{n-1} \| < n_c$

et : $\frac{1}{k} \sum_{n=q+1}^{q+k} \| \hat{R}_n - R_n \| < n_c$

où n_Θ est défini par HI4.

HC3 : il existe des normes matricielles et vectorielles instationnaires consistentes notées $\| . \|_n$ telles que

$\alpha \| . \| \leq \| . \|_n \leq \beta \| . \|$

$\forall\ x,\ \| F_n x \|_{n+1} \leq \rho \| x \|_n\ ,\quad \rho < 1$

HC4 : les coefficients de $Q_n(b)$, $P_n(b)$ sont des fonctions localement bornées de Θ_n, ψ_n et de degré majoré supérieurement

HC1, HC4 traduisent une bornitude uniforme des coefficients de la loi de commande HC2 imposent que lorsque les paramètres du modèle ne bougent plus, d'une part il en est de même de ceux du contrôleur, d'autre part le comportement du système bouclé se rapproche du comportement désiré

Enfin HC3 requiert la stabilité de ce comportement désiré et précise la tolérance sur son degré d'instationnarité.

Ces hypothèses sont généralement vérifiées par les méthodes classiques de synthèse (voir [7] par exemple) Cependant, comme on peut le voir sur la relation (33), elles nécessitent implicitement la stabilisabilité uniforme du couple $(A_n(b), B_n(b))$ (voir [8] pour une définition) Ceci se traduit par une contrainte sur Θ_n qui doit être prise en compte dans l'identification (par exemple avec un choix approprié de Θ_n dans l'algorithme du chapitre III) Ce problème est résolu théoriquement en supposant que Θ_n reste dans un voisinage de Θ, en pratique la difficulté n'est pas encore bien maitrisée [7], [9]

V - <u>THEOREME DE ROBUSTESSE</u> :

<u>Théorème</u> : Si les hypothèses HI1, HI2, HC1, HC3, HC4 sont satisfaites alors il existe des constantes strictement positives n_ε, n_Θ, n_c telles que si HI3, HI4, HC2 sont vérifiées alors $\|u_n\|$, $\|y_n\|$ sont bornés

<u>Remarque</u> : Nous ne donnons ici qu'un résultat de bornitude, mais en précisant les propriétés de w_n, on peut donner des résultats de comportements ([7], [8])

<u>Interprétation</u> : Ce théorème de bornitude établit une propriété de robustesse de la commande adaptative indirecte relativement aux erreurs de modélisation. En effet il montre que la procédure de contrôle autorise l'existence de constantes non nulles n_ε, n_Θ que la procédure d'identification relie à la constante n_w, elle-même reliée aux erreurs de modélisation par la procédure de mise en forme. Ainsi la procédure de contrôle devra être choisie de telle façon que n_ε, n_Θ puissent être maximales Ceci peut être fait en particulier en modifiant le comportement désiré du système bouclé (ρ dans HC3)

VI - CONCLUSION :

Nous avons établi une propriété de bornitude des schémas indirects de commande adaptative Cette propriété est robuste car elle tolère un résidu de modélisation en grand O de la norme des signaux d'entrées et de sorties et permet donc de prendre en compte des problèmes tels que modèle d'ordre réduit, instationnarité, perturbation de structure ou d'état..

Par ailleurs ce résultat met en évidence trois procédures distinctes participant à la robustesse La première est la procédure de contrôle qui autorise des erreurs d'identification. La seconde est la procédure d'identification qui relie ces erreurs au résidu de modélisation Enfin la troisième, procédure de mise en forme, réduit ce résidu

Notons qu'une analyse semblable peut être faite pour les schémas directs

REFERENCES

[1] G. KREISSELMEIER : "On adaptive state regulation" IEEE Trans AC 27 February 1982

[2] P IOANNOU, P KOKOTOVIC : "Singular perturbations and robust redesign of adaptive control" Coordinated Science Laboratory University of Illinois Urbana, Illinois 61801 May 1982

[3] K.S NARENDRA, B.B PETERSON : "Bounded error adaptive control" IEEE 19^{th} Conference on Decision and Control 1980.

[4] B EGARDT : "Global stability analysis of adaptive control systems with disturbances" Proceed of JACC, San Diego 1980.

[5] C.E. ROHRS, L. VALAVANI, M. ATHANS : "Analytical verification of undesirable properties of direct model reference adaptive control algorithms" IEEE 20^{th} Conference on Decision and Control 1981

[6] L. PRALY : "A direct adaptive control scheme for general stochastic MIMO systems" CAI Ecole des Mines 77305 Fontainebleau Février 1982

[7] M. REDJAH : "Commande adaptative de systèmes multivariables Application à la commande d'un turboalternateur" Thèse de docteur ingénieur CAI Ecole des Mines Mai 1982

[8] C SAMSON : "Stability analysis of adaptively controlled not necessarily minimum phase systems with disturbances" Rapport de Recherche INRIA n° 110 Le Chesnay. France Janvier 1982

[9] Ph DE LARMINAT : "Overall stabilization of linear continuous systems via adaptive control" Laboratoire d'Automatique de Nantes Nantes France Janvier 1981

[10] L PRALY : "MIMO Stachastic adaptive control : stability and robustness" CAI Ecole des Mines 77305 Fontainebleau Mars 1982