THEORIE ALGEBRIQUE DES SYSTEMES LINEAIRES STATIONNAIRES MULTIVARIABLES

F. CHAPLAIS
Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines de Paris
35 rue Saint-Honoré
77305 Fontainebleau CEDEX

Table des matières

Introduction

Automatique et algèbre

L'automatique est couramment présentée comme une science de l'ingénieur (ce qu'elle est). Ce livre est l'occasion de montrer que l'automatique est aussi une discipline mathématique, dotée d'objets, de problèmes et de méthodes propres.

L'objet est autour duquel s'articule l'automatique est le *système*. Au premier abord, il s'agit d'un système différentiel du type $f(z, u, y) = 0$ avec *plus* d'inconnues que d'équations. Ce qui intéresse en fait l'automaticien, c'est la relation qui existe entre la variable u (les entrées) et la variable y (les sorties), *via* l'existence de z (l'état partiel). On appelle cette relation "relation entrées-sorties", et on la représente souvent par le dessin suivant:

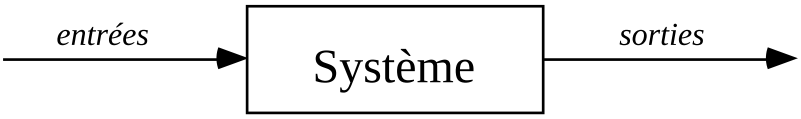

Figure 0.1: Représentation d'un système par boîte noire.

Les flèches ont la signification qu'elles ont classiquement: elles relient les arguments d'un opérateur à ses valeurs. La "boîte noire" interrompant cette flèche est la pour signifier, au milieu de cette relation entrées-sorties, la présence de "variables cachées" z, en fait les conditions initiales du système différentiel.

On ne définira pas d'ailleurs la relation entrées-sorties d'un système dans ce cours: on définira plutôt sous quelle condition deux systèmes différentiels[1] admettent la même relation entrées-sorties, et on appellera *système* la classe d'équivalence correspondante. Un système *est* donc une relation entrées-sorties.

Un fois défini ce que sont les sytèmes, il faudra bien dire ce qu'on en fait. L'opération classique sur les systèmes est le *bouclage*. L'idée en est la suivante: étant donné un système de départ qui, à partir d'entrées (qui sont en fait des commandes), "fabrique" des sorties, on lui accole un *autre* système, que l'on appelle le contrôleur, et qui représente un processus de décision, puisqu'à l'inverse du système de départ il fabrique des commandes à partir des sorties. Si de plus, on fait dépendre ce processus de décision de nouvelles entrées, les consignes, on voit qu'au total on obtient un nouveau système: le système bouclé[2] qui peut se représenter grossièrement sous la forme de la figure .

Le problème auquel se consacrera ce cours est le suivant: étant donné un système, trouver un contrôleur tel que le système bouclé ait un comportement entrées-sorties donné. Il s'agit d'une équation, dont les données sont le système d'origine, le comportement désiré du système bouclé, et dont l'inconnue est le contrôleur.

[1] qu'on appellera "formes opérateurs"

[2] les sorties du premier systèmes sont considérées comme étant encore les sorties du système bouclé

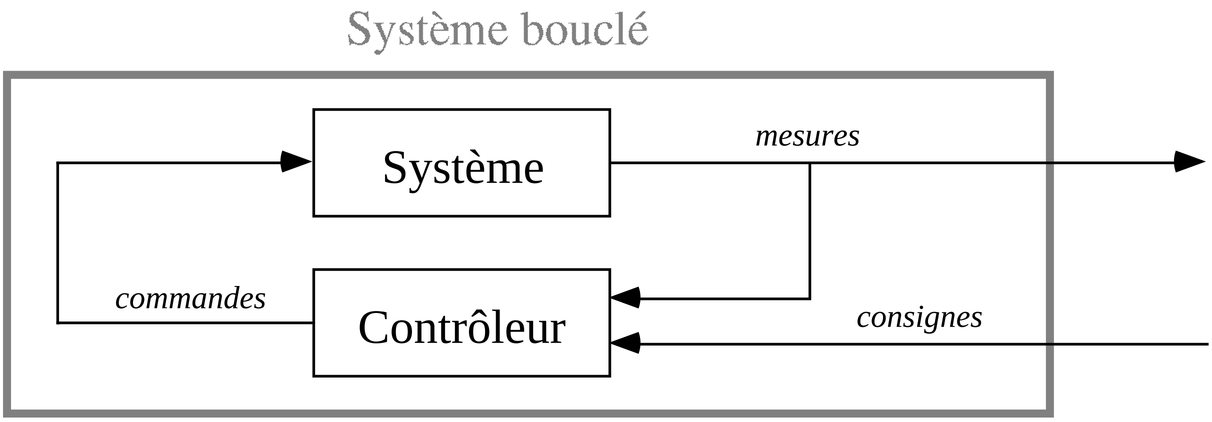

Figure 0.2: Système bouclé (sans bruits ni perturbations).

Voilà pour les objets et les problèmes. Quant aux méthodes, celles que nous aborderons dans ce livre seront des méthodes *algébriques*. Elles trouvent leur origine dans le calcul symbolique sur les équations différentielles linéaires stationnaires. Rappelons brièvement de quoi il s'agit: on commence par remarquer qu'on peut représenter les itérées d'un opérateur par une puissance de ceui-ci, et les combinaisons linéaires de ces itérées par un polynôme. Si de plus cet opérateur est linéaire, comme c'est le cas pour l'opérateur de dérivation, on voit qu'à la composition d'opérateurs correspond le produit de polynômes. Remarquons d'ailleurs que le produit de composition d'un opérateur a par un opérateur b implique l'inclusion du noyau de a dans le noyau de $b \circ a$. Les problèmes de divisibilité seront donc naturellemnt associé à l'étude des *solutions* d'un système différentiel.

C'est pourquoi nous aborderons l'étude des sytèmes par le biais de leur représentation polynômiale; on parlera de *forme opérateur*. Bien que ce type de représentation ne soit pas nouveau, nous verrons qu'il nous permettra de mener de bout en bout[3] le programme que nous nous sommes fixé, à savoir l'assignation de modèle. Mais avant d'en arriver là, nous aurons à résoudre un certains nombre de problèmes préléminaires...

Plan de l'ouvrage

Le plan de ce support de cours sera extrêmement cartésien. La raison est que le sujet se prête particulièrement à une présentation par constructions mathématiques successives, aboutissant à la solution du problème d'assignation de modèle. Cela nécessitera, au passage, l'acquisition de notions d'algèbre probablement peu familières à la plupart des étudiants, mais dont la puissance mérite qu'on s'y attarde.

Nous commencerons par définir (provisoirement) un système comme un système différentiel structuré, qu'on appellera forme opérateur d'un système. Il se trouve que plusieurs formes opérateurs sont susceptibles de représenter un même comportement, c'est-à-dire un même système. C'est le cas, par exemple, si on peut passer d'une forme opérateur à une autre par changement de base statique. La question se pose donc de caractériser les formes opérateurs équivalentes, et d'étudier les propriétés compatibles avec l'équivalence de ces formes . L'outil qui nous permettra de répondre à ces questions sont les matrices polynômiales.

[3]à l'aide de quelques autres anneaux

C'est pourquoi, avant de poursuivre l'étude des systèmes linéaires, nous consacrerons trois chapitres aux propriétés et à l'usage des matrices euclidiennes, qui sont une généralisation (guère difficile) des matrices polynômiales.

On montrera ensuite que les matrices polynômiales constituent un outil *efficace* d'analyse des systèmes différentiels linéaires stationnaires, ceux-là mêmes qui décrivent les formes opérateurs.

Une première application de ce résultat consistera en l'étude de l'*équivalence* de formes opérateurs. On commencera par donner la définition de l'équivalence à partir de l'interprétation d'une forme opérateur comme un système différentiel reliant l'entrée, la sortie et l'état partiel. Le lecteur perspicace aura constaté qu'on peut trouver, par des changements de variables par exemple, d'autres sytèmes différentiels qui admettent les mêmes solutions tout en respectant certaines relations propres à l'automatique. On dira que de tels systèmes différentiels (en fait, les formes opérateurs sous-jacentes) sont équivalents. La classe d'équivalence de ces *descriptions* différentielles constituent ce qu'on appelle un *système*, qui est l'analogue, pour les formes opérateurs, de ce qu'est une application linéaire pour les matrices. L'idée en est d'ailleurs la même: on commence par définir ce qu'est un changement de variable admissible, et on s'en abstrait pour définir une représentation intrinsèque de l'objet qu'on étudie. C'est une démarche qui ne surprendra pas les lecteurs géomètres. Ceci étant fait, on utilisera les résultats du chapitre précédent pour donner une traduction purement algébrique de l'équivalence, et on utilisera cette formulation pour mettre en évidence un certain nombre d'objets ne dépendant pas de la représentation d'un système mais uniquement de celui-ci. Ces objets seront bien sûr les acteurs privilégiés de ce qui va suivre.

Ayant défini les systèmes, on passera ensuite à l'étude de leurs propriétés, parmi lesquelles commandabilité, observabilité et stabilité. A ce niveau, deux présentations sont possibles:

- on peut commencer par "parachuter" les définitions de la stabilité, de l'observabilité, de la contrôlabilité dans le cadre général des formes opérateur, montrer qu'elles recouvrent les définitions bien connues dans le cas de la forme d'état, et conclure en montrant que ces propriété sont invariantes par équivalence
- soit commencer par montrer que tout système admet une représentation d'état, et en déduire la définition de la commandabilité, etc... pour les systèmes et formes opérateurs en se ramenant à aux formes d'état.

Nous avons choisi la deuxième présentation parce qu'il nous semble que les notions de stabilité, etc..., sont beaucoup plus facile à comprendre dans ce cadre. C'est d'ailleurs sous cette forme qu'elle sont enseignées aux étudiants en premier lieu. De plus, la seconde méthode est parfaitement claire, alors que la première présente les ambigüités de toute méthode inductive.

On finira ce chapitre en reliant observabilité et commandabilité au problème de la réalisation minimale d'un *transfert.*

Ces propriétés définies et étudiées, on définira l'opérateur de base sur les sytèmes: le bouclage. Puis on étudiera les propriétés de ce sysème bouclé en relation avec celles des systèmes de départ. On conclura en montrant que l'étude du système bouclé peut, en tout état de cause, être menée uniquement à partir des transferts des systèmes de départ.

Ceci est en particulier vrai de la stabilité. C'est pourquoi, avant de résoudre l'équation du bouclage, on s'intéressera aux propriétés des fractions rationnelles propres stables.

Cette parenthèse technique nous permettra de résoudre dans le dernier chapitre le problème de l'assignation de modèle.

Remerciements

Merci à Laurent Praly sans qui j'aurais eu toutes les peines du monde à monter ce cours la première année et qui a toujours pris le temps de répondre à mes (nombreuses) questions.

Chapitre 1

Forme opérateur d'un système linéaire

Nous allons présenter dans ce chapitre les éléments d'Automatique autour desquels sera construit ce livre.

Nous commencerons par définir la *forme opérateur* d'un système comme un quadruplet de matrices polynômiales; on montrera que la forme d'état est un cas particulier des formes observateurs; c'est également le cas des formes auto-régressives.

Puis nous donnerons une interprétation des formes opérateurs en leur associant un *système différentiel*. Cette interprétation nous permettra de définir les entrées, les sorties et l'état partiel d'une forme opérateur comme des inconnues de ce sytème différentiel.

Comme dans le cas des formes d'état, on définira le *transfert* d'une forme opérateur en éliminant formellement l'état partiel du système différentiel. On obtiendra naturellement un objet vivant dans le *corps* des fractions rationnelles, et non plus dans l'anneau des polynômes. On rappellera brièvement l'interprétation fréquentielle du transfert, interprétation qui motivera en partie l'étude menée dans le chapître 11.

On mettra surtout en évidence l'isomorphisme qui existe entre les opérateurs différentiels linéaires stationnaires et les polynômes à coefficients constants (théorème 1.1). C'est cet isomorphisme qui justifie l'utilisation du *calcul symbolique* dans l'algèbre des polynômes pour représenter la manipulation d'opérateurs différentiels, et donc l'étude des *solutions* de ces systèmes différentiels. C'est ce résultat qui fonde l'ensemble de ce livre.

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Matrice polynômiale) *On appellera matrice polynômiale une matrice dont les éléments sont des polynômes. Sauf indication contraire, ces polynômes seront à coefficients réels.*

Définition 1.2 (Rang d'une matrice polynômiale) *On dira qu'une matrice polynômiale carrée est de rang plein si son déterminant est non identiquement nul.*
Le rang d'une matrice polynômiale est défini comme étant la taille maximale de ses matrices carrées extraites de rang plein.

Remarque: Celà revient à considérer la matrice comme matrice d'une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}(s)^q$ dans $\mathbb{R}(s)^p$, où $\mathbb{R}(s)$ est le corps des fractions rationnelles. Le rang est alors donné par la dimension de l'image.

Définition 1.3 (Opérateur différentiel associé à un polynôme) *A un polynôme réel*

$$p(s) = \sum_{i=0}^{i=n} p_i s^i \tag{1.1}$$

on associe l'opérateur différentiel $p(\frac{d}{dt})$*, de* $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *dans* $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *défini par*

$$p(\frac{d}{dt}) = \sum_{i=0}^{i=n} p_i \frac{d^i}{dt^i} \tag{1.2}$$

Définition 1.4 (Opérateur différentiel associé à une matrice polynômiale) *A une matrice poly-nômiale* M *de taille* $p \times q$ *et d'élément courant* m_{ij} *on associe l'opérateur différentiel* $M(\frac{d}{dt})$ *défini par:*

$$\begin{array}{cccc} M(\frac{d}{dt}): & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^q) & \rightarrow & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^p) \\ & \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{j=q} m_{1,j}(\frac{d}{dt})(z_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{j=q} m_{p,j}(\frac{d}{dt})(z_j) \end{bmatrix} \end{array} \tag{1.3}$$

Théorème 1.1 (Théorème fondamental) *On a la relation de commutation suivante:*

$$(P \times Q)(\frac{d}{dt}) = P(\frac{d}{dt}) \circ Q(\frac{d}{dt}) \tag{1.4}$$

Preuve: celà résulte de la linéarité de l'opérateur de dérivation.

Définition 1.5 (Forme opérateur d'un système) *Une forme opérateur d'un système linéaire stationnaire multivariable consiste en la donnée de quatre matrices polynômiales* $P(s)$*,* $Q(s)$*,* $R(s)$ *et* $W(s)$*, de tailles respectives* $p \times p$*,* $p \times q$*,* $r \times p$ *et* $r \times q$*, où* $P(s)$ *est de déterminant non constant*[1]*.*

Remarque: nous n'avons pas (pas encore) défini ce qu'était un système; l'expression "forme opérateur d'un sytème" est donc à considérer dans son ensemble. En fait, cette expression est tout à fait justifié, dans la mesure où nous verrons (chapitre 6) qu'un système est une classe d'équivalence de formes opérateurs; une forme opérateur est donc bien une *représentation* d'un système.

[1] en particulier P est de rang plein

La *description différentielle* de la forme opérateur est alors donnée par l'application qui à u, fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$, associe l'ensemble des couples de fonctions réelles (z, y) de classe $\mathcal{C}^\infty$, solution de l'équation différentielle:

$$\begin{bmatrix} P(\frac{d}{dt}) & Q(\frac{d}{dt}) \\ -R(\frac{d}{dt}) & W(\frac{d}{dt}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Il s'agit d'équations différentielles linéaires stationnaires, d'où le nom de *système linéaire stationnaire.*

Aux fonctions u on donne le nom d'*entrées*; y représente les *sorties*; z est l'*état partiel.*

On peut voir une forme opérateur comme un système différentiel ordinaire paramétré par les entrées u. Remarquons à ce propos que cela nous assure l'existence de z pour toute condition initiale dès que u est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Bien que la séparation entre entrée et état n'aparaisse pas ici formellement nécessaire, elle prendra son sens lorsqu'on parlera de *formes opérateurs équivalentes.* En effet, alors que les entrées sont donnés ("physiquement") de manière unique pour toutes les formes opérateurs, l'état partiel peut varier d'une représentation à une autre.

Ce qui précède concerne les sytèmes en *temps continu.* En temps discret, il convient de remplacer les fonctions par des suites, et l'opérateur de dérivation par l'opérateur d'avance, qui remplace la suite x_k par la suite x_{k+1}.

Bien que l'opérateur d'avance soit utilisé de manière standard en temps discret, on peut également utiliser l'opérateur *aux différences*, qui est l'analogue discret des l'opérateur de dérivation. Cet opérateur remplace la suite x_k par la suite $x_{k+1} - x_k$.. Remplacer un opérateur par l'autre revient simplement à faire un changement de générateur sur l'anneau des polynômes.

1.2 Exemples

1.2.1 Un exemple numérique

Prenons par exemple

$$\left\{ \begin{array}{lcc lcc} P(s) & = & \begin{bmatrix} s^2+1 & s-1 \\ s^2-1 & s+1 \end{bmatrix} & Q(s) & = & \begin{bmatrix} 2s \\ 1 \end{bmatrix} \\ R(s) & = & \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} & W(s) & = & 0 \end{array} \right. \tag{1.6}$$

L'équation différentielle associée s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d^2z_1}{dt^2} + z_1 + \frac{dz_2}{dt} - z_2 & = & 2\frac{du}{dt} \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} - z_1 + \frac{dz_2}{dt} + z_2 & = & u \\ y & = & z_1 + \frac{dz_2}{dt} \end{array} \right. \tag{1.7}$$

1.2.2 Forme d'état

Définition 1.6 (Forme d'état) *On dira qu'une forme opérateur est une forme d'état lorsque $sId - P(s)$, $Q(s)$, $R(s)$ et $W(s)$ sont des matrices constantes.*

On retrouve la définition classique d'une forme d'état, puisque le sytème différentiel associé s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dz}{dt} & = & \tilde{P}z + Qu \\ y & = & Rz + Wu \end{array} \right. \tag{1.8}$$

avec $\tilde{P} = sId - P(s)$. z est alors l'état du système au sens classique du terme, ce qui explique l'appellation d'état partiel utilisée ci-dessus.

Définition 1.7 (Forme d'état généralisée) *On reprend la définition précédente sans exiger que $W(s)$ soit constante.*

1.2.3 Forme observateur, forme contrôleur

Définition 1.8 (Forme observateur) *Une forme opérateur est sous forme observateur lorsque $R(s)$ est égal à l'identité.*

Le système différentiel s'écrit alors:

$$P(\frac{d}{dt})y = (PW + Q)(\frac{d}{dt})u \tag{1.9}$$

sachant qu'on a alors $z = y - W(\frac{d}{dt})u$. C'est l'équivalent déterministe d'une forme ARMA. Le système différentiel porte directement sur la sortie.

Définition 1.9 (Forme contrôleur) *Une forme opérateur est sous forme contrôleur lorsque $Q(s)$ est égal à l'identité.*

1.3 Transfert d'une forme opérateur

1.3.1 Définition

Dans le cas d'une forme d'état on définit le transfert par l'élimination formelle de l'état dans les relations définissant le système. On procèdera de même ici en éliminant z dans (1.5).

Définition 1.10 (Transfert d'une forme opérateur) *Le transfert d'une forme opérateur (P, Q, R, W) est défini par*

$$T = RP^{-1}Q + W \tag{1.10}$$

où P^{-1} est l'inverse de P au sens des matrices à éléments dans le corps *des fractions rationnelles.*

$T(s)$ est donc une matrice dont les éléments sont des fractions rationnelles. Notons que P^{-1} existe car P est de rang plein.

1.3.2 Réponse fréquentielle d'une forme d'état

Théorème 1.2 *Soit $(sId - A, B, C, D(s))$ une forme d'état généralisée, de transfert $T(s) = C(sId-A)^{-1}B+D(s)$. On notera T_j la j^{eme} colonne de T. A un vecteur réel $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_q)^T$ on associe la fonction d'entrée $u_\omega(t) \equiv (e^{i\omega_1 t}, \dots, e^{i\omega_q t})^T$; on supposera qu'aucune pulsation $i\omega_j$ n'est valeur propre de A.*[2] *Alors*

- *il existe une condition initiale pour laquelle la sortie y est égale à la* réponse fréquentielle *y_ω avec*

$$y_\omega(t) = \sum_{j=1}^{j=q} T_j(i\omega_j)e^{i\omega_j t} \tag{1.11}$$

[2]on pourra supposer, par exemple, que A n'a aucune valeur propre imaginaire pure

- *si les valeurs propres de A sont toutes à partie réelle négative stricte, alors, pour toute borne β sur les conditions initiales il existe deux réels positifs stricts K et λ tels que, pour toute condition initiale de norme inférieure à β, on ait:*[3]

$$\|y(t) - y_\omega(t)\| \leq Ke^{-\lambda t} \quad \forall t \geq 0 \tag{1.12}$$

Autrement dit, la sortie converge exponentiellement vers la réponse fréquentielle.

Preuve: Soit X le vecteur d'état et X_0 une condition initiale. On note e_j le j^{eme} vecteur de base de l'espace des entrées. Alors

$$\begin{aligned}
y(t) &= Ce^{At}X_0 + C\int_0^t e^{A(t-s)}Bu_\omega(s)\,ds + [D(\frac{d}{dt})u_\omega](t) \\
&= Ce^{At}X_0 + Ce^{At}\sum_{j=1}^{j=q}\int_0^t e^{(i\omega_j Id - A)s}Be_j\,ds + [D(\frac{d}{dt})u_\omega](t) \\
&= Ce^{At}X_0 + Ce^{At}\sum_{j=1}^{j=q}(i\omega_j Id - A)^{-1}[e^{(i\omega_j Id - A)t} - Id]Be_j + [D(\frac{d}{dt})u_\omega](t) \\
&= Ce^{At}(X_0 - \sum_{j=1}^{j=q}(i\omega_j Id - A)^{-1}Be_j) + C\sum_{j=1}^{j=q}(i\omega_j Id - A)^{-1}Be_j e^{i\omega_j t} + [D(\frac{d}{dt})u_\omega](t) \\
&= Ce^{At}(X_0 - \sum_{j=1}^{j=q}(i\omega_j Id - A)^{-1}Be_j) + \sum_{j=1}^{j=q}T_j(i\omega_j)e^{i\omega_j t} \\
&= Ce^{At}(X_0 - \sum_{j=1}^{j=q}(i\omega_j Id - A)^{-1}Be_j) + y_\omega(t)
\end{aligned}$$

Pour obtenir la réponse fréquentielle, il suffit de prendre

$$X_0 = \sum_{j=1}^{j=q}(i\omega_j Id - A)^{-1}Be_j \tag{1.13}$$

De plus, si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle négative stricte, on sait qu'il existe K et λ positifs stricts tels que

$$\|e^{At}\| \leq Ke^{-\lambda t} \tag{1.14}$$

On en déduit alors facilement la deuxième assertion du théorème.

Remarques:

- on voit facilement qu'on peut obtenir des estimations uniformes relativement à des pulsations $i\omega_j$ décrivant un domaine compact de $i\mathbb{R}$, à condition que ce domaine ne contienne pas de valeur propre de A, i.e. de singularité de $(sId - A)$.
- on voit que dans ce qui précède la matrice $D(s)$ intervient dans notre analyse de manière complètement indépendante de A, B et C. Supposons par exemple D nul. Alors, pour une matrice A à valeurs propres strictement à gauche de l'axe imaginaire pur, l'application entrée sortie[4] est une application affine, uniformément continue relativement aux conditions initiales, de $L^2(\mathbb{R}^+)$ dans $C^0(\mathbb{R}^+)$[5]; d'autre part, l'application qui à ω associe $T_j(i\omega)$ est globalement Lipschitz quand ω décrit $\mathbb{R}$. Le résultat précédent s'étendent alors à une superposition L^2 de sinus, et les approximations sont valables en norme sup sur les sorties.

[3]on peut obtenir la même estimation dans le cas général, mais λ n'est plus négatif, et le résultat est alors d'un intérêt bien inférieur.

[4]i.e., l'application qui, à état initial donné, associe à une entrée de la forme d'état la sortie correspondante.

[5]les sorties sont bornées

On voit donc que le transfert, outre sa signification algébrique propre, a une signification analytique extrêmement précieuse pour l'analyse quantitative et qualitative du comportement entrées-sorties des systèmes. Nous verrons ultérieurement qu'on peut ramener toute forme opérateur à une forme d'état, éventuellement généralisée, et ceci sans modifier le transfert, les valeurs propres de A étant les zéros de $\det P$. L'interprétation précédente du transfert se généralisera alors sans difficulté au cas d'une forme opérateur générale.

1.4 Et maintenant, un peu de technique...

En définissant les formes opérateurs, nous avons établi une correspondance formelle entre les systèmes différentiels et les matrices polynômiales. Il s'agit d'apprécier maintenant dans quelle mesure le passage à un contexte purement algébrique permet de résoudre les problèmes qu'on est amené habituellement à se poser en Automatique. Cela suppose une certaine maîtrise de ces outils algébriques; c'est pourquoi nous allons quitter temporairement le domaine de l'Automatique pour nous intéresser aux *matrices à éléments dans un anneau euclidien.*

Chapitre 2

Matrices euclidiennes et formes canoniques

Ce chapitre ainsi que les deux suivants est constitué de rappels d'algèbre, d'un intérêt par ailleurs général.

On commencera par rappeler quelques notions d'algèbre commutative: anneau principal et euclidien; on montrera en particulier que les anneaux euclidiens sont principaux, et comment l'algorithme d'Euclide permet un calcul effectif des PGCD.

Puis on commencera l'étude des *matrices à éléments dans un anneau euclidien*. On caractérisera les matrices inversibles au sens de l'anneau (ou unimodulaires), ce qui permettra de généraliser au cas matriciel la notion d'équivalence, c'est-à-dire l'égalité à un inversible près. L'algèbre matricielle étant non commutative, il conviendra de différencier équivalence à gauche, équivalence à droite, et équivalence bilatérale.

Puis on s'intéressera à deux problèmes classiques du calcul matriciel: la triangulation et la diagonalisation. On montrera qu'une matrice est

- équivalente (à gauche ou à droite) à une matrice triangulaire
- équivalente à une matrice diagonale

On montrera, dans le cas euclidien, que le calcul d'une forme triangulaire (forme d'Hermite) sur une matrice unimodulaire revient à un calcul d'inverse.

2.1 Corps des fractions. Anneau principal. Anneau euclidien

2.1.1 Anneau. Corps des fractions

On supposera connue la définition d'un anneau.

On rappelle qu'un anneau est *commutatif* lorsque sa seconde loi (multiplicative) est commutative. Un anneau est dit *intègre* lorsqu'on a:

$$a.b = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0) \tag{2.1}$$

Enfin, un anneau est dit unitaire si sa loi multiplicative possède un élément neutre. **On supposera ces trois propriétés toujours vérifiées.** Dans tout ce qui suivra "anneau" signifiera "anneau commutatif unitaire intègre". On a alors le théorème suivant:

Théorème 2.1 (Corps des fractions) *A tout anneau on peut associer son* corps des fractions*, corps dont il est un sous-anneau.*

Preuve: la construction est la même que celle des fractions ordinaires à partir des entiers relatifs. Le fait que l'anneau de départ soit un sous-anneau du corps résulte de l'existence d'un élément neutre pour la multiplication.

2.1.2 Anneau principal

Définition 2.1 (Idéal) *Un idéal d'un anneau est un sous-groupe additif tel que le produit d'un élément quelconque de cet idéal par un élément quelconque de l'anneau est encore un élément de l'idéal.*

Définition 2.2 (Idéal principal) *Un idéal d'un anneau est dit principal s'il est engendré par un seul élément a, i.e. tous ses éléments peuvent se mettre sous la forme xa, où x est un élément de l'anneau.*

Remarque: $\{0\}$ est un idéal principal, engendré par 0 et 0 seulement.

Définition 2.3 (Anneau principal) *Un anneau est dit principal si tous ses idéaux sont principaux.*

On rappelle qu'un anneau est dit *factoriel* si tous ses éléments non inversibles peuvent être décomposés de manière unique (à des éléments inversibles près) en produit de facteurs premiers non inversibles. On montre que tout anneau principal est factoriel.

Définition 2.4 (PGCD) *Soit $\mathcal{A}$ un anneau principal, et $(a_1, \ldots, a_n)$ n éléments de $\mathcal{A}$. d est un PGCD de $(a_1, \ldots, a_n)$ si d est un générateur de l'idéal engendré par $(a_1, \ldots, a_n)$.*

Remarques:

- on peut définir la notion de PGCD sans supposer que $\mathcal{A}$ soit principal. Cette dernière propriété nous garantit simplement l'existence d'un PGCD.
- $\text{PGCD}(0, \ldots, 0) = 0$.

Théorème 2.2 (Identité de Bezout) *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

- *d est un PGCD des $(a_1, \ldots, a_n)$*

- *d est un plus grand commun diviseur des $(a_1, \ldots, a_n)$, i.e. d est un diviseur*[1] *commun des $(a_1, \ldots, a_n)$ et d est multiple de tout diviseur commun des $(a_1, \ldots, a_n)$*
- *d est un diviseur commun des $(a_1, \ldots, a_n)$ et il existe n éléments $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{A}$ tels que*

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i a_i = d \tag{2.2}$$

Cette dernière identité est dite identité de Bezout.

Preuve: il suffit essentiellement de remarquer que d est un PGCD des $(a_1, \ldots, a_n)$ si et seulement si on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \mathcal{A} = d\mathcal{A} \tag{2.3}$$

Le reste de la preuve est laissée en exercice.

Définition 2.5 (Eleménts premiers entre eux) $(a_1, \ldots, a_n)$ *sont* premiers entre eux *s'ils ont un PGCD inversible (par exemple l'élément neutre de la multiplication).*

On appelle aussi *équation diophantine* l'identité de Bezout. De manière générale la division est inconnue dans un anneau; c'est l'équation diophantine qui tient lieu d'équation d'inversion lorsque l'ont dispose d'éléments premiers entre eux. C'est là que réside l'intérêt des idéaux principaux.

Exemples d'anneaux principaux: tous les corps sont des anneaux principaux; également l'anneau des entiers relatifs, celui des polynômes. Tous ces anneaux sont en fait des anneaux *euclidiens*; nous allons voir que tous les anneaux euclidiens sont des anneaux principaux.

2.1.3 Anneau euclidien

Définition. Propriété fondamentale

Définition 2.6 (Anneau euclidien) *Un anneau*[2] *$\mathcal{A}$ est dit* euclidien *s'il existe une application δ, dite application degré, de $\mathcal{A} - \{0\}$ dans l'ensemble des entiers naturels, telle que*

- *pour tout $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{A} - \{0\}$, il existe q et r dans $\mathcal{A}$ tels que*
  - $x = qy + r$
  - $r = 0$ *ou* $\delta(r) < \delta(y)$
- *si x divise y, avec x et y non nuls, alors $\delta(x) \leq \delta(y)$*

La première condition exprime l'existence d'une *division euclidienne*; q est le quotient, r le reste. De la seconde condition on peut déduire que tous les éléments inversibles sont de même degré, et que ce degré est minimal. Quitte à opérer une translation sur la fonction degré, on supposera toujours que les éléments inversibles sont de degré nul.

Dans le cas d'un anneau principal on peut définir un pseudo-degré satisfaisant uniquement à la deuxième condition en prenant pour $\delta(x)$ le nombre de facteurs premiers de x, en posant par convention $\delta(x) = 0$ pour x inversible.

---

[1] par convention, 0 est le seul diviseur de 0

[2] non réduit à 0

Théorème 2.3 (condition suffisante d'unicité du reste) *On se donne un anneau euclidien, et on suppose de plus que pour tout a,b dans l'anneau on a*

$$\deg(a+b) \leq \max(\deg(a), \deg(b)) \tag{2.4}$$

Alors le quotient et le reste de division euclidienne sont uniques.

Preuve: posons deux divisions euclidiennes de a par b, soit

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 && (2.5)\\ a &= bq_2 + r_2 && (2.6) \end{aligned}$$

Alors on a $r_1 - r_2 = b(q_1 - q_2)$; si r_1 est différent de r_2, on a $q_1 \neq q_2$ et

$$\begin{aligned} \deg(r_1 - r_2) &\leq \max(\deg(r_1), \deg(r_2)) \\ &< \deg(b) \\ &\leq \deg b(q_1 - q_2) \\ &= \deg(r_1 - r_2) \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire.

Remarques:

- il s'agit d'une unicité *véritable*, et non pas d'une unicité à un élément inversible près
- l'anneau euclidien des fractions rationnelles propres (c.f. exercice) est un exemple d'anneau où la division euclidienne n'est pas unique.

Théorème 2.4 (essentiel) *Un élément x d'un idéal non nul[3] $\mathcal{I}$ d'un anneau euclidien engendre $\mathcal{I}$ si et seulement si x est non nul et de degré minimal dans $\mathcal{I}$.*

En particulier tous les anneaux euclidiens sont principaux.

Preuve:

Condition suffisante: soit y dans $\mathcal{I}$; opérons la division euclidienne de y par x, et soit r le reste. $\mathcal{I}$ étant un idéal, r est donc dans $\mathcal{I}$. Or si r est non nul, c'est un élément de $\mathcal{I}$ de degré inférieur strict à celui de x. Cela est inpossible; on en déduit que x divise y. Ceci étant vrai pour tout y, x engendre $\mathcal{I}$.

Condition nécessaire: soit y un élément de $\mathcal{I}$ de degré minimal (il en existe). Alors (voir plus haut) y engendre $\mathcal{I}$ comme x. On en déduit qu'ils se divisent mutuellement et que leurs degrés sont égaux; x est donc de degré minimal.

Remarque: la condition nécessaire reste vrai dans un anneau principal en prenant le pseudo-degré. En effet, deux éléments générateurs de $\mathcal{I}$ se divisent mutuellement, et ils divisent tous les éléments de $\mathcal{I}$.

Corollaire 2.1 on en déduit que tout élément de degré nul est inversible (la reciproque étant établie par convention).

[3] i.e., non réduit à 0

Algorithme d'Euclide

Soit $(a_1, \dots, a_n)$ n éléments de $\mathcal{A}$, non tous nuls. On définit l'algorithme suivant:

- initialisation
  1. pour $j = 1$ à n faire
     (a) $r_j = a_j$
     (b) $\alpha_{j,k} = \delta_{j,k}$, où $\delta_{j,k}$ est l'indice de Kronecker associé à (j, k)
     (c) $\beta_{j,k} = \delta_{j,k}$
- boucle
  - si tous les r_j, ou tous sauf un, sont nuls, STOP, sinon:
  - soit r_{j_0} un élément de degré minimal parmi les r_j non nuls.
    1. Poser la division des r_j par r_{j_0}, soit $r_j = q_j r_{j_0} + s_j$
    2. faire $r_j = s_j$ pour $j \neq j_0$
    3. faire $\alpha_{i,j_0} = \alpha_{i,j_0} + \sum_{j \neq j_0} \alpha_{i,j} q_j$
    4. pour $j \neq j_0$ faire $\beta_{j,i} = \beta_{j,i} - q_j \beta_{j_0,i}$
  - recommencer la boucle

Théorème 2.5 (Algorithme d'Euclide) *L'algorithme précedent s'arrête au bout d'un nombre fini de coups. Tous les r_j sont alors nuls sauf r_{j_0}, et r_{j_0} est un PGCD des $(a_1, \dots, a_n)$, avec:*

1. $\sum_{j=1}^{j=n} \beta_{j_0,i} a_i = r_{j_0}$
2. $a_i = \alpha_{i,j_0} r_{j_0}$, $i = 1$ *à* n

Preuve: On vérifie sans peine qu'à chaque étape de l'algorithme on a:

$$a_i = \sum_{j=0}^{j=n} \alpha_{i,j} r_j \tag{2.7}$$

$$r_j = \sum_{i=0}^{i=n} \beta_{j,i} a_i \tag{2.8}$$

On en déduit en particulier que les r_j ne peuvent tous être nuls, car les a_i ne le sont pas. D'autre part, le degré de r_{j_0} diminue à chaque itération tant que tous les restes s_j ne sont pas nuls. L'algorithme s'arrête donc au bout d'un nombre fini d'itérations. Les deux identités précédentes, appliquées au dernier terme de la suite des r_{j_0}, permettent de conclure.

2.2 Matrices à éléments dans un anneau euclidien

2.2.1 Définition. Matrices unimodulaires

Définition 2.7 (matrice entière, euclidienne) *Une matrice entière est une matrice dont les éléments sont dans un anneau $\mathcal{A}$. Elle est dite euclidienne si l'anneau est euclidien.*

Suivant la convention établie précédemment, on supposera *toujours* l'anneau commutatif unitaire intègre. Le rang d'une matrice entière est alors défini comme étant le rang de cette matrice lorsqu'on considère ses éléments comme faisant partie du corps des fractions associé. On peut aussi procéder directement en calculant les mineurs de la matrice.

Définition 2.8 (matrice unimodulaire) *Une matrice carrée entière est dite unimodulaire si elle admet un inverse qui soit une matrice entière.*

Interprétation différentielle: on prend $\mathrm{R}[s]$ comme anneau euclidien, et à l'indéterminée s on substitue l'opérateur $\frac{d}{dt}$. Le produit par une unimodulaire à gauche (resp. à droite) correspond alors à un changement de variable *différentiellement réversible* dans l'espace d'arrivée (resp. sur les inconnues de l'équation différentielle). Cette interprétation présente l'intérêt d'être extensible en dehors du cas linéaire stationnaire. On voit également que c'est essentiellement l'opération de *composition d'opérateurs différentiels* qui est importante, l'addition étant plutôt un artefact résultant de la linéarité.

Théorème 2.6 (caractérisation des matrices unimodulaires) *Une matrice entière carrée est unimodulaire si et seulement si sont déterminant est inversible dans l'anneau.*

Preuve: La partie nécessaire résulte du fait que le déterminant du produit de deux matrices est le produit de leurs déterminants.

Partie suffisante: la matrice est alors de rang plein, et donc inversible dans le corps des fractions associé. Les formules classiques d'inversion de Cramer nous montrent que l'inverse est encore dans l'anneau.

2.2.2 Opérations élémentaires

On définit les *opérations élémentaires de lignes* sur les matrices entières de la manière suivante:

Définition 2.9 (opérations élémentaires de lignes) *Ce sont les opérations suivantes:*

- *permutation de deux lignes*
- *multiplication d'une ligne par un élément* inversible *de l'anneau*
- *ajout à une ligne du produit d'une* autre *ligne par un élément* quelconque *de l'anneau*

On définit de même les opérations élémentaires de colonnes.

Théorème 2.7 *Les opérations élémentaires de lignes (resp. de colonnes) sont équivalentes au produit à gauche (resp. à droite) par les matrices suivantes:*

- *permutation de deux lignes:* $$\begin{bmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 0 & \cdots & 1 &&& \\ &&& \vdots && \vdots &&& \\ &&& 1 & \cdots & 0 &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{bmatrix}$$
- *multiplication de la i^{eme} ligne par un élément λ inversible de l'anneau: $Id + (1-\lambda)M_i$, où M_i a tous ses éléments nuls sauf le i^{eme} élément de la diagonale, égal à 1.*
- *ajout à la i^{eme} ligne du produit de la j^{eme} ligne par un élément λ quelconque de l'anneau: $Id + \lambda N_{i,j}$, où $N_{i,j}$ a tous ses éléments nuls sauf celui de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne, égal à 1.*

Toutes ces matrices sont unimodulaires.

Preuve: Un simple calcul montre que les matrices représentent bien les opérations correspondantes. L'inverse d'une opération élémentaire étant une opération élémentaire de même type, on en déduit que ces matrices sont unimodulaires.

Définition 2.10 (Equivalence de matrices) *On dira que deux matrices euclidiennes sont ligne (resp. colonne) équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires de lignes (resp. de colonnes). On dira qu'elles sont équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires de lignes* ou *de colonnes.*

Remarque: on vérifie qu'il s'agit bien de relations d'équivalence.

Equivalence à gauche et à droite: on dira que deux matrices entières sont équivalentes à gauche (resp.à droite) si l'une est égale au produit à gauche (resp. à droite) de l'autre par une unimodulaire. De manière analogue on définit l'équivalence bilatérale; on parlera de matrices bi-équivalentes. Deux matrices ligne-équivalentes sont donc équivalentes à gauche. Nous verrons que la réciproque est vraie dans le cas des matrices euclidiennes; elle ne l'est pas dans un anneau principal quelconque.

2.2.3 Forme triangulaire (Hermite)

Lemme 2.1 Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ un vecteur [4] ligne de n éléments de l'anneau euclidien, et r un PGCD des a_i. Alors le vecteur $(a_1, \ldots, a_n)$ est colonne équivalent à $(r, 0, \ldots, 0)$[5]. On a un résultat analogue sur la ligne équivalence en transposant tout.

Preuve: Il suffit de vérifier que l'algorithme d'Euclide, décrit précédemment, s'implémente au moyen d'opérations élémentaires.

Cas d'un anneau principal: le résultat demeure en remplaçant la ligne (resp. colonne) équivalence par l'équivalence à gauche (resp. à droite). On commence par montrer qu'il existe une matrice de déterminant r ayant $(a_1, \ldots, a_n)$ comme première ligne.

[4] "vecteur" est à prendre au sens de "matrice à une ligne ou une colonne", puisqu'il n'y a pas d'espace vectoriel sous-jacent (en fait, un module).

[5] si tous les a_i sont nuls, $r = 0$.

Le résultat est en effet vrai pour $n = 2$. Supposons le vrai pour n, et notons D_n la matrice correspondante. Soit r_n un PGCD des $(a_1, \ldots, a_n)$, et r_{n+1} un PGCD des $(a_1, \ldots, a_{n+1})$. Alors r_{n+1} est un PGCD de r_n et de a_{n+1}. Il existe donc p et q tels que $pr_n - qa_{n+1} = r_{n+1}$. Il suffit maintenant de prendre

$$D_{n+1} = \left[\begin{array}{ccc|c} & D_n & & \begin{matrix} a_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \frac{a_1 q}{r_n} & \cdots & \frac{a_n q}{r_n} & p \end{array}\right] \tag{2.9}$$

ce qui prouve la récurrence.

Soit maintenant l'identité de Bezout pour $(a_1, \ldots, a_n)$:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i a_i = r \tag{2.10}$$

et U une matrice unimodulaire ayant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pour première ligne (les $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont premiers entre eux). Alors le produit à gauche du vecteur $(a_1, \ldots, a_n)$ par U est un vecteur de la forme $(r, b_2, \ldots, b_n)$, où les b_i sont des multiples du PGCD r. Il est alors facile, par des opérations de lignes (donc par le produit à gauche par une unimodulaire) de se ramener à $(r, 0, \ldots, 0)$.

Théorème 2.8 (Forme d'Hermite) *Toute matrice euclidienne de taille $p \times q$ est ligne équivalente (resp. colonne équivalente) à une matrice euclidienne H de la forme suivante:*

- $H = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,p} & \cdots & h_{1,q} \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & h_{p,p} & \cdots & h_{p,q} \end{bmatrix}$ *pour $p \leq q$*
- $H = \left[\begin{array}{ccc} h_{1,1} & \cdots & h_{1,q} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & h_{q,q} \\ \hline & 0 & \end{array}\right]$ *pour $p \geq q$*

(respectivement:

- $H = \left[\begin{array}{ccc|c} h_{1,1} & & 0 & \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ h_{p,1} & \cdots & h_{p,p} & \end{array}\right]$ *pour $p \leq q$*
- $H = \begin{bmatrix} h_{1,1} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ h_{q,1} & \cdots & h_{q,q} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{p,1} & \cdots & h_{p,q} \end{bmatrix}$ *pour $p \geq q$)*

avec $d^o h_{i,j} < d^o h_{j,j}$[6] *(resp. $d^o h_{j,i} < d^o h_{j,j}$) pour $i < j$ lorsque $h_{j,j}$ est non inversible et non nul, et $h_{i,j}$ (resp. $h_{j,i}$) $= 0$ lorsque $h_{j,j}$ est inversible. Une telle matrice ligne (resp. colonne) équivalente à une matrice M est dite forme d'Hermite supérieure (resp. inférieure) de M.*

Remarque: par définition, toutes les formes d'Hermite supérieures (resp. inférieures) d'une matrice sont donc ligne (resp. colonne) équivalentes.

Preuve: on s'intéressera à la forme supérieure; le lecteur transposera pour la forme inférieure.

[6] à condition bien sûr que l'élément diagonal $h_{j,j}$ soit défini

On procède par récurrence sur le nombre q de colonnes de la matrice M de départ.

Le résultat est vrai pour $q = 1$, d'après le lemme 2.1. Supposons maintenant le résultat vrai pour q et considérons M à $q + 1$ colonnes.

On commence par supposer que q est inférieur strict à p le nombre de lignes. Soit M_1 la matrice extraite de M en rayant la dernière colonne, et M_2 la matrice constituée de la dernière colonne. Par récurrence, on peut, par opérations de ligne, mettre M_1 sous forme d'Hermite $\tilde{H}$. On peut donc, par les mêmes opérations de lignes, mettre M sous la forme $[\tilde{H}, N]$, soit:

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{h}_{1,1} & \cdots & \tilde{h}_{1,q} & n_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \tilde{h}_{q,q} & n_q \\ \hline & & & n_{q+1} \\ & 0 & & \vdots \\ & & & n_p \end{array}\right] \tag{2.11}$$

D'après le lemme précédent, on peut alors, par des opérations sur les $p - q$ dernières lignes de cette matrice, la mettre sous la forme:

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \tilde{h}_{1,1} & \cdots & \tilde{h}_{1,q} & n_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \tilde{h}_{q,q} & n_q \\ \hline & & & \tilde{n}_{q+1} \\ & & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 0 \end{array}\right] \tag{2.12}$$

Cela ne change, bien sûr, rien à la composition des q premières lignes. Pour conclure la récurrence, il nous suffit de remplacer les n_i, pour $i = 1$ à q, par le reste de leur division par $\tilde{n}_{q+1}$[7]. Pour cela, on retranche à la i^{eme} ligne le produit de la $(q+1)^{eme}$ par le quotient. Cela ne change pas la valeur des $\tilde{h}$.

Le résultat est donc montré pour $q \leq p$. Il est alors vrai pour $q > p$. En effet, il suffit de procéder comme dans le cas où $q = p$, puisqu'on n'exige rien sur les colonnes de numéro supérieur strict à p.

Remarques:

- à partir du moment où l'on dispose d'un algorithme de division euclidienne, la preuve précédente est parfaitement constructive, *via* l'algorithme d'Euclide. L'algorithme correspondant est un algorithme de pivot de Gauss.
- dans le cas où l'anneau est un corps, on voit facilement que la forme d'Hermite, dans le cas d'une matrice carrée de rang plein, est une matrice diagonale inversible; au prix de quelques opérations suppléméntaires, on peut se ramener à l'identité. On peut donc dire que, dans le cas général, le calcul d'une forme d'Hermite d'une matrice est ce qui se rapproche le plus d'un inversion (à gauche ou à droite) au sens du calcul dans l'anneau. Si de plus on se rappelle que c'est l'identité de Bezout qui tient lieu d'inversion dans un anneau, on ne sera pas surpris de constater (chapître suivant) que la forme d'Hermite permette de calculer l'identité de Bezout dans le cas matriciel.

[7] si $\tilde{n}_{q+1}$ n'est pas nul

Cas d'un anneau principal: le résultat demeure à condition de choisir la bonne notion d'équivalence et d'abandonner les spécifications sur les degrés. La preuve est alors identique au cas euclidien en utilisant le même lemme. On obtient simplement une forme triangulaire. On parlera encore de forme d'Hermite.

Exemple: on considère l'anneau des polynômes R$[s]$, et la matrice:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & s^3+s & s^2+s & 2s \\ 0 & s & s+1 & s^2+s \\ 0 & s & 1 & s^2+1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

dont on cherche une forme d'Hermite inférieure. Il nous faut donc procéder par opérations de colonnes en regardant les lignes de haut en bas.

Il est évident que les éléments de la première ligne sont premiers entre eux, puiqu'on a 1 en première position. On ramène les autres éléments de la première ligne à 0 en soustrayant à la colonne correspondante le produit de la première colonne par l'élément de la première ligne considéré. Comme la première colonne est nulle à partir du 2^{eme} élément, cela ne modifie pas les lignes 2 et 3. Autrement dit, on a

$$M \underset{colonnes}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & s+1 & s^2+s \\ 0 & s & 1 & s^2+1 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Deuxième ligne: s est un élément de degré minimal. Les restes sont: 1 pour $s+1$, 0 pour s^2+s; les quotients sont: 1 pour $s+1$, $s+1$ pour s^2+s. A la troisième colonne on enlève le produit de la seconde par 1; à la quatrième, le produit de la seconde par $s+1$, soit:

$$M \underset{colonnes}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 1 & 0 \\ 0 & s & 1-s & 1-s \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

On ramène maintenant à gauche le terme de degré minimal de la deuxième ligne en permutant les colonnes 2 et 3, soit:

$$M \underset{colonnes}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & 1-s & s & 1-s \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

puis on met à zéro l'élément (2,3) en enlevant à la troisième colonne le produit de la seconde par s, soit:

$$M \underset{colonnes}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & s^2 & 1-s \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

On en a fini avec la deuxième ligne, puisque l'élément (2,1) est déjà à zéro.

Troisième ligne: on commence par permuter la troisième et la quatrième colonne:

$$M \underset{colonnes}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 1-s & s^2 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Puis on retranche à la dernière colonne le produit de la troisième par le quotient $-s-1$:

$$M \underset{colonnes}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 1-s & 1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

et par permutation des deux colonnes et division euclidienne on aboutit à:

$$M \underset{colonnes}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Il nous reste à faire baisser le degré des élément de la troisième ligne, ce qui est fait en enlevant à la deuxième ligne le produit de la troisième par $1 - s$, soit:

$$M \underset{colonnes}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

ou, de manière condensée:

$$M \underset{colonnes}{\sim} \left[\, Id_3 \mid 0 \,\right] \tag{2.22}$$

Nous allons maintenant pouvoir caractériser les matrices unimodulaires dans un anneau euclidien.

Théorème 2.9 (Caractérisation des unimodulaires) *Soit M une matrice carrée euclidienne. Les trois propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *M est unimodulaire*
2. *M est ligne-équivalente à l'identité*
3. *M est colonne-équivalente à l'identité*

Preuve: $2 \Rightarrow 1$ et $3 \Rightarrow 1$ sont des conséquences directes du résultat bien connu selon lequel $\det(AB) = \det A \det B$, et du fait que les matrices d'opérations élémentaires sont unimodulaires.

Les deux réciproques se montrent de la même manière, à savoir:

on considère une forme d'Hermite H de M (supérieure ou inférieure selon les cas). H est une matrice triangulaire. Puisque $\det M$ est inversible, $\det H$ l'est également; son degré vaut donc zéro. Or $\det H$ est égal au produit des éléments diagonaux de H, et on a donc:

$$0 \leq d^o h_{i,i} \leq d^o \det H = 0 \tag{2.23}$$

pour tout i. On en déduit que les $h_{i,i}$ sont inversibles et que H est diagonale (c.f. la propriété sur les degrés dans le théorème 2.8). H est donc (ligne *et* colonne) équivalente à l'identité.

Corollaire 2.2 Toute matrice unimodulaire dans un anneau euclidien peut se décomposer en produit de matrices d'opérations élémentaires.

Interprétation différentielle: cela signifie que tout opérateur différentiellement réversible peut alors se décomposer en opérateurs élémentaires où seule la i^{eme} variable x_i est transformée en $\tilde{x}_i = x_i + \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{k=n_j} \lambda_{j,k} \frac{d^k x_j}{dt^k}$, les autres variables restant inchangées.

Corollaire 2.3 Deux matrices euclidiennes sont ligne (resp. colonne) équivalentes si et seulement si l'une est produit à gauche (resp. à droite) de l'autre par une matrice unimodulaire.

Remarque: ce résultat est *capital* en ce qu'il établit la correspondance entre la notion *opératoire* d'equivalence (transformation sur les lignes ou les colonnes) et la notion *algébrique* d'équivalence (produit par une unimodulaire). A noter qu'il existe des anneaux principaux où certaines matrices unimodulaires ne sont pas ligne équivalentes à l'identité; les deux notions d'équivalences ne sont alors pas identiques, et c'est la deuxième que l'on retient.

Enfin, dans le cas où l'anneau est un corps, le calcul d'une forme d'Hermite est en fait un calcul d'inversion. En effet, toutes les matrices de rang plein sont unimodulaires dans un corps. L'inverse est alors donné par le produit des matrices d'opérations élémentaires qui amènent la matrice de départ à l'identité.

2.2.4 Forme diagonale (Smith)

Lemme 2.2 Soit M une matrice euclidienne. Alors il existe deux matrices unimodulaires U et V telles que UMV soit de la forme

$$UMV = N = \begin{bmatrix} n_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{N} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Preuve: on utilise l'algorithme suivant:

a) si M est de la forme souhaitée, STOP. Si tous les éléments de la première colonne sont nuls, amener une colonne non nulle en première position (il en existe). Si la matrice obtenue est de la forme souhaitée, STOP. Sinon poser $i = 0$ et $N_0 = M$ (éventuellement la matrice précédente).

b) par des opérations de lignes [8] mettre (lemme 2.1) N_i sous la forme

$$N_{i+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} r_i & & \cdots & \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{N}_{i+\frac{1}{2}} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

où r_i est un PGCD des éléments de la première colonne de N_i. Si r_i divise tous les éléments de la première ligne de $N_{i+\frac{1}{2}}$, on se ramène alors par des opérations de colonnes à la forme demandée et l'algorithme s'arrête. Sinon on va en c).

c) par des opérations de colonnes [9] mettre $N_{i+\frac{1}{2}}$ sous la forme

$$N_{i+1} = \begin{bmatrix} r_{i+\frac{1}{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \\ \vdots & & \tilde{N}_{i+1} & \\ & & & \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

où $r_{i+\frac{1}{2}}$ est un PGCD des éléments de la première ligne de $\tilde{N}_{i+\frac{1}{2}}$. Si $r_{i+\frac{1}{2}}$ divise tous les éléments de la première colonne de N_{i+1}, on se ramène alors par des opérations de colonnes à la forme demandée et l'algorithme s'arrête. Sinon on incrémente i et on va en b).

Cet algorithme s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations. En effet, r_i et $r_{i+\frac{1}{2}}$ ne sont pas nuls pour $i > 0$, et le degré de r_{i+1} est inférieur strict à celui de r_i, puisque r_{i+1} divise strictement $r_{i+\frac{1}{2}}$, et ce dernier divise strictement r_i.

Remarque: en s'autorisant éventuellement une permutation de ligne et de colonne pour le cas où la première ligne et la première colonne seraient nulles, on voit que le $n_{1,1}$ final est un diviseur commun aux éléments de la première ligne *et* de la première colonne de M.

Le lemme reste vrai dans un anneau principal; il suffit de remplacer le degré par le pseudo-degré dans la preuve.

---

[8] ou par une unimodulaire à gauche dans un anneau principal
[9] ou par une unimodulaire à droite dans un anneau principal

Lemme 2.3 obtention d'une forme diagonale: toute matrice euclidienne M est équivalente à une matrice euclidienne diagonale$D$; autrement dit, il existe deux matrices unimodulaires U et V telles que:

$$M = UDV \tag{2.27}$$

avec

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

où r est le rang de M.

Preuve: Il suffit d'appliquer le lemme précédent à M, puis à la matrice extraite $\tilde{N}$, etc... jusqu'à l'élément r de la diagonale. Les élément "en bas à droite" sont alors tous nuls, sans quoi on pourrait réappliquer l'algorithme précédent et ajouter un élément *diagonal* non nul, ce qui contredirait la conservation du rang lors de produit par des unimodulaires.

---

le résultat est évidemment valable dans un anneau principal.

Lemme 2.4 Toute matrice euclidienne diagonale[10] est équivalente à une matrice diagonale $\tilde{S}$ où le premier élément de la diagonal divise tous les autres.

Preuve: soit D la matrice diagonale. Par des opérations de colonnes on transforme D en $\tilde{D}$ avec

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ d_r & 0 & d_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Par des opérations de lignes on peut alors mettre un PGCD des d_i en haut à gauche. Puis on utilise l'algorithme du lemme 2.2. Soit N la matrice obtenue; alors $n_{1,1}$ est un diviseur commun de *tous* les éléments de D [11]. Il ne reste plus qu'à diagonaliser la matrice extraite $\tilde{N}$ en $\tilde{S}$ par l'algorithme du lemme 2.3. Comme $n_{1,1}$ divisait tous les éléments de N, $n_{1,1}$ (qui est le premier élément de $\tilde{S}$) divise tous les éléments de $\tilde{S}$.

Théorème 2.10 (Forme de Smith) *Toute matrice euclidienne est équivalente à une matrice S de la forme*

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

où r est le rang de M, et où s_i divise s_{i+1}, pour $i = 1$ à $r-1$.

Une telle matrice équivalente à M est dite forme de Smith *de M.*

Remarque: par définition, toutes les formes de Smith d'une matrice sont donc équivalentes.

Preuve: on commence par se ramener à une forme diagonale D (lemme 2.3). Puis on utilise récursivement l'algoritme du lemme 2.4 en "descendant" le long de la diagonale.

Remarque: là encore, la preuve est constructive à partir du moment où l'on dispose d'un algorithme de dividion euclidienne. L'algorithme de calcul de la forme de Smith est en fait un algorithme de pivot de Gauss-Jordan.

---

[10]c'est-à-dire composée d'une matrice carrée diagonale et de zéros autre part

[11]c'est en fait un PGCD des éléments de D, puisque les éléments de tout produit AB sont des éléments de $\mathcal{I}_A$ et de $\mathcal{I}_B$, où $\mathcal{I}_M$ est l'idéal engendré par les éléments de la matrice M.

le résultat est évidemment valable dans un anneau principal.

Lemme 2.5 Soit, pour une matrice entière M, $r_i(M)$ le PGCD de tous les mineurs d'ordre i de M. Alors $r_i(M)$ est inchangé (à un élément inversible près) lorsqu'on remplace M par le produit à gauche ou à droite de M par une unimodulaire.

Preuve: On commencera par traiter le cas où M est carrée.

Soit une matrice C de la forme AB, où A, B et C sont carrées, et $C^{k_1 \ldots k_m}_{l_1 \ldots l_m}$ la matrice extraite de C en sélectionnant les lignes $(k_1 \ldots k_m)$ et les colonnes $(l_1 \ldots l_m)$. Alors

$$\det C^{k_1 \ldots k_m}_{l_1 \ldots l_m} = \sum_{(i_1 \ldots i_m)} \det A^{k_1 \ldots k_m}_{i_1 \ldots i_m} \det B^{i_1 \ldots i_m}_{l_1 \ldots l_m} \tag{2.31}$$

On en déduit que les diviseurs communs des mineurs d'ordre m de A ou B sont des diviseurs communs des mineurs d'ordre m de C.

Si U est une matrice unimodulaire, on a donc $r_i(M)$ qui divise $r_i(UM)$ et $r_i(MU)$. Les matrices unimodulaires étant inversibles dans l'anneau, on en déduit que ces trois PGCD sont égaux à un inversible près, ce qui prouve le résultat pour M carrée.

Considérons maintenant le cas où M est rectangulaire de taille $p \times q$. On ne traitera que le cas de l'équivalence à gauche.

Dans le cas où on a $p > q$, on complète M en $\tilde{M} = [M|0]$. En notant $\sim$ l'equivalence dans l'anneau, on a alors $r_i(M) \sim r_i(\tilde{M}) \sim r_i(U\tilde{M}) \sim r_i([UM|0]) \sim r_i(UM)$.

Dans le cas où $p < q$ on complète M en $\tilde{M} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}$ et U en $\tilde{U} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}$. On a alors $r_i(M) \sim r_i(\tilde{M}) \sim r_i(\tilde{U}\tilde{M}) \sim r_i(\begin{bmatrix} UM \\ 0 \end{bmatrix}) \sim r_i(UM)$.

Théorème 2.11 (Unicité de la forme de Smith) *La forme de Smith d'une matrice entière (en particulier euclidienne) est unique au produit des s_i par un inversible près.*

Preuve: pour $i > 1$, on a $s_i = \frac{r_i(S)}{r_{i-1}(S)} \sim \frac{r_i(M)}{r_{i-1}(M)}$ pour toute forme de Smith S de M; quant à s_1, il est visiblement égal à $r_1(S)$, qui est équivalent à $r_1(M)$.

La forme de Smith est donc une forme *canonique* des matrices entières. C'est donc un outil théorique important. Malheureusement, son calcul est assez complexe. Cela n'est pas gênant dans la mesure où, comme nous le verrons par la suite, la plupart des résultats pratiques s'obtiennent à partir des formes d'Hermite, plus simples à calculer.

2.3 Exercices

Exercice 2.1 Soient a et b deux éléments premiers entre eux dans un anneau principal $\mathcal{A}$, x et y dans l'anneau tels que $ax + by = 1$. Monter que les matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ y & -x \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a & y \\ b & -x \end{bmatrix}$ sont unimodulaires; calculer leur inverse.

Exercice 2.2 On considère le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(s)$ et, dans ce corps, l'anneau $\mathcal{P}$ des fractions rationnelles *propres*, c'est-à-dire les fractions dont le degré du dénominateur est supérieur à celui du numérateur.

1. Montrer que le corps des fractions associé à $\mathcal{P}$ est identique au corps des fractions rationnelles.
2. On définit le degré d'une fraction propre de représentant $\frac{p}{q}$ comme étant le degré de q moins celui de p.
   - montrer que la définition précédente du degré est indépendante du représentant choisi.
   - soit r_1 et r_2 deux fractions rationnelles propres. Montrer que r_1 divise r_2 si et seulement si le degré de r_1 est inférieur à celui de r_2.
   - en déduire que $\mathcal{P}$ est un anneau euclidien
   - montrer que la division euclidienne n'est pas unique
   - montrer qu'une fraction propre de degré minimal dans une liste $(r_1, \ldots, r_n)$ est un PGCD de $(r_1, \ldots, r_n)$.
3. On dit que deux éléments d'un anneau sont équivalents s'ils sont égaux à un élément inversible près. On note $\overline{\mathcal{P}}$ le quotient de $\mathcal{P}$ par cette relation d'équivalence. Montrer que $\overline{\mathcal{P}}$ muni des opérations de PGCD et de produit sur deux fractions est isomorphe à $(\mathbf{N}, min, +)$, où $\mathbf{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

Exercice 2.3 Calculer une forme d'Hermite supérieure pour la matrice M donnée en exemple.

Exercice 2.4 On définit les *opérations de lignes par bloc* de la manière suivante:

- permutation de deux blocs de lignes
- multiplication à gauche d'un bloc de lignes par une matrice unimodulaire
- ajout à un bloc-lignes du produit d'un bloc-lignes disjoint par une matrice de taille adéquate

On définit de manière analogue au cas scalaire la bloc-lignes équivalence.

Montrer que, dans un anneau euclidien, deux matrices sont bloc-lignes équivalentes si et seulement si elles sont lignes équivalentes.

Chapitre 3

Divisibilité de matrices euclidiennes

Comme son nom l'indique, ce chapitre est consacré à l'étude des relations de divisibilité entre matrices euclidiennes. Il constitue essentiellement une extension des résultats scalaires au cas matriciel.

Après quelques définitions évidentes, on montrera que deux matrices se divisent mutuellement si et seulement si elles sont égales à un inversible près. Là encore, on distinguera divisibilité à gauche et à droite.

La notion de divisibilité conduira naturellement à définir les PGCD de deux matrices entières. On montrera qu'en juxtaposant les deux matrices et en calculant une forme d'Hermite de la matrice obtenue, on obtient un PGCD des deux matrices, ce qui prouvera l'existence du (des) PGCD dans le cas matriciel. Puis on reliera PGCD et identité de Bezout. On donnera ensuite l'expression générale des coefficients de Bezout de manière tout à fait analogue à ce qui se passe dans le cas scalaire.

Grâce à l'étude du cas matriciel, on montrera que le calcul de l'identité de Bezout dans le cas premiers entre eux est en fait une inversion partielle de matrice unimodulaire.

On terminera en faisant le lien entre calcul de PGCD et quelques questions de calcul vectoriel.

Résumé des épisodes précédents

Nous avons défini les notions de matrice entière, de matrice unimodulaire et de matrice euclidienne.

Nous avons montré que toute matrice entière est équivalente à gauche (ligne équivalente dans le cas euclidien) à une forme d'Hermite triangulaire supérieure; et équivalente à droite (resp. colonne équivalente) à une forme d'Hermite triangulaire inférieure.

Nous en avons déduit que, dans le cas euclidien, les matrices unimodulaires peuvent s'exprimer comme produit de matrices d'opérations élémentaires.

Enfin nous avons montré que toute matrice entière est bi-équivalente (équivalente dans le cas euclidien) à une forme diagonale dite de Smith.

3.1 Divisibilité

Définition 3.1 (Diviseurs) *Une matrice entière B divise une autre matrice entière A à droite (resp. à gauche) s'il existe une matrice entière Q telle que $A = QB$ (resp. $A = BQ$).*

Remarque: si B divise A à droite (resp. à gauche), alors A et B ont le même nombre de colonnes (resp. de lignes).

Définition 3.2 (Multiples) *Une matrice entière A est multiple d'une autre matrice entière B à gauche (resp. à droite) si B divise A à droite (resp. à gauche).*

Les definitions ci-dessus sont assez logiques si l'on se souvient qu'un diviseur à droite est placé *à droite* dans le produit, et que pour obtenir un multiple à gauche, on multiplie *à gauche*.

Nous allons maintenant nous intéresser aux conditions dans lesquelles deux matrices de même taille se divisent mutuellement. On commencera par étudier le cas des matrices carrées.

Lemme 3.1 Deux matrices entières carrées de rang plein se divisent mutuellement à droite (resp. à gauche) si et seulement si elles sont équivalentes à gauche (resp. à droite).

Preuve: la condition suffisante est triviale. Réciproquement, si on a $A = QB$ et $B = RA$, on en deduit que $\det(A)(1-\det(Q)\det(R)) = 0$; A étant de rang plein et l'anneau étant intègre, on en déduit que Q et R sont unimodulaires.

Nous allons maintenant lever l'hypothèse de rang plein sur les matrices carrées.

Lemme 3.2 Deux matrices entières carrées se divisent mutuellement à droite (resp. à gauche) si et seulement si elles sont équivalentes à gauche (resp. à droite).

Preuve: on s'occupera de la divisibilité à droite.

On commence par remarquer que deux matrices se divisent mutuellement si et seulement si leurs formes d'Hermite se divisent mutuellement. On se ramènera donc au cas de matrices triangulaires supériures.

La démonstration procède par récurrence sur la taille n des matrices, le résultat étant trivial pour $n = 1$. On considère maintenant deux matrices entières A et B, triangulaires supérieures, de taille $n+1$, et se divisant mutuellement à droite. Elles sont alors de même rang. Si ce rang vaut $n+1$, le résultat découle du lemme précédent.

Dans le cas contraire, on commence par remarquer que, du fait de la structure triangulaire et de la divisibilité réciproque, les $a_{i,i}$ et $b_{i,i}$ sont soit égaux à un inversible près, soit simultanément nuls. Notons i_0 le premier indice i tel $a_{i,i}$ soit nul. Trois cas sont à distinguer:

- $i_0 = 1$. Alors A est de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}$; il est de même pour B. On peut alors, en calculant une forme d'Hermite supérieure de $\tilde{A}$, se ramener au cas où A est de la forme:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

On fait de même pour B. On voit facilement que A_1 et B_1 se divisent mutuellement à droite. Par récurrence, il existe donc U_1 unimodulaire telle que $U_1A_1 = B_1$, d'où

$$\begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

ce qui prouve la récurrence.

- $i_0 = n$. A est donc de la forme

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

avec A_1 carrée, triangulaire supérieure, de rang plein; de même pour B. Il est alors facile de voir que A_1 et B_1 se divisent mutuellement. Soit Q telle que $QA = B$. En décomposant Q comme A et B, on a $Q_{1,1}A_1 = B_1$. Or, par définition de i_0, A_1 et B_1 sont carrés de rang plein; on en déduit que $Q_{1,1}$ est unimodulaire. Il ne reste plus qu'à poser

$$U = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & 0 \\ Q_{2,1} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

pour prouver la récurrence.

- $1 < i_0 < n$. Alors A a la structure suivante:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ 0 & 0 & A_{2,3} \\ 0 & 0 & A_{3,3} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Par le produit à gauche d'une unimodulaire on se ramène au cas où $A_{2,3} = 0$ (forme d'Hermite sur les blocs colonnes de droite); on procède de manière analogue sur B. Soit Q telle que $QA = B$ et R telle que $RB = A$; on décompose Q et R comme A et B. On remarque que $Q_{2,1}A_{1,1}$ et $Q_{3,1}A_{1,1}$ sont nuls; $A_{1,1}$ étant carrée de rang plein, on en déduit que $Q_{2,1}$ et $Q_{3,1}$ sont nulles. $B_{1,2}$ (et $A_{1,2}$ par un raisonnement symétrique) est donc nulle. Soient d'autre part $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ les matrices extraites de A et B en rayant la i_0^{eme} colonne et la i_0^{eme} ligne (ligne et colonne "du milieu"). On constate alors assez facilement que $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ se divisent mutuellement à droite; il existe donc une unimodulaire $\tilde{U}$, que nous décomposerons en

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ U_{2,1} & U_{2,2} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

telle que $U\tilde{A} = \tilde{B}$. $A_{1,1}$ étant de rang plein, on a nécessairement $U_{2,1} = 0$.
Il ne reste plus qu'à poser

$$U = \begin{bmatrix} U_{1,1} & 0 & U_{1,2} \\ 0 & 1 & Q_{2,3} \\ 0 & 0 & U_{2,2} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

U est alors unimodulaire, et on a $UA = B$.

Théorème 3.1 (Divisibilité réciproque et équivalence) *Deux matrices entières A et B de même taille se divisent mutuellement à droite (resp. à gauche) si et seulement si elles sont équivalentes à gauche (resp. à droite).*

Preuve: on fera la preuve pour la division à droite. Deux cas sont à considérer:

- il ya plus de lignes que de colonnes.
  On se ramène alors à des formes d'Hermite supérieures. On notera T_M la partie triangulaire carrée de la forme d'Hermite de M. Il existe donc deux matrices Q et $\tilde{Q}$ telles que

$$\begin{bmatrix} T_A \\ 0 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} T_B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} T_B \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{Q} \begin{bmatrix} T_A \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

  soit, en décomposant Q et $\tilde{Q}$ de manière adéquate:

$$\begin{bmatrix} T_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1,1}T_B \\ Q_{2,1}T_B \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} T_B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{1,1}T_A \\ \tilde{Q}_{2,1}T_A \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

  On en déduit, d'après le lemme précédent, qu'il existe une matrice unimodulaire U_1 telle que $T_A = U_1 T_B$. Il suffit alors de poser

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ Q_{2,1} & Id \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

  pour aboutir au résultat.

- il y a moins de lignes que de colonnes.
  On note S une forme de Smith de B. Il existe donc deux matrices Q et $\tilde{Q}$, deux unimodulaires U_1 et V_1 telles que

$$A = QB \quad B = \tilde{Q}A \quad B = U_1 S V_1 \tag{3.11}$$

  Posons $\tilde{A} = AV_1^{-1}$. On a alors

$$\tilde{A} = QU_1 S \quad S = U_1^{-1}\tilde{Q}\tilde{A} \tag{3.12}$$

  En décomposant $\tilde{A}$ en $[A_1, A_2]$ et S en $[S_1, 0]$, avec A_1 et S_1 carrées, les égalités précédentes sont équivalentes à:

$$A_2 = 0 \quad A_1 = QU_1 S_1 \quad S_1 = U_1^{-1}\tilde{Q}A_1 \tag{3.13}$$

  Il existe donc une unimodulaire U telle que $A_1 = US_1$, d'où $\tilde{A} = US$, soit encore $A = UU_1^{-1}B$.

3.2 PGCD

Définition 3.3 (diviseurs communs, PGCD) *Une matrice entière R est un diviseur commun à droite (resp. à gauche) de deux matrices entières A et B si et seulement si R divise A et B à droite (resp. à gauche).*

R est un PGCD à droite (resp. à gauche) de A et B si et seulement si R est un diviseur commun à droite (resp. à gauche) de A et B, multiple à gauche (resp. à droite) de tous les autres.

A et B sont premières entre elles à droite (resp. à gauche) si et seulement si l'identité est un PGCD à droite (resp. à gauche) de A et B.

Lemme 3.3 Si R est un diviseur commun à droite (resp. à gauche) de A et B et si il existe X et Y tels que $XA+YB$ (resp. $AX+BY$) $= R$, alors R est un PGCD à droite (resp. à gauche) de A et B.

Preuve: procéder comme dans le cas d'un anneau.

Théorème 3.2 (Hermite = PGCD) *Soient A et B deux matrices entières. Alors toute forme d'Hermite supérieure (resp. inférieure) de $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ (resp. $[A, B]$) est un PGCD à droite (resp. à gauche) de A et B.*

Preuve: comme d'habitude, on ne traitera que la division à droite.

Soit H une forme d'Hermite de $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$. Alors il existe une unimodulaire U telle que

$$U \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = H \tag{3.14}$$

En décomposant U en $[U_1, U_2]$, on obtient

$$U_1 A + U_2 B = H \tag{3.15}$$

D'autre part, en décomposant U^{-1} en $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$, on a visiblement

$$A = V_1 H \quad B = V_2 H \tag{3.16}$$

d'où le résultat.

Remarques:

- ce résultat prouve l'existence de PGCD pour deux matrices entières quelconques.
- dans le cas où la matrice $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ (resp. $[A, B]$) compte plus de lignes que de colonnes (resp. plus de colonnes que de lignes), toute forme d'Hermite supérieure (resp. inférieure) H est de la forme $\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ (resp. $[R, 0]$).

  Il est alors facile de voir que R **est un PGCD carré** de A et B, et que tous les PGCD carrés à droite (resp. à gauche) sont équivalents à gauche (resp. à droite), puisqu'ils sont de même taille et se divisent mutuellement à droite (resp. à gauche). On peut donner dans ce cas un sens à l'unicité du PGCD en se limitant aux PGCD carrés, l'unicité étant de toute façon toujours entendue à une unimodulaire près.

- bien qu'en fait on établisse ici des résultats classiques d'anneaux principaux, nous n'avons pas cherché à mettre une structure explicite d'anneau sur les matrices entières. En effet, il nous faudrait nous limiter au cas des matrices carrées de taille fixe. Ceci n'est absolument pas réaliste dans la mesure où tout l'intérêt des changements de formes opérateur consiste justement à faire varier la taille des matrices; de plus, les matrices en question sont rarement carrées. Enfin, et comme on a pu le constater, les résultats en question se laissent montrer sans difficulté supplémentaire dans le cas général.

Théorème 3.3 (Identité de Bezout) *R est un PGCD à droite (resp. à gauche) de A et B si et seulement si R est un diviseur commun à droite (resp. à gauche) de A et B et si il existe X et Y tels que $XA + YB$ (resp. $AX + BY$) $= R$.*

Preuve: la condition suffisante à été vue.

Pour la condition nécessaire (on considère encore la division à droite), il suffit de considérer une forme d'Hermite supérieure H de $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$. Il existe alors X et Y tels que $XA + YB = H$. Si R est un PGCD à droite de A et B, H, en tant que diviseur commun, divise R à droite. Il existe donc T tel que $R = TH$, d'où

$$TXA + TYB = TH = R \tag{3.17}$$

d'où le résultat.

Corollaire 3.1 A et B sont donc premiers entre eux à droite (resp. à gauche) si et seulement si il existe X et Y tels que $XA + YB = Id$ (resp. $AX + BY = Id$).

Remarque: si A et B sont premiers entre eux à droite , alors la matrice $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ est nécessairement injective[1], puisqu'on a $XA + YB = Id$. En particulier cette matrice doit contenir plus de lignes que de colonnes. De même, si A et B sont premiers entre eux à gauche, alors la matrice $[A, B]$ est surjective, et doit donc contenir plus de colonnes que de lignes.

3.3 Variations sur l'identité de Bezout

Théorème 3.4 (Sous-matrices d'une unimodulaire) *Soit $U = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ U_{2,1} & U_{2,2} \end{bmatrix}$ une matrice unimodulaire. Alors*

- *$U_{1,1}$ et $U_{2,1}$ sont premières entre elles à droite*
- *$U_{1,2}$ et $U_{2,2}$ sont premières entre elles à droite*
- *$U_{1,1}$ et $U_{1,2}$ sont premières entre elles à gauche*
- *$U_{2,1}$ et $U_{2,2}$ sont premières entre elles à gauche*

Preuve: Il suffit d'appliquer l'identité de Bezout en utilisant l'inverse de U.

Théorème 3.5 *A et B sont premières entre elles à droite (resp. à gauche) si et seulement si il existe une unimodulaire U telle que $U \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id \\ 0 \end{bmatrix}$ (resp. $[A, B]U = [Id, 0]$)*

[1]on plonge l'anneau dans le corps des fractions

Preuve: la partie suffisante résulte de Bezout.

Quant à la partie nécessaire, on sait que A et B ont nécessairement suffisamment de lignes (resp. de colonnes) pour que les formes d'Hermite de $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ (resp. $[A, B]$) soient de la forme $\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ (resp. $[R, 0]$), où R est un PGCD carré. Tous les PGCD carrés étant équivalents du bon côté, on en déduit que R est unimodulaire. Il suffit alors de multiplier par $\begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}$ pour conclure.

Corollaire 3.2 soit A et B première entre elles à droite (resp. à gauche). Alors il existe $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$, premières entre elles à gauche (resp. à droite) telles que $\tilde{B}A = \tilde{A}B$ (resp. $B\tilde{A} = A\tilde{B}$).

Preuve: considérer le bloc ligne inférieur (resp. bloc colonne droit) de l'unimodulaire U.

Théorème 3.6 (Bezout = inversion) *A et B sont premières entre elles à droite (resp. à gauche) si et seulement si il existe $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ tels que $\begin{bmatrix} A & -\tilde{Y} \\ B & \tilde{X} \end{bmatrix}$ (resp. $\begin{bmatrix} A & B \\ -\tilde{Y} & \tilde{X} \end{bmatrix}$) soit unimodulaire.*

Preuve: la partie suffisante résulte du théorème 3.4.

Partie nécessaire: on considèrera la division à droite. On sait (théorème 3.5) qu'il existe une unimodulaire U telle que $U\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id \\ 0 \end{bmatrix}$. Soit V l'inverse de U, qu'on décompose en $\begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} \\ V_{2,1} & V_{2,2} \end{bmatrix}$ de manière cohérente avec A et B. On vérifie alors sans peine que $-\tilde{Y} = V_{1,2}$ et $\tilde{X} = V_{2,2}$ répondent à question, la matrice ainsi constituée à partir de A et B étant égale à V, l'inverse de U.

Remarque: ce théorème montre bien que le calcul de l'identité de Bezout (lorsque les matrices sont premières entre elles) est bien un calcul d'*inverse*; en effet, une partie de l'inverse de la matrice unimodulaire "contenant" A et B est constituée des coefficients de Bezout sur ces deux matrices. En fait, l'identité de Bezout scalaire peut être elle-même considérée comme une inversion partielle de matrices 2×2 (c.f. entiers de Gauss).

Théorème 3.7 *Soient A, B, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ quatre matrices entières. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

- – *A et B sont premières entre elles à droite*
  – *$\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont premières entre elles à gauche*
  – $\tilde{B}A = \tilde{A}B$
- *il existe X, Y, $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ tels que*

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ -\tilde{B} & \tilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -\tilde{Y} \\ B & \tilde{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Preuve: condition suffisante: on a visiblement $\tilde{A}B = \tilde{B}A$; le reste découle de Bezout.

condition nécessaire: il existe X et Y, $\tilde{X}_1$, $\tilde{Y}_1$ tels que $XA + YB = Id$, $\tilde{A}\tilde{X}_1 + \tilde{B}\tilde{Y}_1 = Id$. On a alors

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ -\tilde{B} & \tilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -\tilde{Y}_1 \\ B & \tilde{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id & C \\ 0 & Id \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

où C est une matrice entière. On en déduit le résultat en inversant la matrice de droite et en prenant $\tilde{X} = \tilde{X}_1 - BC$, $\tilde{Y} = \tilde{Y}_1 + AC$.

3.4 Solution générale de l'Identité de Bezout

Théorème 3.8 *Soit A et B prenières entre elles à droite (resp. à gauche), et $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}$ unimodulaire telle que $U \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id \\ 0 \end{bmatrix}$ (resp. $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} Id & 0 \end{bmatrix}$)*

Alors X et Y sont solution de l'identité de Bezout $XA + YB = Id$ (resp. $AX + BY = Id$) si et seulement si il existe une matrice entière Π telle que

$$\begin{array}{rcl} X & = & U_1 + \Pi U_3 \\ Y & = & U_2 + \Pi U_4 \end{array} \tag{3.20}$$

(resp.

$$\begin{array}{rcl} X & = & U_1 + U_2 \Pi \\ Y & = & U_3 + U_4 \Pi \end{array} \tag{3.21}$$

)

Preuve: On traitera le cas de matrices premières entre elles à droite.

Décomposons $\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} U^{-1}$ en $\begin{bmatrix} R & \Pi \end{bmatrix}$. Alors X et Y vérifient $XD + YN = Id$ si et seulement si

$$\begin{bmatrix} R & \Pi \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = Id \tag{3.22}$$

c'est-à-dire $R = Id$. On en déduit que $\begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id & \Pi \end{bmatrix} U$, d'où le résultat.

Théorème 3.9 *Soit A et B premières entre elles à droite (resp. à gauche). Soit X_0 et Y_0 une solution particulière de l'identité de Bezout associée. Alors*

- *il existe $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ premières entre elles à gauche (resp. à droite) telles que $\tilde{B}A = \tilde{A}B$ (resp. $B\tilde{A} = A\tilde{B}$)*
- *soient $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ un couple de matrices satisfaisant à la condition précédente; un couple (X, Y) de matrices entières est solution de l'identité de Bezout associée à A et B si et seulement si il existe Π entière telle que*

$$\begin{array}{rcl} X & = & X_0 + \Pi \tilde{B} \\ Y & = & Y_0 - \Pi \tilde{A} \end{array} \tag{3.23}$$

(resp.

$$\begin{array}{rcl} X & = & X_0 + \tilde{B} \Pi \\ Y & = & Y_0 - \tilde{A} \Pi \end{array} \tag{3.24}$$

)

Preuve: On traitera le cas de matrices premières entre elles à droite.

L'existence de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ résulte du corollaire 3.2; on peut la prouver de manière indépendante lorsque A est carrée de rang plein en factorisant à gauche la fraction BA^{-1} (c.f. chapitre suivant).

En utilisant la preuve du théorème 3.7 on déduit que $\begin{bmatrix} X_0 & Y_0 \\ -\tilde{B} & \tilde{A} \end{bmatrix}$ est une unimodulaire telle que $U \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id \\ 0 \end{bmatrix}$.

La preuve découle alors directement du théorème 3.8.

3.5 Rang du PGCD

Théorème 3.10 *soit R un PGCD à droite (resp. à gauche) de deux matrices entières P et Q. On plonge l'anneau dans son corps des fractions*[2]*. Alors:*

- $\ker R = \ker P \cap \ker Q = \ker \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$
- *le rang de* $\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ *est égal au rang de R.*

(resp.

- $Im\ R = Im\ P + Im\ Q = Im \begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix}$
- *le rang de* $\begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix}$ *est égal au rang de R.*

)

Preuve: On se limitera à la division à droite.

Comme R divise P et Q à droite, tout élément du noyau de R est dans le noyau de P et dans le noyau de Q. L'inclusion inverse se déduit de l'identité de Bezout. On a donc

$$\ker R = \ker P \cap \ker Q = \ker \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Comme R et $\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ ont nécessairement le même nombre de colonnes, on conclut à l'égalité des rangs.

Pour la division à gauche, on transpose tout.

Remarque: la propriété précédente n'est en aucun cas caractéristique de R; pour s'en convaincre, on peut se reporter à l'exemple cité à propos du corollaire qui suit.

Corollaire 3.3 On se donne un corps commutatif $\mathcal{K}$ et on prend comme anneau l'anneau euclidien $\mathcal{K}[s]$ des polynômes à coefficients dans $\mathcal{K}$. On suppose que les matrices polynômiales $P(s)$ et $Q(s)$ sont telles que $\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ ait plus de lignes que de colonnes (pour la division à droite) ou telles que $\begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix}$ ait plus de colonnes que de lignes (pour la division à gauche); c'est le cas si P est carrée. Soit R un PGCD carré à droite (resp. à gauche) de P et Q, s un élément de $\mathcal{K}$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:

- s est un zéro de $\det(R)$
- $\begin{bmatrix} P(s) \\ Q(s) \end{bmatrix}$ (resp. $\begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \end{bmatrix}$), en tant que matrice à éléments dans $\mathcal{K}$, n'est pas de rang plein.

En particulier, P et Q sont premières entre elles à gauche (resp. à droite) si et seulement si $\begin{bmatrix} P(s) & Q(s) \end{bmatrix}$ (resp. $\begin{bmatrix} P(s) \\ Q(s) \end{bmatrix}$) est de rang plein pour tout s.

Remarque: Il n'y par contre aucun rapport entre l'ordre de multiplicité du zéro s et la dimension du noyau. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que l'ordre de multiplicité en question n'est nullement borné par la taille des matrices. Ainsi, dans le cas scalaire, en prenant

[2]pour simplifier les choses, on ignore les modules dans ce cours

$p(s) = q(s) = (s-1)^2$, $(s-1)^2$ est un PGCD carré dont 1 est un zéro double, alors que la dimension du noyau ne peut depasser 1. On remarquera d'ailleurs que tout polynôme ayant 1 comme zéro vérifie les propriétés du théorème et du corollaire précédents.

Il est par contre vrai que le rang de $R(s)$ est toujours égal à celui de $\begin{bmatrix} P(s) \\ Q(s) \end{bmatrix}$.

Chapitre 4

Matrices rationnelles

Après avoir étudié les matrices entières, c'est-à-dire à éléments dans un anneau, nous allons passer dans ce chapitre à l'étude des matrices *rationnelles*, c'est-à-dire à éléments dans le corps des fractions associé. On commencera par montrer que ces *matrices de fractions* sont également des *fractions de matrices entières* en mettant celles-ci sous la forme ND^{-1}, $D^{-1}N$ et $N_gD^{-1}N_d$.

Puis on montrera l'existence de représentants irréductibles de ces fractions; on montrera que ces réprésentations irréductibles sont uniques à un inversible près, tout au moins en ce qui concerne les représentations unilatérales.

On montrera, dans le cas polynômial, que les pôles des *éléments* d'une matrice rationnelle sont exactement les valeurs qui rendent singulier le dénominateur des factorisations irréductibles, mettant ainsi en évidence la correspondance entre les singularités des matrices de fractions et celles des fractions de matrices.

Le reste du chapitre est consacré à l'étude, dans le cas euclidien et plus spécialement polynômial, des *fractions rationnelles propres*: ce sont des fractions rationnelles dont le degré du dénominateur est supérieur à celui du numérateur. Cette propriété est liée, en théorie des systèmes, à des problèmes de régularité ou de causalité : on exige en général d'un transfert qu'il soit propre pour considérer qu'il représente bien un processus physique. Comme nous le verrons plus tard, cette propriéré est équivalente à l'existence d'une forme d'état (au sens classique du terme) possédant ce transfert. Bien qu'il n'existe pas de notion satisfaisante de degré pour les matrices euclidiennes, on définira une *division euclidienne* sur les matrices, en exigeant du reste qu'il soit strictement propre. En un sens, on aura alors une notion affaiblie de degré qui, au lieu d'induire un ordre total, reposera sur un ordre partiel.

Puis on étudiera, dans le cas polynômial, comment caractériser les matrices rationnelles propres (qui sont alors vues comme matrices de fractions) lorsque celles-ci sont représentées sous forme de fractions de matrices. Alors que cette caractérisation, dans le cas scalaire, repose sur la simple comparaison des degrés des deux termes de la fraction, il convient de comparer, dans le cas matriciel, deux n^{uples} de degrés[1]. On ne peut donc dans ce cas s'abstraire de la géométrie propre aux matrices considérées.

[1] la comparaison s'effectuant terme à terme, il s'agit donc bien d'un ordre partiel

4.1 Matrices rationnelles dans le cas général

4.1.1 Définition

Définition 4.1 (matrices rationnelles) *Une matrice rationnelle est une matrice dont les éléments sont dans le corps des fractions rationnelles associé à l'anneau $\mathcal{A}$ (principal ou euclidien suivant les cas).*

4.1.2 Factorisation

Théorème 4.1 (factorisation) *Toute matrice rationnelle T peut se factoriser à gauche (resp. à droite) sous la forme $D^{-1}N$ (resp. ND^{-1}), où N et D sont des matrices entières, et où D est carrée de rang plein.*

Preuve: il suffit de considérer un dénominateur commun d à tous les éléments de T, et de prendre $N = dT$ et $D = d \times Id$.

Remarque: en un sens, on définit ici la notion de *fraction matricielle* par la paire (N, D). Nous allons passer une bonne partie de ce chapitre à étudier les relations liant les représentations d'une matrice rationnelle sous forme de matrice de fractions et ses représentations sous forme de fraction de matrices.

Corollaire 4.1 Toute matrice rationnelle T peut se factoriser sous la forme $N_d D^{-1} N_g$, où N_g, N_d et D sont des matrices entières, et où D est carrée de rang plein. On parle de bifactorisation.

Preuve: : prendre un des deux numérateurs égal à l'identité.

Théorème 4.2 (factorisation irréductible) *Toute matrice rationnelle T peut se factoriser à gauche (resp. à droite) sous la forme $D^{-1}N$ (resp. ND^{-1}), où N et D sont des matrices entières, D carrée de rang plein, avec N et D premières entre elles à gauche (resp. à droite).*

La première forme est dite factorisation irréductible à gauche, la seconde, factorisation irréductible à droite.

Preuve: il suffit de calculer un PGCD des N et D précédents et de simplifier.

Corollaire 4.2 Toute matrice rationnelle T peut se bifactoriser sous la forme $N_d D^{-1} N_g$, où N_d et D sont premières entre elles à droite, et N_g et D sont premières entre elles à gauche. On parle de bifactorisation irréductible.

Théorème 4.3 (unicité des factorisations irréductibles) *Soit $D^{-1}N$ (resp. ND^{-1}) une factorisation irréductible à gauche (resp. à droite) de T. Alors $D_1^{-1}N_1$ (resp. $N_1 D_1^{-1}$) est une factorisation irréductible à gauche (resp. à droite) de T si et seulement si il existe une matrice unimodulaire U telle que $N_1 = UN$ et $D_1 = UD$ (resp. $N_1 = NU$ et $D_1 = DU$).*

Preuve: : la partie suffisante est triviale.

La partie nécessaire se montre à peu près comme dans le cas scalaire. On considère deux factorisations à droite irréductibles ND^{-1} et $N_1 D_1^{-1}$. Il existe alors X et Y tels que $XN + YD = Id$. On en déduit que $DXND^{-1} + DY = Id$, d'où $DXN_1 + DYD_1 = D_1$; D divise donc D_1 à gauche; un raisonnement symétrique montre que D_1 divise D à gauche. D et D_1 sont donc équivalentes à droite, et il existe alors une unimodulaire U telle que $D_1 = DU$. De $ND^{-1} = N_1 D_1^{-1}$ on déduit alors que $N_1 = NU$.

Attention: ce resultat ne se transpose pas au cas de la bifactorisation. En effet, la latitude qui nous est laissée de répartir des termes entre la gauche et la droite est un obstacle à l'unicité au sens habituel d'un anneau. Pour prendre un exemple trivial, une matrice entiere M se bifactorise de manière irréductible en $M.Id^{-1}.Id$ et $Id.Id^{-1}.M$, alors que M peut très bien ne pas être carrée, *a fortiori* unimodulaire. Plus généralement, les factorisations irréductibles à gauche et à droite *sont* des bifactorisations irréductibles.

Une conséquence intéressante de cette remarque réside dans le fait que le problème de la bifactorisation (irréductible ou non) ne se ramène pas au cas de la factorisation simple.

Théorème 4.4 (factorisation irréductible d'une matrice entière) *Soit T une matrice rationnelle et $D^{-1}N$ (resp. ND^{-1}) une factorisation irréductible à gauche (resp. à droite) de T. Alors T est entière si et seulement si D est unimodulaire.*

Preuve: elle suit le cas scalaire.
La condition suffisante est triviale.
Réciproquement, soit une factorisation à gauche irréductible $D^{-1}N$ de T. Il existe alors X et Y telles que $DX + NY = Id$. On en déduit que $D^{-1} = X + TY$; D^{-1} est donc entière, ce qui prouve le résultat.

Théorème 4.5 (bifactorisation irréductible d'une matrice entière) *Soit T une matrice rationnelle et $N_d D^{-1} N_g$ une bifactorisation irréductible de T. Alors T est entière si et seulement si D est unimodulaire.*

Preuve: analogue à la précédente. On commence par écrire les identités de Bezout $X_d D + Y_d N_d = Id$ et $DX_g + N_g Y_g = Id$, pour en déduire que $X_d + Y_d N_d X_g + Y_d T Y_g = D^{-1}$.

4.1.3 Pôles d'une matrice rationnelle (cas polynômial)

On suppose dans cette section que l'anneau utilisé est un anneau de polynômes sur un corps $\mathcal{K}$.

On rappelle que, dans le cas scalaire, un élément s_0 du corps $\mathcal{K}$ est un pôle d'une fraction rationnelle $r(s)$ si s_0 est une racine du dénominateur q d'une représentation irréductible $\frac{p(s)}{q(s)}$ de $r(s)$; cette définition est d'ailleurs indépendante du choix de la représentation irreductible[2]. Etendons cette définition au cas matriciel:

Définition 4.2 (Pôles d'une matrice rationnelle) *Soit $T(s)$ une matrice rationnelle sur $\mathcal{K}(s)$. Un élément s_0 de $\mathcal{K}$ est un pôle de T si s_0 est un pôle d'un des éléments de T.*

Cette définition utilise la représentation d'une matrice rationnelle comme “matrice de fractions”. Nous allons montrer que cette définition à un analogue lorsqu'on passe au point de vue “fraction de matrices”, et ce, par le biais des factorisations irréductibles. Commençons par un lemme:

Lemme 4.1 Soit P une matrice polynômiale carrée de rang plein. Alors un élément s_0 de $\mathcal{K}$ est un pôle de P^{-1} si et seulement si s_0 est un zéro de $\det P$.

Preuve:

- condition nécessaire: P^{-1} est égal au quotient d'une matrice polynômiale par $\det P$. L'ensemble des pôles de P^{-1} est donc contenu dans l'ensemble des zéros de $\det P$.
- condition suffisante: on a $\det P \det P^{-1} = 1$. D'autre part, P^{-1} est égal aux quotient de P_c^T, matrice transposée des cofacteurs de P, qui est polynômiale, par $\det P$, soit

$$P^{-1} = \det(P^{-1}) P_c^T \tag{4.1}$$

[2]puisqu'elles sont toutes égales à une constante près

On en déduit que P_c^T est unimodulaire. En particulier, s_0 ne peut être un zéro commun à tous les éléments de P_c^T. On en déduit que s_0 est un pôle d'au moins un des éléments de P^{-1}, c'est-à-dire un pôle de P^{-1}.

Passons au vif du sujet:

Théorème 4.6 (Pôles et factorisations irréductibles) *Soit T une matrice rationnelle sur $\mathcal{K}(s)$ et $D^{-1}N$ (resp. ND^{-1}) une factorisation irréductible à gauche (resp. à droite) de T. Alors un élément s_0 de $\mathcal{K}$ est un pôle de T si et seulement si s_0 est un zéro du déterminant de D.*

Preuve: on traitera la factorisation à gauche. On sait qu'il existe deux matrices polynômiales X et Y telle que la matrice

$$\begin{bmatrix} D & N \\ X & Y \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

soit unimodulaire. Or on a

$$\begin{bmatrix} Id & D^{-1}N \\ X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & N \\ X & Y \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

le produit de droite étant par ailleurs l'inverse d'une matrice polynômiale carrée dont le déterminant est égal à celui de D; ses pôles sont donc les zéros de $\det D$. D'autre part, les pôles de la matrice de gauche sont visiblement ceux de T: cela prouve le résultat.

4.2 Matrices rationnelles dans le cas euclidien

4.2.1 Préliminaires

Lemme 4.2 soit $\mathcal{A}$ un anneau euclidien, $\mathcal{K}$ le corps des fractions associé, r un élément non nul de $\mathcal{K}$, $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$ deux représentations irréductibles de r. Alors p_1 et p_2 sont égaux à un inversible près, q_1 et q_2 sont égaux à un inversible près.

Preuve: : laissée au lecteur.

On en déduit que sur l'ensemble des représentations irréductibles de r, les degrés du numérateur et du dénominateur sont constants. On appelera ceux-ci respectivement "degré du numérateur" et "degré du dénominateur" de r.

Définition 4.3 (fraction rationnelle scalaire propre) *Une fraction rationnelle non nulle de $\mathcal{K}$ est dite (strictement) propre si le degré de son dénominateur est supérieur (strictement) à celui de son numérateur.*

Par convention, 0 est propre et strictement propre[3].

Si $\mathcal{A}$ est un anneau de polynômes, les fractions rationnelles propres forment un anneau euclidien (voir exercice).

Dans le cas où $\mathcal{A} = \mathrm{R}[s]$ ou $\mathrm{C}[s]$, une fraction rationnelle est propre (resp. strictement propre) si et seulement si elle est bornée (resp. nulle) à l'infini.

Théorème 4.7 *La seul entier strictement propre est 0.*

Preuve: soit n un entier; $\frac{n}{1}$ est une représentation irréductible de n; si n est non nul, on a $\deg(n) \geq 0 = \deg(1)$.

Ces quelques résultats étant présentés, nous pouvons passer à la définition des *matrices* rationnelles propres.

[3]ce qui logique si on convient d'affecter le degré $-\infty$ à 0

4.2.2 Définition

Définition 4.4 (matrices rationnelles propres) *Une matrice rationnelle (strictement) propre est une matrice dont les éléments sont des fractions rationnelles (strictement) propres.*

4.2.3 Division euclidienne de matrices

Nous n'avons pas défini le degré d'une matrice. En fait il n'existe pas de notion satisfaisante de degré dans ce cas. Il existe par contre une notion de "division euclidienne", que nous allons présenter ici.

Théorème 4.8 (Division euclidienne de matrices) *Soit D une matrice euclidienne carrée régulière, N une matrice euclidienne ayant le même nombre de colonnes (resp. de lignes) que D. Alors il existe un couple de matrices entières (Q, R) tel que:*

- $N = QD + R$
- RD^{-1} *est strictement propre*

(resp.

- $N = DQ + R$
- $D^{-1}R$ *est strictement propre*

)

Dans le cas polynômial[4]*, le couple (Q, R) est unique.*
On parle de division euclidienne à droite (resp. à gauche).

Preuve: on traitera la division à droite.

a) existence: soit $T = ND^{-1}$, d'élément courant $\frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}}$, la représentation précédente étant choisie irréductible. Posons une division euclidienne de $\alpha_{i,j}$ par $\beta_{i,j}$, soit $\alpha_{i,j} = q_{i,j}\beta_{i,j} + r_{i,j}$, c'est-à-dire $\frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} = q_{i,j} + \frac{r_{i,j}}{\beta_{i,j}}$. Notons T_{sp} la matrice rationnelle d'élément courant $\frac{r_{i,j}}{\beta_{i,j}}$. Alors T_{sp} est strictement propre, puisque $\frac{r_{i,j}}{\beta_{i,j}}$ est irréductible ou nulle, et que le degré de $r_{i,j}$[5] est inférieur strict à celui de $\beta_{i,j}$. Il suffit alors de poser Q la matrice d'élement courant $q_{i,j}$ et $R = T_{sp}D$; on a $ND^{-1} = Q + T_{sp}$, soit $N = QD + R$, avec RD^{-1} strictement propre et R entière puisque N et QD le sont.

b) unicité: soit deux divisions euclidiennes

$$N = Q_1D + R_1 \quad (4.4)$$
$$N = Q_2D + R_2 \quad (4.5)$$

On a alors $(R_1 - R_2)D^{-1}$ qui est strictement propre (dans le cas présent, les strictement propres forment un groupe additif) et entière, car égale à $Q_1 - Q_2$; d'où $R_1 = R_2$, $Q_1 = Q_2$.

Remarque: dans le cas où la dividion euclidienne est obtenue par la méthode précédente, $r_{i,j}$ ne peut être nul lorsque $\alpha_{i,j}$ ne l'est pas, puisque la fraction $\frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}}$ est irréductible. C'est évidemment vrai dans le cas pôlynomial, puisque le reste est unique.

[4] il suffit en fait que les fractions rationnelles propres forment un groupe additif; on trouvera un exemple de conditions suffisantes en exercice

[5] pour $r_{i,j}$ non nul

On se donne maintenant un corps commutatif $\mathcal{K}$, et dans tout ce qui suit on prend comme anneau euclidien l'anneau des polynômes $\mathcal{K}[s]$, auquel on associe le corps des fractions rationnelles $\mathcal{K}(s)$. Par matrice rationnelle on entendra désormais une matrice à éléments dans $\mathcal{K}(s)$.

4.3 Matrices polynômiales propres

4.3.1 Définitions

Définition 4.5 (matrices par degré) *Soit M une matrice polynômiale. Le i^{eme} degré ligne (resp. colonne) de M est le degré maximal des éléments de la i^{eme} ligne (resp. colonne) de M; on le notera ∂l_i (resp. ∂c_i).*

La matrice par degrés ligne (resp. colonne) extraite de M est la matrice dans laquelle on a remplacé l'élément courant $m_{i,j}$ de M par le coefficient du terme de degré ∂l_i (resp. ∂c_i) de $m_{i,j}$. C'est une matrice à éléments dans $\mathcal{K}$.

Remarques:

- lorsqu'une ligne (ou une colonne) est nulle, on convient de lui attribuer le degré 0. La ligne correspondante de la matrice par degrés ligne (ou colonne) est alors nulle.
- la définition de degré ligne et de degré colonne s'étend bien sûr au cas d'un anneau euclidien général.

Définition 4.6 (matrices propres) [6] *Une matrice polynômiale carrée est dite ligne (resp. colonne) propre si sa matrice par degrés ligne (resp. colonne) est de rang plein.*

Exemple: soit la matrice polynômiale

$$M(s) = \begin{bmatrix} s^2-3 & 1 & 2s \\ 4s+2 & 2 & 0 \\ -s^2 & s+3 & -3s+2 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

On a

$$\begin{array}{lll} \partial l_1 = 2 & \partial l_2 = 1 & \partial l_3 = 2 \\ \partial c_1 = 2 & \partial c_2 = 1 & \partial c_3 = 1 \end{array} \tag{4.7}$$

Les matrices par degrés ligne Γ_l et par degrés colonne Γ_c valent

$$\Gamma_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

M n'est donc ni ligne propre, ni colonne propre; elle est pourtant de rang plein, puisque son déterminant (à une constante près) vaut $3s^3 + 22s^2 + 14s - 8$.

Remarque: on notera par la suite Γ_l (resp. Γ_c) les matrices par degrés ligne (resp. colonne).

[6] Nous sommes bien conscient du risque de confusion qui existe entre matrices polynômiales propres et matrices rationnelles propres; il s'agit malheureusement de la terminologie consacrée.

4.3.2 Propriétés

Théorème 4.9 (degré du déterminant) *Soit M une matrice polynômiale carrée. On a alors*[7]

$$\begin{array}{c} \deg(\det(M)) \leq \sum \partial l_i \\ \deg(\det(M)) \leq \sum \partial c_j \end{array} \tag{4.9}$$

et le terme de degré $\sum \partial l_i$ (resp. $\sum \partial c_j$) du déterminant de M est égal au déterminant de Γ_l (resp. Γ_c); soit:

- $\det(M(s)) = \det \Gamma_l \times s^{\sum \partial l_i}$ *+ termes de degrés inférieurs*
- $\det(M(s)) = \det \Gamma_c \times s^{\sum \partial c_j}$ *+ termes de degrés inférieurs*

Preuve: On ne traitera que les degrés ligne.

Soit n la taille de M; on suppose le résultat vrai pour $n-1$ et on developpe le déterminant de M suivant la première colonne. Pour cela, on pose:

- k_i le coefficient de degré ∂l_i de $m_{i,1}(s)$
- M_i la matrice extraite de M en rayant i^{eme} ligne et première colonne
- $d_{i,j}$ le degré de la j^{eme} ligne de M_i
- Γ_l la matrice par degrés ligne de M
- Γ_{l_i} la matrice extraite de Γ_l en rayant i^{eme} ligne et première colonne
- $\Gamma_l(M_i)$ la matrice par degrés ligne de M_i

On a alors

$$\begin{aligned} \det(M(s)) &= \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} m_{i,1}(s) \det(M_i(s)) \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} k_i \det(\Gamma_l(M_i)) s^{\partial l_i + \sum_{j \neq i} d_{i,j}} + degr\acute{e}s\ inf\acute{e}rieurs \end{aligned}$$

On a toujours $\partial l_i + \sum_{j \neq i} d_{i,j}$ qui est inférieur à $\sum_{i=1}^{i=n} \partial l_i$, et l'égalité est réalisée si et seulement si on a $d_{i,j} = \partial l_j$ pour tous les j différents de i. Dans l'affirmative, on a alors $\Gamma_l(M_i) = \Gamma_{l_i}$; dans la négative, on a alors Γ_{l_i} qui contient une ligne nulle, et son déterminant est donc également nul. On en déduit que:

$$\begin{aligned} \det(M(s)) &= \sum_{\substack{i=1 \\ d_{i,j} = \partial l_j \ \forall j \neq i}}^{i=n} (-1)^{i-1} k_i \det(\Gamma_{l_i}) s^{\sum_{i=1}^{1=n} \partial l_i} + degr\acute{e}s\ inf\acute{e}rieurs \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} k_i \det(\Gamma_{l_i}) s^{\sum_{i=1}^{1=n} \partial l_i} + degr\acute{e}s\ inf\acute{e}rieurs \\ &= \det \Gamma_l \times s^{\sum \partial l_1} + degr\acute{e}s\ inf\acute{e}rieurs \end{aligned}$$

Corollaire 4.3 une matrice carrée de rang plein est ligne (resp. colonne) propre si et seulement si le degré de son déterminant est égal à la somme de ses degrés de lignes (resp. colonne).

[7] si M n'est pas de rang plein, on convient de dire que deg(det$M$)=0

Théorème 4.10 ("lavage" de matrices) *Toute matrice polynômiale carrée de rang plein est*

- *ligne équivalente à une matrice ligne propre*
- *colonne équivalente à une matrice ligne propre*
- *ligne équivalente à une matrice colonne propre*
- *colonne équivalente à une matrice colonne propre*

Remarque: d'après le théorème précédent, la condition de rang plein est nécessaire.
Preuve: on ne traitera que la ligne équivalence.
Obtention d'une matrice colonne propre: le passage à une forme d'Hermite supérieure convient.
Obtention d'une matrice ligne propre: on utilise l'algorithme suivant:

a) $i = 0$, $M_0 = M$

b) si M_i est ligne propre ou si M_i n'est pas de rang plein, STOP.
Sinon, il existe une combinaison linéaire non triviale $\sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j L_j$ des lignes L_j de $\Gamma_l(M_i)$ qui soit égale à zéro. On note l_j la j^{eme} ligne de M_i, ∂_{max} le plus grand degré ∂l_j tel que λ_j soit non nul, et on se donne j_0 tel que $\partial l_{j_0} = \partial_{max}$.
Remarquons que ∂_{max} est positif strict. En effet, si ce n'était pas le cas, alors toutes les lignes L_j telles que $\lambda_j \neq 0$ seraient égales aux lignes l_j correspondantes de M_i; on aurait alors $\sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j l_j = 0$, et M_i ne serait pas de rang plein.
A la ligne l_{j_0} de M_i on ajoute alors la combinaison linéaire[8]
$\sum_{j \neq j_0} s^{\partial_{max} - \partial l_j} \frac{\lambda_j}{\lambda_{j_0}} l_j$.
Ceci est réalisable par opérations de lignes[9]. La ligne obtenue n'est pas nulle, puisque M_i est de rang plein. On a alors fait baisser strictement le degré de la ligne lj_0 en éliminant les termes de degré $\partial_{max} = \partial l_{j_0}$ de l_{j_0}. On a par ailleurs laissé inchangés les autres degrés ligne; on a donc fait baisser strictement la somme des degrés ligne.
On note M_{i+1} la matrice obtenue; M_{i+1} est de rang plein, car ligne équivalente à M_i. On fait ensuite $i = i + 1$, et on retourne en b).
Cet algorithme s'arrête en un nombre fini de coups; comme M_i est toujours de rang plein, cela prouve le résultat.

Interprétation: on prend $\mathcal{K} = \mathrm{R}$, et à l'indéterminée s on substitue l'opérateur différentiel $\frac{d}{dt}$. Si M n'est pas ligne propre ou colonne propre, cela signifie qu'on peut, soit par changements de variables différentiellemnt réversibles, soit par des combinaisons différentiellement réversibles d'équations, faire baisser l'ordre des opérateurs (ou des équations) différentiel(le)s.
Exemple: reprenons l'exemple présenté en début de section. On a

$$M(s) = \begin{bmatrix} s^2 - 3 & 1 & 2s \\ 4s + 2 & 2 & 0 \\ -s^2 & s + 3 & -3s + 2 \end{bmatrix} \quad \Gamma_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

La matrice Γ_l est singulière, avec $L_1 + L_3 = 0$. Les degrés ligne étant égaux, on remplace l_1 par $l_1 + l_3$ dans $M(s)$. On obtient:

$$M(s) = \begin{bmatrix} -3 & s + 4 & -s + 2 \\ 4s + 2 & 2 & 0 \\ -s^2 & s + 3 & -3s + 2 \end{bmatrix} \quad \Gamma_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

[8] ∂l_j est toujours défini sans ambiguïté car aucune ligne ne peut être nulle, M_i étant de rang plein.
[9] pour $\lambda_j \neq 0$, on a $\partial l_j < \partial_{max}$

On a fait baisser le degré de la première ligne, mais Γ_l est encore singulière, puisqu'on a $L_2 + 4L_3 = 0$. La différence de degrés étant de 1 en faveur de l_3, on remplace cette dernière par $sl_2 + 4l_3$, et on obtient:

$$M(s) = \begin{bmatrix} -3 & s+4 & -s+2 \\ 4s+2 & 2 & 0 \\ 2s & 6s+12 & -12s+8 \end{bmatrix} \quad \Gamma_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -12 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

ce qui fait baisser le degré de la troisième ligne. Γ_l est alors régulière et M ligne propre.

4.4 Caractérisation des matrices rationnelles propres

Il ne s'agit pas à proprement parler d'une caractérisation, dans la mesure où la condition suffisante est légèrement plus forte que la condition nécessaire; on y voit en particulier l'importance des matrices polynômiales propres.

Théorème 4.11 (Condition nécessaire) *Soit T une matrice (strictement) propre, et $D^{-1}N$ (resp. ND^{-1}) une factorisation à gauche (resp. à droite) de T. Alors chaque ligne (resp. colonne) non nulle de N a un degré (strictement) inférieur au degré de la ligne (resp. colonne) correspondante de D[10].*

Preuve: on traite la factorisation à gauche et le cas simplement propre; on laisse au lecteur le soin de substituer les signes d'inégalité pour le cas strictement propre.

On notera $m_{i,j}$ l'élément courant d'une matrice M.

Considérons la i^{eme} ligne de N, qu'on suppose non nulle, et $n_{i,j}$ un élément, également non nul, de cette ligne.

On a donc

$$n_{i,j} = \sum_k d_{i,k} t_{k,j} \tag{4.13}$$

Notons $I_{i,j}$ l'ensemble des indices k tels que $t_{k,j}$ et $d_{i,k}$ soient non nuls, et, pour un tel indice k, donnons-nous une représentation irréductible $\frac{p_{k,j}}{q_{k,j}}$ de $t_{k,j}$. Afin de ramener (4.13) à une expression polynômiale, on note $\tilde{q}_j$ le produit $\prod_k q_{k,j}$ et $\tilde{p}_{k,j}$ l'entier $t_{k,j}\tilde{q}_j$. On a alors

$$\tilde{p}_{k,j} q_{k,j} = p_{k,j} \tilde{q}_j \tag{4.14}$$

d'où

$$\begin{aligned} \deg(\tilde{p}_{k,j} q_{k,j}) &= \deg(p_{k,j}\tilde{q}_j) \\ &\leq \deg(q_{k,j}\tilde{q}_j) \end{aligned}$$

car toutes ces quantités sont non nulles; on en déduit que

$$\deg(\tilde{p}_{k,j}) \leq \deg(\tilde{q}_j) \tag{4.15}$$

On a d'autre part

$$n_{i,j}\tilde{q}_j = \sum_{k \in I_{i,j}} d_{i,k} \tilde{p}_{k,j} \tag{4.16}$$

[10]les degrés lignes (resp. colonne) de D sont définis, puisque D est de rang plein.

où toutes les quantiées mentionnées sont entières.

$$\begin{aligned}
\deg(n_{i,j}) + \deg(\tilde{q}_j) &= \deg(\sum_{k\in I_{i,j}} d_{i,k}\tilde{p}_{k,j}) \\
&\leq \max_{k\in I_{i,j}}(\deg(d_{i,k}\tilde{p}_{k,j})) \\
&\leq \max_{k\in I_{i,j}}(\deg(d_{i,k}\tilde{q}_j)) \\
&\leq \partial l_i(D) + \deg(\tilde{q}_j)
\end{aligned}$$

d'où $\deg(n_{i,j}) \leq \partial l_i(D)$, et le résultat en maximisant sur j.

Remarque: dans le cas strictement propre, on en déduit que $\partial l_i(D)$ est strictement positif lorsque la i^{eme} ligne de N est non nulle.

Théorème 4.12 (Condition suffisante) *On suppose D ligne (resp. colonne) propre. Alors la condition nécessaire précédente est aussi suffisante.*

Preuve: on traitera la factorisation à gauche.

Notons $D_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de D en remplaçant la i^{eme} colonne par la j^{eme} colonne de N. On a alors

$$t_{i,j} = \frac{\det(D_{i,j})}{\det(D)} \tag{4.17}$$

Nous allons montrer que $t_{i,j}$ est propre. Si $t_{i,j}$ est nul, le résultat est trivial. Dans le cas contraire, on a $\det(D_{i,j})$ qui est non nul, avec

$$\deg(\det(D_{i,j})) \leq \sum_k \partial l_k(D_{i,j}) \tag{4.18}$$

$$\deg(\det(D)) = \sum_k \partial l_k(D) \tag{4.19}$$

puisque D est ligne propre. D'autre part, on a pour tout k:

$$\deg(n_{k,j}) \leq \partial l_k(N) \tag{4.20}$$

$$\leq \partial l_k(D) \tag{4.21}$$

On en déduit que, pour tout k,

$$\begin{aligned}
\partial l_k(D_{i,j}) &= \max\left[\deg(n_{k,j}), \max_{\tilde{j}\neq j}(\deg(d_{k,\tilde{j}}))\right] \\
&\leq \max\left[\partial l_k(D), \max_{\tilde{j}\neq j}(\deg(d_{k,\tilde{j}}))\right] \\
&= \partial l_k(D)
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\deg(\det(D_{i,j})) \leq \deg(\det(D))$, ce qui clôt la démonstration dans le cas simplement propre. Pour étudier le cas strictement propre, il convient de poursuivre l'analyse en distinguant deux cas:

- s'il existe k tel que $\partial l_k(D_{i,j}) < \partial l_k(D)$, le théorème est prouvé
- sinon on a $\partial l_k(D_{i,j}) = \partial l_k(D)$ pour tout k; or on a $\deg(n_{k,j}) < \partial l_k(D)$ par hypothèse. On en déduit que la i^{eme} colonne de $\Gamma_l(D_{i,j})$ est nulle, et que $D_{i,j}$ n'est pas ligne propre, d'où

$$\deg(\det D_{i,j}) < \sum_k \partial l_k(D_{i,j}) \tag{4.22}$$

$$\leq \sum_k \partial l_k(D) \tag{4.23}$$

$$= \deg(\det D) \tag{4.24}$$

ce qui prouve le résultat.

4.5 Exercices

Exercice 4.1 on se place dans le cadre d'un anneau principal $\mathcal{A}$.

a) Soit T une matrice rationnelle[11] de rang r, d'éléments $t_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{q_{i,j}}$, où $\frac{p_{i,j}}{q_{i,j}}$ est une fraction irréductible. On note Λ un dénominateur commun des $q_{i,j}$. A partir de la forme de Smith S de $T\Lambda$, montrer qu'il existe U et V, matrices unimodulaires, et S_M rationnelle, vérifiant:

$$T = US_MV \tag{4.25}$$

$$S_M = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

où S_1 est carrée diagonale de taille r et d'éléments diagonaux $\frac{\epsilon_i}{\psi_i}$, où $\frac{\epsilon_i}{\psi_i}$ est irréductible, avec ϵ_i divise ϵ_{i+1} et ψ_{i+1} divise ψ_i.

Une matrice rationnelle équivalente à T possédant ces propriétés est dite *forme de Smith-Mac Millan* de T.

b) Monter que les ϵ_i et les ψ_i sont uniques à une constante près.

Exercice 4.2 On on considère un anneau euclidien $\mathcal{A}$ muni d'une fonction degré telle que, pour tout triplet (a, b, α) d'éléments non nuls de $\mathcal{A}$, on a:

$$\begin{aligned} \deg(a+b) &\leq \max(\deg(a), \deg(b)) && (4.27) \\ \deg(a) < \deg(b) &\iff \deg(\alpha a) < \deg(\alpha b) && (4.28) \\ \deg(a) = \deg(b) &\iff \deg(\alpha a) = \deg(\alpha b) && (4.29) \end{aligned}$$

1. Soit r une fraction rationnelle, et $\frac{n}{d}$ une représentation de r. Montrer que la quantité $\deg(d) - \deg(n)$ est indépendante du choix de la représentation.
2. Monter que l'ensemble des fractions rationnelles propres et l'ensemble des fractions rationnelles strictement propres sont des sous-anneaux du corps des fractions rationnelles.
3. Reprendre dans ce cas l'exercice 2.2.
4. Reprendre la preuve du théorème 4.11.

Exercice 4.3 Soit $(sId - A, B, C, D(s))$ une forme d'état généralisée.

1. Montrer que $sId - A$ est ligne propre et colonne propre quelque soit A
2. En déduire que $C(sId - A)^{-1}B$ est strictement propre

Exercice 4.4 Soit T une matrice entière et $N_dD^{-1}N_g$ une bifactorisation irréductible de T. Montrer qu'il existe deux unimodulaires U et V telles que

$$\begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} D & N_g \\ N_d & T \end{bmatrix} V \tag{4.30}$$

En déduire une nouvelle preuve du théorème (4.5).

Exercice 4.5 Utiliser la division euclidienne de matrices pour exhiber un critère de divisibilité.

Exercice 4.6 (Séparation des entrées et sorties) On considère une matrice polynômiale M, de rang plein, *ayant plus de colonnes que de lignes*. On cherche des opérations de lignes et *de simples permutations de colonnes* qui mette M sous la forme $\begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix}$, avec P carré de rang plein et $P^{-1}Q$ propre.

[11] c'est-à-dire à éléments dans le corps des fractions associé à $\mathcal{A}$

1. On étend la définition des degrés-lignes, des matrices par degrés-lignes et des matrices ligne propres aux matrices “horizontales” comme M, en oubliant simplement de préciser que M doit être carrée. Montrer que l'algorithme de passage à une matrice ligne propre par opération de lignes, tel qu'il est décrit dans la preuve du théorème 4.10, donne les mêmes résultats dans le cas de matrices “horizontales”.
2. On peut donc se ramener au cas où M est ligne propre. Il existe donc une matrice $\Gamma_l(P)$, extraite de $\Gamma_l(M)$ par sélection de colonnes, qui soit carrée de rang plein; on note P la matrice correspondante obtenue à partir de M par extraction de colonnes, et Q la matrice complémentaire dans M.
   (a) Montrer que les degrés lignes de P sont ceux de M.
   (b) En déduire que P est ligne propre, et que $P^{-1}Q$ est une matrice rationnelle propre.

Chapitre 5

Matrices polynômiales et opérateurs différentiels

Nous allons étudier dans ce chapitre les relations existant entre les opérateurs différentiels et leur représentation agébrique sous forme polynômiale.

On commencera par définir rigoureusement l'opérateur différentiel associé à une matrice polynômiale.

On montrera, dans le cas d'équations différentielles ordinaires[1], que la dimension du noyau de l'opérateur différentiel (c'est-à-dire l'espace des solutions) est donné par le degré du déterminant de la matrice.

Ayant étudié la dimension de l'espace des solutions, on s'intéressera à la relation d'inclusion sur ces espaces. On montrera qu'elle est équivalente à la relation de divisibilité sur les matrices. On étendra ensuite ce résultat au cas d'équations différentielles commandées, c'est-à-dire avec plus d'inconnues que d'équations. Ces deux théorèmes, fondamentaux, prouvent que le calcul symbolique sur les matrices polynômiales permet d'étudier efficacement les relations liant les solutions de divers systèmes différentiels.

[1] c'est-à-dire non commandées; autrement dit, avec autant d'équations que d'inconnues

5.1 Définitions

Définition 5.1 (Opérateur différentiel associé à un polynôme) *A un polynôme réel*

$$p(s) = \sum_{i=0}^{i=n} p_i s^i \tag{5.1}$$

on associe l'opérateur différentiel $p(\frac{d}{dt})$, de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par

$$p(\frac{d}{dt}) = \sum_{i=0}^{i=n} p_i \frac{d^i}{dt^i} \tag{5.2}$$

On a alors

$$\begin{aligned} (p+q)(\frac{d}{dt}) &= p(\frac{d}{dt}) + q(\frac{d}{dt}) && (5.3)\\ (pq)(\frac{d}{dt}) &= p(\frac{d}{dt}) \circ q(\frac{d}{dt}) && (5.4) \end{aligned}$$

On définit ainsi un homomorphisme Δ de l'anneau $\mathbb{R}[s]$ dans l'anneau $\mathcal{L}(C^\infty, C^\infty)$ des applications linéaires de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $\Delta(\mathbb{R}[s])$ est l'anneau des polynômes différentiels, qu'on notera $\mathbf{R}[\frac{d}{dt}]$[2]. On vérifie facilement que Δ est également un homomorphisme sur les structures d'espace vectoriel sous-jacentes[3], et que seul le polynôme nul a pour image l'application 0[4]; $\mathbb{R}[s]$ et $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$ sont donc isomorphes, en tant qu'espaces vectoriels, bien sûr, mais surtout en tant qu'anneaux.

Définition 5.2 (Matrice différentielle) *A une matrice polynômiale $M(s)$ d'élément courant $m_{i,j}$ dans $\mathbb{R}[s]$ on associe la matrice différentielle $M(\frac{d}{dt})$ de même taille et d'élément courant $\Delta(m_{i,j})$. C'est donc une matrice à éléments dans $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$.*

On a alors de manière évidente

$$\begin{aligned} (P+Q)(\frac{d}{dt}) &= P(\frac{d}{dt}) + Q(\frac{d}{dt}) && (5.5)\\ (P\times Q)(\frac{d}{dt}) &= P(\frac{d}{dt}) \times Q(\frac{d}{dt}) && (5.6) \end{aligned}$$

où les seules lois considérées sont les opérations sur les matrices à éléments respectivement dans $\mathbf{R}[s]$ et dans $\mathbf{R}[\frac{d}{dt}]$.

Définition 5.3 (opérateur associé à une matrice différentiel) On munit ici les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ de leur base canonique. *On peut alors identifier la matrice différentielle $M(\frac{d}{dt})$ à l'opérateur différentiel défini par*

$$\begin{array}{rccc} M(\frac{d}{dt}): & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^q) & \to & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^p) \\ & \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{j=q} m_{1,j}(\frac{d}{dt})(z_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{j=q} m_{p,j}(\frac{d}{dt})(z_j) \end{bmatrix} \end{array} \tag{5.7}$$

[2]notation personnelle

[3]c'est bien sûr une particularité du cas linéaire

[4]tester l'opérateur sur des fonctions polynômes

On a alors

$$(P+Q)(\frac{d}{dt}) = P(\frac{d}{dt}) + Q(\frac{d}{dt}) \tag{5.8}$$

$$(P \times Q)(\frac{d}{dt}) = P(\frac{d}{dt}) \circ Q(\frac{d}{dt}) \tag{5.9}$$

On note également Δ *l'application qui à* $M(s)$ *associe* $M(\frac{d}{dt})$.

Remarques:

- $M(\frac{d}{dt})$ n'induit pas de structure de module, puisque les éléments de la matrice ne sont pas dans le même objet que ce sur quoi elle s'applique.
- il en est des matrices différentielles comme des matrices classiques, à savoir que l'opérateur qui leur est associé n'est pas défini de manière géométriquement intrinsèque.
- une difficulté supplémentaire, liée à la première remarque, provient de la coexistence de deux notions de changement de base: la notion habituelle (changement de base sur l'espace d'état), et celle de changement de variable différentiellement réversible. La première correspond à une vision géométrique classique des choses[5], et l'autre à un point de vue fonctionnel. Nous n'avons pas chercher ici à réconcilier les deux points de vue, ni à donner une structure véritablement adéquate aux espaces sur lesquels “vivent” les opérateurs différentiels; nous nous sommes contenté de la définition précédente qui, si elle peut ne pas paraître satisfaisante, a au moins le mérite d'être simple.

  En pratique, on interprètera les changements de base sur $\mathbb{R}^n$ comme l'application d'un opérateur différentiel constant.
- une autre manière de procéder consiste à remplacer $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par le *corps des fonctions méromorphes sur* $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, et à remplacer $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ par l'espace vectoriel $(\mathcal{M}(\mathbb{R}))^n$, espace vectoriel sur $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. $M(\frac{d}{dt})$ n'est plus alors une application linéaire; cela n'est pas bien grave dans la mesure où seules comptent les relations (5.8) et (5.9) qui nous assurent la validité des représentations par matrices polynômiales.

5.2 Dimension de l'espace des solutions

Lemme 5.1 Soit P une matrice polynômiale et U une matrice unimodulaire de taille adaptée. Alors

$$\ker(P(\frac{d}{dt})) = \ker(UP(\frac{d}{dt})) \tag{5.10}$$

Preuve: cela résulte de l'inversibilité de $U(\frac{d}{dt})$, cet inverse étant d'ailleurs $U^{-1}(\frac{d}{dt})$.

Théorème 5.1 *Soit* P *une matrice polynômiale carrée de rang plein. Alors le noyau de* $P(\frac{d}{dt})$ *est un espace vectoriel de dimension* $\deg(\det(P))$.

Preuve: le résultat est bien connu dans le cas scalaire. On s'y ramène en calculant la forme de Smith P et en remarquant que l'opérateur différentiel associé à une unimodulaire est un isomorphisme [6].

Détaillons tout de même la preuve.

[5] telle qu'elle est utilisée, par exemple, en théorie géométrique des sytèmes non linéaires, avec calcul sur les variétés, etc ...

[6] au sens ensembliste pour simplifier

Du cas scalaire on passe sans peine au cas où P est diagonale.

Considérons maintenant P quelconque, notons S la forme de Smith de P, et U et V deux unimodulaires telles que $P = USV$. Alors

$$\ker(P(\frac{d}{dt})) = \ker(SV(\frac{d}{dt})) = V^{-1}(\ker(S(\frac{d}{dt}))) \tag{5.11}$$

Or $\ker(S(\frac{d}{dt}))$ est un espace vectoriel de dimension $\deg(\det(S)) = \deg(\det(P))$, d'où

$$\dim(\ker(P(\frac{d}{dt}))) = \deg(\det(P)) \tag{5.12}$$

Remarques:

- si on utilise le corps des fonctions méromorphes, il faut entendre par espace vectoriel un espace vectoriel sur R.
- on voit que, si P n'est pas ligne propre, la dimension de l'espace des solutions n'est pas égale à la somme des ordres de chacune des équations, puisque cette somme est alors strictement supérieure au degré du déterminant. On voit donc qu'en "lavant" les matrices, on élimine des ordres de dérivation inutiles dans le système différentiel.

Corollaire 5.1 Soit $P(s)$ une matrice $p \times p$ régulière, et v un élément de $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$. Alors l'ensemble des solutions z de

$$P(\frac{d}{dt})z = v \tag{5.13}$$

est un espace affine de dimension $\deg(\det(P))$.

Preuve: il suffit de montrer l'existence d'une solution particulière, ce qu'on fait en se ramenant à la forme de Smith de P et en appliquant les résultats bien connus du cas scalaire.

5.3 Relation avec la divisibilité

Théorème 5.2 *Soit $P(s)$ carrée régulière et $Q(s)$ ayant le même nombre de colonnes. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

- $\ker(P(\frac{d}{dt})) \subset \ker(Q(\frac{d}{dt}))$
- *P divise Q à droite*

Preuve: la condition suffisante est triviale; montrons la condition nécessaire.

Soit S la forme de Smith de P, et U et V deux unimodulaires telles que $S = UPV$. Posons la division euclidienne à droite de UQV par S, soit:

$$UQV = \tilde{Q}S + R \tag{5.14}$$

On a alors

$$\ker(S(\frac{d}{dt})) \subset \ker(R(\frac{d}{dt})) \tag{5.15}$$

Nous allons montrer par l'absurde que R est nul. Supposons donc que la j^{eme} colonne de R soit non nulle. On a (théorème 4.11)

$$\partial c_j(R) < \partial c_j(S) \tag{5.16}$$

Notons $\sigma_j(S)$ l'ensemble des élements du noyau $\ker(S(\frac{d}{dt}))$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf peut-être la j^{eme}, et notons $\sigma_j(R)$ l'analogue sur R. $\sigma_j(S)$ et $\sigma_j(R)$ sont deux espaces vectoriels, avec

$$\sigma_j(S) \subset \sigma_j(R) \tag{5.17}$$

La dimension du premier est visiblement $\partial c_j(S)$, puisque S est diagonale. Quant au second, il est égal à $\bigcap_i \ker(r_{i,j}(\frac{d}{dt}))$.

Notons I_j l'ensemble des indices i tels que $r_{i,j}$ soit non nul. Par hypothèse, I_j est non vide; on a donc

$$\sigma_j(R) = \bigcap_i \ker(r_{i,j}(\frac{d}{dt})) = \bigcap_{i \in I_j} \ker(r_{i,j}(\frac{d}{dt})) \tag{5.18}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\dim(\sigma_j(R)) &\leq \min_{i \in I_j}(\deg(r_{i,j})) \\
&\leq \max_{i \in I_j}(\deg(r_{i,j})) \\
&= \partial c_j(R) \\
&< \partial c_j(S) \\
&= \dim(\sigma_j(R))
\end{aligned}$$

ce qui est contradictoire avec (5.17).

S divise donc Q à droite; il est facile d'en déduire que P divise Q à droite.

Théorème 5.3 (Cas d'une e.d.o. paramétré) *Soient $P(s)$ et $\tilde{P}(s)$ deux matrices carrées de rang plein, et $Q(s)$ et $\tilde{Q}(s)$ deux matrices ayant le même nombre de lignes.*

Pour u de classe C^∞, on note σ_u (resp. $\tilde{\sigma}_u$) l'ensemble des solutions z de $P(\frac{d}{dt})z = Q(\frac{d}{dt})u$ (resp. $\tilde{P}(\frac{d}{dt})z = \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u$). Alors

- $\sigma_u \subset \tilde{\sigma}_u$ *pour* tout u *si et seulement si* $\begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix}$ *divise* $\begin{bmatrix} \tilde{P} & \tilde{Q} \end{bmatrix}$ *à droite*
- $\sigma_u = \tilde{\sigma}_u$ *pour* tout u *si et seulement si* $\begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix}$ *est ligne équivalente à* $\begin{bmatrix} \tilde{P} & \tilde{Q} \end{bmatrix}$ [7]

Preuve: la deuxième propriété se déduit aisément de la première et du théorème (3.1). D'autre part, la condition suffisante de la première propriété est triviale. Il nous reste à prouver la condition nécessaire.

De $\sigma_0 \subset \tilde{\sigma}_0$ et du théorème (5.2) on déduit que P divise $\tilde{P}$ à droite, soit $\tilde{P} = CP$.

Soit maintenant u de classe C^∞, et z un élément de σ_u[8].

On a alors

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(\frac{d}{dt})u &= \tilde{P}(\frac{d}{dt})z \\
&= CP(\frac{d}{dt})z \\
&= CQ(\frac{d}{dt})u
\end{aligned}$$

d'où

$$(\tilde{Q} - CQ)(\frac{d}{dt})u = 0 \tag{5.19}$$

ceci pour tout u; on en déduit que $\tilde{Q} = CQ$, d'où le résultat.

[7] Q et $\tilde{Q}$ ont alors le même nombre de colonnes

[8] z existe (théorème (5.1)).

Théorème 5.4 (Solutions communes et PGCD) *soit R un PGCD à droite de deux matrices polynômiales P et Q. Alors:*

$$\ker R(\frac{d}{dt}) = \ker P(\frac{d}{dt}) \cap \ker Q(\frac{d}{dt}) = \ker \begin{bmatrix} P(\frac{d}{dt}) \\ Q(\frac{d}{dt}) \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Preuve: analogue à celle du théorème (3.10).

Chapitre 6

Formes opérateurs équivalentes

Le but de ce chapitre est de définir, puis d'étudier, l'analogue, pour la théorie des systèmes, du changement de base en calcul vectoriel classique.

Pour ce faire, on commencera par utiliser l'interprétation *différentielle* des formes opérateurs. Rappelons qu'elle se présente comme un système différentiel affine portant sur l'état partiel et sur les entrées, et dont le second membre est constitué des sorties. A partir de cette interprétation, on définira les "changements de base" comme étant des transformations *différentiellement réversibles* sur les inconnues (entrées et état partiel) de ce système, laissant invariantes à la fois l'entrée et la relation entrée-sortie.

Cette tranformation induit alors une relation d'équivalence sur les formes opérateurs; on appellera *systèmes* les classes d'équivalence correspondantes.

A l'aide des résultats du chapitre précédent, on montrera que cette relation d'équivalence, définie grâce à l'interprétation différentielle des formes opérateurs, a une traduction algébrique directe sur les formes elles-mêmes.

Puis on exhibera un certain nombre d'invariants par ces "changements de base" qui nous seront utiles par la suite: transfert, PGCD, déterminant de la dynamique P.

6.1 Définition différentielle

Notations: dans la définition qui va suivre on notera (P, Q, R, W) et $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$ deux formes opérateurs, de tailles $(p \times p, p \times q, r \times p, r \times q)$ et $(\tilde{p} \times \tilde{p}, \tilde{p} \times q, r \times \tilde{p}, r \times q)$. Les deux formes opérateurs ont donc le même nombre d'entrées et le même nombre de sorties.

A une entrée u de classe C^∞, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^q$, on associe l'ensemble Z_u (resp. $\tilde{Z}_u$) des solutions z de l'équation différentielle $P(\frac{d}{dt})z = Q(\frac{d}{dt})u$ (resp. $\tilde{P}(\frac{d}{dt})z = \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u$).

Définition 6.1 (Equivalence différentielle) *On dira que (P, Q, R, W) et $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$ sont équivalentes si et seulement si il existe un quadruplet $(M, V, \tilde{M}, \tilde{V})$ de matrices polynômiales de tailles $(\tilde{q} \times q, \tilde{q} \times p, q \times \tilde{q}, q \times p)$ telles que, pour toute entrée u de classe C^∞, les deux conditions suivantes soient satisfaites:*

- *$z \longrightarrow M(\frac{d}{dt})z + V(\frac{d}{dt})u$ est un isomorphisme Φ de Z_u dans $\tilde{Z}_u$, d'inverse Φ^{-1} défini par $\Phi^{-1}(\tilde{z}) = \tilde{M}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{V}(\frac{d}{dt})u$*
- *le diagramme suivant commute:*

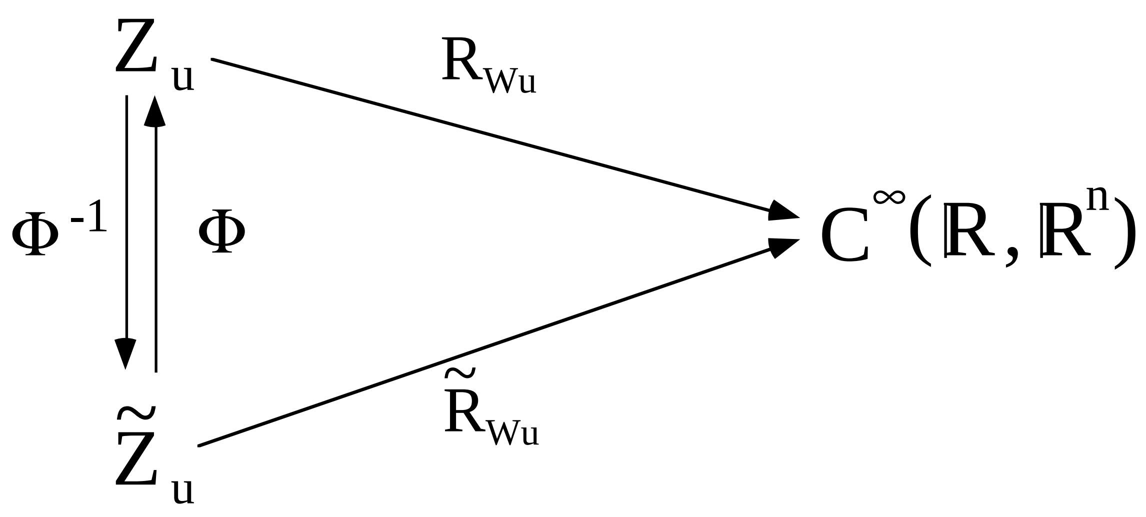

Figure 6.1: Compatibilité des changements de variables avec la relation entrées-sorties.

où R_{Wu} (resp. $\tilde{R}_{Wu}$) désigne l'opérateur de sortie qui à z dans Z_u associe $R(\frac{d}{dt})z + W(\frac{d}{dt})u$ (resp. à $\tilde{z}$ dans $\tilde{Z}_u$ associe $\tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{W}(\frac{d}{dt})u$).

Remarque: le lecteur vérifiera sans peine qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. Ce qui nous permet de poser la définition suivante:

Définition 6.2 (système) *un* système *est une classe d'équivalence relative à la relation précédente*

Interprétation de l'équivalence de formes opérateurs:

- La première condition signifie que les états partiels d'une forme opérateur peuvent s'obtenir de manière différentiellement réversible à partir des états partiels de l'autre forme opérateur et des entrées. L'intervention de l'entrée est nécessaire, sans quoi il serait irréaliste de faire correspondre des formes ARMA d'ordres différents (regarder le cas scalaire pour s'en convaincre)

  De ce point de vue, les deux états partiels sont "au même niveau de causalité".

- la deuxième condition signifie que, *à condition de prendre des conditions initiales qui se correspondent bien*, il y a conservation des relations entrée-sortie[1].

Lemme 6.1 (P, Q, R, W) et $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$ sont équivalentes si et seulement si il existe $(M, V, \tilde{M}, \tilde{V})$ telles que, pour toute entrée u, les deux équations différentielles en $(y, z, \tilde{z})$ suivantes soient équivalentes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(\frac{d}{dt})z &=& Q(\frac{d}{dt})u \\ \tilde{z} &=& M(\frac{d}{dt})z + V(\frac{d}{dt})u \\ y &=& R(\frac{d}{dt})z + W(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{6.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{P}(\frac{d}{dt})\tilde{z} &=& \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u \\ z &=& \tilde{M}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{V}(\frac{d}{dt})u \\ y &=& \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{W}(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{6.2}$$

Preuve: laissée au lecteur, le plus simple étant de traiter séparément condition nécessaire et condition suffisante.

Remarque:

- l'*entrée* se distingue par le fait qu'elle n'intervient qu'en *paramètre* dans les équations différentielles (et non pas comme inconnue)
- la *sortie* se distingue par le fait qu'elle intervient, formellement,[2] de manière uniquement statique, i.e. sans dérivation.
- le *quadruplet* $(M, V, \tilde{M}, \tilde{V})$ n'est certainement pas unique. En effet, si les systèmes différentiels précédents sont équivalents, pour deux matrices quelconques A et $\tilde{A}$ de taille convenable, les systèmes différentiels suivants sont encore équivalents:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(\frac{d}{dt})z &=& Q(\frac{d}{dt})u \\ \tilde{z} &=& [M - AP](\frac{d}{dt})z + [V + AQ](\frac{d}{dt})u \\ y &=& R(\frac{d}{dt})z + W(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{6.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{P}(\frac{d}{dt})\tilde{z} &=& \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u \\ z &=& [\tilde{M} - \tilde{A}\tilde{P}](\frac{d}{dt})\tilde{z} + [\tilde{V} + \tilde{A}\tilde{Q}](\frac{d}{dt})u \\ y &=& \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{W}(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{6.4}$$

6.2 Définition algébrique

Théorème 6.1 (Equivalence algébrique) *(P, Q, R, W) et $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$ sont équivalentes si et seulement si il existe un quadruplet $(X, Y, \tilde{M}, \tilde{V})$ de matrices polynômiales, de tailles appropriées, telles que:*

(C1) $\begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P} & \tilde{Q} \\ -\tilde{R} & \tilde{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ -R & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M} & -\tilde{V} \\ 0 & Id \end{bmatrix}$

(C2) *X et P sont premières entre elles à gauche*

(C3) *$\tilde{P}$ et $\tilde{M}$ sont premières entre elles à droite*

[1] on ne dira jamais assez que la notion de relation entrée-sortie n'a de sens qu'à condition initiale fixée

[2] c'est-à-dire sans tenir compte des égalités éventuelles entre certaines composantes de l'état partiel et certaines composantes de la sortie

Preuve: du lemme (6.1) et du théorème (5.3)[3] on déduit que (P, Q, R, W) et $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$ sont équivalentes si et seulement si il existe une unimodulaire U telle que

$$\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & Q \\ -M & Id & 0 & V \\ -R & 0 & Id & W \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} 0 & \tilde{P} & 0 & \tilde{Q} \\ Id & -\tilde{M} & 0 & \tilde{V} \\ 0 & -\tilde{R} & Id & \tilde{W} \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

Partitionnons maintenant U en blocs 3×3 de manière cohérente avec la partition en $(y, z, \tilde{z})$. On voit alors que nécessairement on a:

$$\begin{aligned} U_{1,2} &= P \\ U_{2,2} &= -M \\ U_{3,2} &= -R \\ U_{1,3} &= 0 \\ U_{2,3} &= 0 \\ U_{3,3} &= Id \end{aligned}$$

La condition (6.5) est donc équivalente à l'existence de $U_{1,1}, U_{2,1}, U_{3,1}$ telles que

$$\begin{bmatrix} 0 & Q \\ Id & V \\ 0 & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & P & 0 \\ U_{2,1} & -M & 0 \\ U_{3,1} & -R & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{P} & 0 & \tilde{Q} \\ Id & -\tilde{M} & 0 & \tilde{V} \\ 0 & -\tilde{R} & Id & \tilde{W} \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

$$\begin{bmatrix} U_{1,1} & P & 0 \\ U_{2,1} & -M & 0 \\ U_{3,1} & -R & Id \end{bmatrix} \quad \text{unimodulaire} \tag{6.7}$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 0 & Q \\ Id & V \\ 0 & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & P & 0 \\ U_{2,1} & -M & 0 \\ U_{3,1} & -R & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \tilde{P} & 0 & \tilde{Q} \\ Id & -\tilde{M} & 0 & \tilde{V} \\ 0 & -\tilde{R} & Id & \tilde{W} \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

$$\begin{bmatrix} U_{1,1} & P \\ U_{2,1} & -M \end{bmatrix} \quad \text{unimodulaire} \tag{6.9}$$

La condition (6.8) se développe en:

$$\begin{aligned} U_{1,1}\tilde{P} &= P\tilde{M} \\ Q &= U_{1,1}\tilde{Q} + P\tilde{V} \\ Id &= U_{2,1}\tilde{P} + M\tilde{M} \\ V &= U_{2,1}\tilde{Q} - M\tilde{V} \\ \tilde{R} &= U_{3,1}\tilde{P} + R\tilde{M} \\ \tilde{W} + U_{3,1}\tilde{Q} &= R\tilde{V} + W \end{aligned}$$

qui s'écrit encore:

$$\begin{bmatrix} U_{1,1} & 0 \\ U_{3,1} & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P} & \tilde{Q} \\ -\tilde{R} & \tilde{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ -R & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M} & -\tilde{V} \\ 0 & Id \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

$$\left\{ \begin{aligned} Id &= U_{2,1}\tilde{P} + M\tilde{M} \\ V &= U_{2,1}\tilde{Q} - M\tilde{V} \end{aligned} \right. \tag{6.11}$$

[3] on vérifie sans peine que les matrices carrées utilisées sont de rang plein dès que P et $\tilde{P}$ sont de rang plein

On a donc montré pour l'instant que (P,Q,R,W) et $(\tilde{P},\tilde{Q},\tilde{R},\tilde{W})$ sont équivalentes si et seulement si il existe $(M,V,\tilde{M},\tilde{V},U_{1,1},U_{2,1},U_{3,1})$ telles que

$$\begin{bmatrix} U_{1,1} & 0 \\ U_{3,1} & Id \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{P} & \tilde{Q} \\ -\tilde{R} & \tilde{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ -R & W \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{M} & -\tilde{V} \\ 0 & Id \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} Id & = & U_{2,1}\tilde{P} + M\tilde{M} \\ V & = & U_{2,1}\tilde{Q} - M\tilde{V} \end{array}\right. \tag{6.11}$$

$$\begin{bmatrix} U_{1,1} & P \\ U_{2,1} & -M \end{bmatrix} \quad \text{unimodulaire} \tag{6.9}$$

Nous allons maintenant séparer condition nécessaire et condition suffisante.

- condition nécessaire:
  - en posant $X = U_{1,1}$ et $Y = U_{3,1}$, on déduit la condition **(C1)** de (6.10).
  - de (6.9) on déduit que X et P sont premières entre elles à droite (théorème (3.4)), d'où **(C2)**.
  - de (6.11) on déduit que $\tilde{P}$ et $\tilde{M}$ doivent être premieres entre elles à gauche (corollaire (3.1)), d'où la condition **(C3)**.
- condition suffisante:
  - en posant $U_{1,1} = X$ et $U_{3,1} = Y$, on déduit la condition (6.10) de **(C1)**.
  - de (6.10) on déduit que $U_{1,1}\tilde{P} = P\tilde{M}$; compte tenu des conditions **(C2)** et **(C3)**, on en déduit (théorème (3.7)) qu'il existe $U_{2,1}, M, \tilde{X}, \tilde{Y}$ telles que

$$\begin{bmatrix} U_{2,1} & M \\ -U_{1,1} & P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{P} & -\tilde{Y} \\ \tilde{M} & \tilde{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

    d'où les conditions (6.11) et (6.9), en posant $V = U_{2,1}\tilde{Q} - M\tilde{V}$

6.3 Système dual

Définition 6.3 (Forme duale) *La forme duale d'une forme opérateur (P,Q,R,W) est la forme opérateur (P^T,R^T,Q^T,W^T).*

Théorème 6.2 (Equivalence des formes duales) *Deux formes opérateurs sont équivalentes si et seulement si leurs formes duales le sont.*

Preuve: laissée au lecteur

6.4 Invariants par équivalence de formes opérateurs

Remarque: on peut donc parler du *système dual* d'un système.

Théorème 6.3 (Invariants) *Soient (P,Q,R,W) et $(\tilde{P},\tilde{Q},\tilde{R},\tilde{W})$ deux formes opérateurs équivalentes. Alors*

a) *les deux formes opérateurs ont le même transfert*

b) *P et $\tilde{P}$ ont le même déterminant (à une constante près)*

c) *les PGCD carrés à droite (resp. à gauche) de P et R (resp. P et Q) et les PGCD carrés à droite (resp. à gauche) de $\tilde{P}$ et $\tilde{R}$ (resp. $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$) ont même déterminant (à une constante près)*

Preuve:

a) d'après **(C1)** on a

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= Y\tilde{P} + R\tilde{M} \\ X\tilde{P} &= P\tilde{M} \\ X\tilde{Q} &= -P\tilde{V} + Q \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \tilde{R}\tilde{P}^{-1}\tilde{Q} + \tilde{W} &= (Y\tilde{P} + R\tilde{M})\tilde{P}^{-1}\tilde{Q} + W + R\tilde{V} - Y\tilde{Q} \\ &= R\tilde{M}\tilde{P}^{-1}\tilde{Q} + W + R\tilde{V} \\ &= RP^{-1}X\tilde{Q} + W + R\tilde{V} \\ &= RP^{-1}(-P\tilde{V} + Q) + W + R\tilde{V} \\ &= RP^{-1}Q + W \end{aligned}$$

b) De (6.5) on déduit qu'il existe une unimodulaire U telle que

$$\begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ -M & Id & 0 \\ -R & 0 & Id \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} 0 & \tilde{P} & 0 \\ Id & -\tilde{M} & 0 \\ 0 & -\tilde{R} & Id \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

La matrice de gauche est triangulaire; en permutant les deux premiers blocs colonnes, celle de droite l'est également; on en déduit que det P et det $\tilde{P}$ sont égaux à une constante près.

c) on s'occupera des PGCD à droite; pour les PGCD à gauche, passer aux systèmes duaux. On notera G un PGCD carré de P et R, $\tilde{G}$ un PGCD carré de $\tilde{P}$ et $\tilde{R}$. G et $\tilde{G}$ sont de rang plein car P et $\tilde{P}$ le sont.
De (6.5) on déduit qu'il existe une unimodulaire U telle que

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ -M & Id \\ -R & 0 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} 0 & \tilde{P} \\ Id & -\tilde{M} \\ 0 & -\tilde{R} \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

et, par des opérations de ligne, on se ramène à

$$\begin{bmatrix} G & 0 \\ -M & Id \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} 0 & \tilde{G} \\ Id & -\tilde{M} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

Il existe donc une matrice entière K telle que

$$\begin{bmatrix} G & 0 \\ -M & Id \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 0 & \tilde{G} \\ Id & -\tilde{M} \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

les deux matrices étant triangulaires, on en déduit que le déterminant de $\tilde{G}$ divise celui de G. De la symétrie de l'équivalence on déduit la relation réciproque, et le résultat.

6.5 Exercices

Exercice 6.1 Montrer que deux formes observateurs $(P_1, Q_1, Id, 0)$ et $(P_2, Q_2, Id, 0)$ sont équivalentes si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

1. il existe une unimodulaire U de taille adéquate telle que

$$\begin{cases} P_2 = UP_1 \\ Q_2 = UQ_1 \end{cases} \tag{6.17}$$

2. $W_1 = W_2$

On en déduira un résultat analogue sur la les formes contrôleurs.

Exercice 6.2 Soit (P, Q, R, W) une forme opérateur, U et V deux matrices unimodulaires de tailles adéquates. Montrer que (P, Q, R, W) est équivalente à (UPV, UQ, RV, W).

Exercice 6.3 Soit (P, Q, R, W) une forme opérateur, Q_1 et R_1 deux matrices de tailles adéquates; on pose $Q_2 = Q - PQ_1$ et $R_2 = R - R_1P$. Montrer que (P, Q, R, W) est équivalente à $(P, Q_2, R_2, W + R_2Q_1 - R_1Q)$.

Chapitre 7

Réalisation

Nous avons, dans le chapitre 1, présenté la forme d'état comme un cas particulier des formes opérateurs. Bien sûr, toutes les formes opérateurs ne sont pas des formes d'état; par contre on peut se demander sous quelle condition une forme opérateur est *équivalente* à une forme d'état. Dans l'affirmative, on dira qu'une telle forme d'état est une *réalisation* de cette forme opérateur.

On commencera par prouver l'unicité de la réalisation (lorsqu'elle existe) en montrant que deux réalisations équivalentes ne diffèrent que par un changement de base (au sens ordinaire du terme) sur la variable d'état.

Puis on prouvera l'existence, tout au moins l'existence d'une réalisation généralisée. On montrera que cette réalisation est une forme d'état au sens strict du terme si et seulement si le transfert de la forme opérateur est propre.

On pourra donc désormais attacher à toute forme opérateur une unique réalisation. Ce résultat nous sera extrêmement précieux pour étendre, dans le chapitre suivant, un certain nombre de notions, bien connues dans le cas des formes d'état, au cadre plus général des formes opérateurs.

7.1 Définition

Définition 7.1 *Une réalisation (resp. réalisation généralisée) d'une forme opérateur* (P, Q, R, W) *est une forme d'état (resp. forme d'état généralisée) équivalente à* (P, Q, R, W).

Remarque: au vu de cette définition, on peut tout aussi bien parler de réalisations d'un *système*: il s'agit de représentants particuliers (lorsqu'ils existent) de la classe d'équivalence.

De cette définition on déduit immédiatement le théorème suivant:

Théorème 7.1 (Dimension d'état) *Si* $(sId - A, B, C, D(s))$ *est une réalisation généralisée d'une forme opérateur* (P, Q, R, W)*, alors la taille de* A *est égale au degré de* $\det P$*. Cette dimension est dite* dimension d'état *du système.*

Preuve: cela résulte du théorème 6.3 sur les invariants.

Remarque: c'est pourquoi on exige que P ne soit pas de déterminant constant, sans quoi l'existence d'une réalisation serait paradoxale.

7.2 Unicité

Théorème 7.2 *Deux formes d'état généralisées* $(sId - A, B, C, D(s))$ *et* $(sId - \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}(s))$ *sont équivalentes si et seulement si leurs espaces d'état sont statiquement isomorphes, i.e. il existe une matrice constante* P*, carrée, régulière, telle que:*

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= P^{-1}AP && (7.1) \\ B &= P\tilde{B} && (7.2) \\ \tilde{C} &= CP && (7.3) \end{aligned}$$

avec de plus

$$D = \tilde{D} \tag{7.4}$$

En particulier, la réalisation d'une forme opérateur (si elle existe) est unique à un "changement de base près sur l'état"[1].

Preuve:

- condition suffisante: on a équivalence des deux systèmes différentiels suivants

$$\left\{ \begin{aligned} \tfrac{dz}{dt}z - Az &= Bu \\ \tilde{z} &= Pz \\ y &= Cz + D(\tfrac{d}{dt})u \end{aligned} \right\} \tag{7.7}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tfrac{d\tilde{z}}{dt} - P^{-1}AP\tilde{z} &= P^{-1}Bu \\ z &= P^{-1}\tilde{z} \\ y &= CP\tilde{z} + \tilde{D}(\tfrac{d}{dt})u \end{aligned} \right\} \tag{7.8}$$

Si on veut utiliser l'équivalence algébrique, prendre $X = \tilde{M} = P$, $Y = \tilde{V} = 0$.

[1]ce qui signifie: changement de variable linéaire sur X dans le système différentiel suivant:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= AX + Bu && (7.5) \\ y &= CX + D(\frac{d}{dt})u && (7.6) \end{aligned}$$

- Condition nécessaire:

  Commençons par remarquer que A et $\tilde{A}$ sont nécessairement de même taille, puisque leur polynômes caractéristiques sont égaux à une constante près (théorème (6.3)).

  D'autre part, on déduit facilement de l'égalité des transferts (théorème (6.3)) que $D = \tilde{D}$, puisque c'est la partie purement polynômiale de ce dernier[2].

  Nous savons qu'il existe un quadruplet $(M, V, \tilde{M}, \tilde{V})$ tel que les deux systèmes différentiels suivants soient équivalents:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dz}{dt} - Az &=& Bu \\ \tilde{z} &=& M(\frac{d}{dt})z + V(\frac{d}{dt})u \\ y &=& Cz + D(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{7.9}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d\tilde{z}}{dt} - \tilde{A}z &=& \tilde{B}u \\ z &=& \tilde{M}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{V}(\frac{d}{dt})u \\ y &=& \tilde{C}\tilde{z} + \tilde{D}(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{7.10}$$

  Effectuons maintenant la division euclidienne à droite de M par $sId - A$, soit

$$M(s) \equiv Q(s)(sId - A) + P(s) \tag{7.11}$$

  P étant carrée[3] avec $P(s)(sId - A)^{-1}$ strictement propre. Du théorème (4.11) on déduit que P est nécessairement une matrice constante.

  On procède de même avec $\tilde{M}$ et $(sId - \tilde{A})$.

  On a alors équivalence des systèmes différentiels suivants:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dz}{dt}z - Az &=& Bu \\ \tilde{z} &=& Pz + [V + QB](\frac{d}{dt})u \\ y &=& Cz + D(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{7.12}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d\tilde{z}}{dt} - \tilde{A}z &=& \tilde{B}u \\ z &=& \tilde{P}\tilde{z} + [\tilde{V} + \tilde{Q}\tilde{B}](\frac{d}{dt})u \\ y &=& \tilde{C}\tilde{z} + D(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{7.13}$$

  - pour $u = 0$, on a donc équivalence des systèmes différentiels suivants:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dz}{dt}z - Az &=& 0 \\ \tilde{z} &=& Pz \\ y &=& Cz \end{array} \right\} \tag{7.14}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d\tilde{z}}{dt} - \tilde{A}z &=& 0 \\ z &=& \tilde{P}\tilde{z} \\ y &=& \tilde{C}\tilde{z} \end{array} \right\} \tag{7.15}$$

    Puiqu'il s'agit d'une forme d'état, nous savons qu'il existe une solution au premier système pour toute condition initiale z_0. On a donc à l'instant initial, et pour tout vecteur z_0 de $\mathbb{R}^n$:

$$z_0 = \tilde{P}Pz_0 \tag{7.16}$$

$$Cz_0 = \tilde{C}Pz_0 \tag{7.17}$$

[2] $C(sId - A)^{-1}B$ est strictement propre

[3] A et $\tilde{A}$ étant de même taille, z et $\tilde{z}$ sont de même dimension

d'où

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= P^{-1} && (7.18)\\ C &= \tilde{C}P && (7.19) \end{aligned}$$

puisque P et $\tilde{P}$ sont des matrices constantes. D'autre part, on a, pour toute condition initiale z_0

$$\begin{aligned} Az_0 &= \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}\\ &= \tilde{P}\left.\frac{d\tilde{z}}{dt}\right|_{t=0}\\ &= \tilde{P}\tilde{A}\,\tilde{z}|_{t=0}\\ &= \tilde{P}\tilde{A}Pz_0 \end{aligned}$$

d'où

$$A = P^{-1}\tilde{A}P \quad (7.20)$$

– Prenons maintenant u quelconque. Pour toute solution $(z, \tilde{z}, y)$ du système[4], on a

$$\begin{aligned} Bu &= \frac{dz}{dt} - Az && (7.21)\\ &= P^{-1}(\frac{d\tilde{z}}{dt} - A\tilde{z}) + [(sId - A)(\tilde{V} + \tilde{Q}\tilde{B})](\frac{d}{dt})u && (7.22)\\ &= P^{-1}\tilde{B}u + [(sId - A)(\tilde{V} + \tilde{Q}\tilde{B})](\frac{d}{dt})u && (7.23) \end{aligned}$$

Pour tout u on a donc

$$(B - P^{-1}\tilde{B})u = [(sId - A)(\tilde{V} + \tilde{Q}\tilde{B})](\frac{d}{dt})u \quad (7.24)$$

d'où

$$(sId - A)^{-1}(B - P^{-1}\tilde{B}) = \tilde{V} + \tilde{Q}\tilde{B} \quad (7.25)$$

Le membre de gauche etant strictement propre et celui de droite polynômial, on conclut à la nullité, d'où

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= PB && (7.26)\\ \tilde{V} &= -\tilde{Q}\tilde{B} && (7.27) \end{aligned}$$

et le résultat[5].

7.3 Existence

Par une série de résultats préléminaires nous allons nous ramener à la réalisation d'une forme observateur de transfert strictement propre (ou contrôleur par dualité).

Lemme 7.1 (équivalence partielle) Soit (P, Q, R, W) une forme opérateur. On se donne un matrice W_1 de taille adéquate, et on suppose que la forme *observateur* (P, Q, Id, W_1)

[4] il en existe!

[5] on montrerait de même que $V = -QB$

est équivalente à une forme opérateur $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$. Alors (P, Q, R, W) est équivalente à $(\tilde{P}, \tilde{Q}, R\tilde{R}, R(\tilde{W} - W_1) + W)$.

Preuve: on sait qu'il existe un quadruplet $(M, V, \tilde{M}, \tilde{V})$ tel que les deux systèmes différentiels suivant en $(z, \tilde{z}, y)$ soient équivalents:

$$\left\{\begin{array}{rcl} P(\frac{d}{dt})z &=& Q(\frac{d}{dt})u \\ \tilde{z} &=& M(\frac{d}{dt})z + V(\frac{d}{dt})u \\ y &=& z + W_1(\frac{d}{dt})u \end{array}\right\} \tag{7.28}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{P}(\frac{d}{dt})\tilde{z} &=& \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u \\ z &=& \tilde{M}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{V}(\frac{d}{dt})u \\ y &=& \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{W}(\frac{d}{dt})u \end{array}\right\} \tag{7.29}$$

On a en particulier $\det P = \det \tilde{P}$. On a alors équivalence des sytèmes différentiels suivants:

$$\left\{\begin{array}{rcl} P(\frac{d}{dt})z &=& Q(\frac{d}{dt})u \\ \tilde{z} &=& M(\frac{d}{dt})z + V(\frac{d}{dt})u \\ y &=& z + W_1(\frac{d}{dt})u \end{array}\right\} \tag{7.30}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{P}(\frac{d}{dt})\tilde{z} &=& \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u \\ z &=& \tilde{M}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{V}(\frac{d}{dt})u \\ y &=& \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{W}(\frac{d}{dt})u \\ y &=& z + W_1(\frac{d}{dt})u \end{array}\right\} \tag{7.31}$$

Or le second système différentiel est encore équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{P}(\frac{d}{dt})\tilde{z} &=& \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u \\ [\tilde{R} - \tilde{M}](\frac{d}{dt})\tilde{z} + [\tilde{W} - W_1 - \tilde{V}](\frac{d}{dt})u &=& 0 \\ z &=& \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + [\tilde{W} - W_1](\frac{d}{dt})u \\ y &=& z + W_1(\frac{d}{dt})u \end{array}\right\} \tag{7.32}$$

On en déduit, en "oubliant" la définition de y, que les deux systèmes différentiels suivants sont équivalents:

$$\left\{\begin{array}{rcl} P(\frac{d}{dt})z &=& Q(\frac{d}{dt})u \\ \tilde{z} &=& M(\frac{d}{dt})z + V(\frac{d}{dt})u \end{array}\right\} \tag{7.33}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{P}(\frac{d}{dt})\tilde{z} &=& \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u \\ [\tilde{R} - \tilde{M}](\frac{d}{dt})\tilde{z} &=& [-\tilde{W} + W_1 + \tilde{V}](\frac{d}{dt})u \\ z &=& \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + [\tilde{W} - W_1](\frac{d}{dt})u \end{array}\right\} \tag{7.34}$$

- Pour $u = 0$, on a donc équivalence des systèmes différentiels:

$$\left\{\begin{array}{rcl} P(\frac{d}{dt})z &=& 0 \\ \tilde{z} &=& M(\frac{d}{dt})z \end{array}\right\} \tag{7.35}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{P}(\frac{d}{dt})\tilde{z} &=& 0 \\ [\tilde{R} - \tilde{M}](\frac{d}{dt})\tilde{z} &=& 0 \\ z &=& \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} \end{array}\right\} \tag{7.36}$$

Soit G un PGCD carré à droite de P et $[\tilde{R} - \tilde{M}]$. Le deuxième système différentiel est encore équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} G(\frac{d}{dt})\tilde{z} &=& 0 \\ z &=& \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} \end{array}\right\} \tag{7.37}$$

On constate facilement que $\det G = \det P = \det \tilde{P}$. Or G est de même taille que $\tilde{P}$ et G divise $\tilde{P}$ à droite. On en déduit que G est équivalent à $\tilde{P}$ à droite, et donc que $\tilde{P}$ divise $\tilde{R} - \tilde{M}$ à droite, soit $\tilde{R} - \tilde{M} = \tilde{R}_1\tilde{P}$.

- Prenons maintenant u quelconque. Au vu de ce qui précède, on a équivalence entre les deux systèmes différentiels suivants:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(\frac{d}{dt})z & = & Q(\frac{d}{dt})u \\ \tilde{z} & = & M(\frac{d}{dt})z + V(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{7.38}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{P}(\frac{d}{dt})\tilde{z} & = & \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u \\ [\tilde{R}_1\tilde{Q}](\frac{d}{dt})u & = & [-\tilde{W} + W_1 + \tilde{V}](\frac{d}{dt})u \\ z & = & \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + [\tilde{W} - W_1](\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{7.39}$$

Comme il existe une solution $(z, \tilde{z})$ pour tout u, on en déduit que, pour tout u, on a

$$[\tilde{R}_1\tilde{Q}](\frac{d}{dt})u = [-\tilde{W} + W_1 + \tilde{V}](\frac{d}{dt})u \tag{7.40}$$

d'où

$$[\tilde{R}_1\tilde{Q}] = [-\tilde{W} + W_1 + \tilde{V}] \tag{7.41}$$

La deuxième équation du dernier système différentiel est donc superflue. On a donc équivalence des systèmes différentiels:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(\frac{d}{dt})z & = & Q(\frac{d}{dt})u \\ \tilde{z} & = & M(\frac{d}{dt})z + V(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{7.42}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{P}(\frac{d}{dt})\tilde{z} & = & \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u \\ z & = & \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + [\tilde{W} - W_1](\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{7.43}$$

d'où le résultat en ajoutant la "définition" de y: $y = R(\frac{d}{dt})z + W(\frac{d}{dt})u$ dans les deux systèmes, et en remplaçant z par sa valeur dans le deuxième.

Corollaire 7.1 Soit (P, Q, R, W) une forme opérateur. On se donne un matrice W_1 de taille adéquate, et on suppose que la forme *contrôleur* (P, Id, R, W_1) est équivalente à une forme opérateur $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$. Alors (P, Q, R, W) est équivalente à $(\tilde{P}, \tilde{Q}Q, \tilde{R}, (\tilde{W} - W_1)Q + W)$.

Preuve: utiliser le système dual.

Lemme 7.2 (passage au cas strictement propre) Soit $(P, Q, Id, 0)$ une forme observateur. On pose la division à gauche de Q par P, soit

$$Q = PW_1 + Q_1 \tag{7.44}$$

et on suppose que la forme observateur $(P, Q_1, Id, 0)$ est équivalente à une forme opérateur $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$. Alors $(P, Q, Id, 0)$ est équivalente à $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W} + W_1)$.

Preuve: Il existe un quadruplet $(M, V, \tilde{M}, \tilde{V})$ tel que les deux systèmes différentiels suivant en $(z_1, \tilde{z}, y)$ soient équivalents:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(\frac{d}{dt})z_1 & = & Q_1(\frac{d}{dt})u \\ \tilde{z} & = & M(\frac{d}{dt})z_1 + V(\frac{d}{dt})u \\ y & = & z_1 \end{array} \right\} \tag{7.45}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{P}(\frac{d}{dt})\tilde{z} & = & \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u \\ z_1 & = & \tilde{M}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{V}(\frac{d}{dt})u \\ y & = & \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{W}(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{7.46}$$

Posons le changement de variable différentiellement réversible $z = z_1 + W_1(\frac{d}{dt})u$. Le premier système différentiel est alors équivalent à:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(\frac{d}{dt})z & = & Q(\frac{d}{dt})u \\ \tilde{z} & = & M(\frac{d}{dt})z + [V - MW_1](\frac{d}{dt})u \\ y & = & z - W_1(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{7.47}$$

et le second à:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{P}(\frac{d}{dt})\tilde{z} & = & \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u \\ z & = & \tilde{M}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + [\tilde{V} + W_1](\frac{d}{dt})u \\ y & = & \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + \tilde{W}(\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{7.48}$$

On a donc, par changement de sortie, équivalence des deux systèmes différentiels suivants:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P(\frac{d}{dt})z & = & Q(\frac{d}{dt})u \\ \tilde{z} & = & M(\frac{d}{dt})z + [V - MW_1](\frac{d}{dt})u \\ y & = & z \end{array} \right\} \tag{7.49}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{P}(\frac{d}{dt})\tilde{z} & = & \tilde{Q}(\frac{d}{dt})u \\ z & = & \tilde{M}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + [\tilde{V} + W_1](\frac{d}{dt})u \\ y & = & \tilde{R}(\frac{d}{dt})\tilde{z} + [W_1 + \tilde{W}](\frac{d}{dt})u \end{array} \right\} \tag{7.50}$$

d'où le résultat.

Corollaire 7.2 Soit $(P, Id, R, 0)$ une forme contrôleur. On pose la division à droite de R par P, soit

$$R = W_1 P + R_1 \tag{7.51}$$

et on suppose que la forme contrôleur $(P, Id, R_1, 0)$ est équivalente à une forme opérateur $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$. Alors $(P, Id, R, 0)$ est équivalente à $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W} + W_1)$.

Preuve: prendre le système dual.

Nous allons maintenant nous ramener à la réalisation d'une forme observateur (ou contrôleur).

Théorème 7.3 • **(réalisation *via* une forme observateur)**

Soit (P, Q, R, W) une forme opérateur. On pose la division euclidienne à gauche de Q par P, soit $Q = PW_1 + Q_1$.

On suppose que la forme observateur $(P, Q_1, Id, 0)$ admet une réalisation $(sId - A, B, C_0, 0)$[6]*.*

On pose la division à droite de RC_0 par $sId - A$, soit $RC_0 = W_2(sId - A) + C$.

Alors $(sId - A, B, C, RW_1 + W_2 B + W)$ est une réalisation de (P, Q, R, W).

- **(réalisation *via* une forme contrôleur)**

  Soit (P, Q, R, W) une forme opérateur. On pose la division euclidienne à droite de R par P, soit $R = W_1 P + R_1$.

  On suppose que la forme contrôleur $(P, Id, R_1, 0)$ admet une réalisation $(sId - A, B_0, C, 0)$.

  On pose la division à gauche de $B_0 Q$ par $sId - A$, soit $B_0 Q = (sId - A)W_2 + B$.

  Alors $(sId - A, B, C, W_1 Q + CW_2 + W)$ est une réalisation de (P, Q, R, W).

Preuve: on s'intéressera au cas de la forme observateur.

On sait (lemme (7.2)) que $(P, Q, Id, 0)$ est alors équivalente à $(sId - A, B, C_0, W_1)$; du lemme (7.1) on déduit que (P, Q, R, W) est équivalente à $(sId - A, B, RC_0, RW_1 + W)$. On pose alors la division à droite de RC_0 par $sId - A$, soit $RC_0 = W_2(sId - A) + C$; C est une matrice constante, et la "définition" de y suivante:

$$y = R(\frac{d}{dt})C_0\tilde{z} + [RW_1 + W](\frac{d}{dt})u \tag{7.52}$$

[6] le transfert est strictement propre, donc $D = 0$

est, dans la forme d'état, équivalente à la suivante:

$$y = C\tilde{z} + [RW_1 + W_2B + W](\frac{d}{dt})u \tag{7.53}$$

ce qui achève la démonstration.

Il nous reste maintenant à réaliser une forme contrôleur. C'est l'objet du théorème suivant.

Notations: on considère une forme contrôleur $(P, Id, R, 0)$ de transfert strictement propre, P étant de taille $n \times n$. On note U une unimodulaire telle que PU soit colonne propre, Γ_c la matrice par degrés-colonne de PU; on suppose que $(PU)^{-1}$ est strictement propre, c'est-à-dire que tous les degrés colonne de PU strictement positifs. On note D, Ψ, A_0, B_0 les matrices suivantes:

$$\begin{array}{rcl}
D(s) & = & diag_{(i=1\ldots n)}(s^{\partial c_i}) \\
\Psi & = & diag_{(i=1\ldots n)}\Psi_{\partial c_i} \\
\Psi_k(s) & = & \begin{bmatrix} s^{k-1} \\ \vdots \\ s \\ 1 \end{bmatrix} \\
A_0 & = & diag_{(i=1\ldots n)}A_{0,\partial c_i} \\
A_{0,k} & = & \left.\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{k}\right\} k \\
B_0 & = & diag_{(i=1\ldots n)}B_{0,\partial c_i} \\
B_{0,k} & = & \left.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} k
\end{array}$$

On a alors $B_0D(s) = (sId - A_0)\Psi(s)$.

Théorème 7.4 (Réalisation d'une forme contrôleur) *Soit $(P, Id, R, 0)$ une forme contrôleur de transfert strictement propre. On reprend les notations précédentes, en supposant toujours $(PU)^{-1}$ strictement propre. Alors*

- *il existe deux matrices constantes $\bar{P}$ et $\bar{R}$ telles que*
  - $PU = \Gamma_c D + \bar{P}\Psi$
  - $RU = \bar{R}\Psi$
- $(sId - (A_0 - B_0\Gamma_c^{-1}\bar{P}), B_0\Gamma_c^{-1}, \bar{R}, 0)$ *est une réalisation de* $(P, Id, R, 0)$

Preuve:

- on définit $\bar{P}$ de la manière suivante: on remplace dans PU l'élément courant $p_{i,j}(s) = \sum_{k=0}^{k=\partial c_i} \pi_{i,j,k}s^k$ par le vecteur ligne $[\pi_{i,j,\partial c_i - 1}, \ldots, \pi_{i,j,1}, \pi_{i,j,0}]$. Le produit $\bar{P}\Psi$ est alors égal à PU aux termes de degrés-colonne près, que l'on retrouve dans $\Gamma_c D$[7].

  On procède de même pour RU, à ceci près que les puissances associées aux degrés-colonne sont absentes, puisque RP^{-1} est strictement propres.

[7]on a tout simplement utilisé la structure d'espace vectoriel de l'algèbre des polynômes

- – En posant $A = A_0 - B_0\Gamma_c^{-1}\bar{P}$,, $B = B_0\Gamma_c^{-1}$, $C = \bar{R}$, le lecteur vérifie sans peine qu'on a

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Id \\ -R & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sId - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi U^{-1} & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \tag{7.54}$$

  – par des opérations de colonnes évidentes on montre que $sId - A_0$ et B_0 sont premières entre elles à gauche; vu la définition de A et B, on en déduit qu'elle sont également premières à gauche

  – P et Ψ sont premières entre elles à droite car Ψ contient l'identité dans ses lignes.

Corollaire 7.3 (Réalisation d'une forme observateur) on considère une forme observateur $(P, Q, Id, 0)$ de transfert strictement propre, P étant de taille $n \times n$. On note U une unimodulaire telle que UP soit ligne propre, Γ_l la matrice par degrés-ligne de UP; on suppose que $(UP)^{-1}$ est strictement propre, c'est-à-dire que tous ses degrés ligne sont positifs stricts. On note D, Ψ, A_0, B_0 les matrices suivantes:

$$\begin{aligned}
D(s) &= diag_{(i=1\ldots n)}(s^{\partial l_i}) \\
\Psi^T &= diag_{(i=1\ldots n)}\Psi^T_{\partial l_i} \\
\Psi^T_k(s) &= \begin{bmatrix} s^{k-1} & \cdots & s & 1 \end{bmatrix} \\
A_0^T &= diag_{(i=1\ldots n)}A^T_{0,\partial l_i} \\
A^T_{0,k} &= \left.\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{k}\right\} k \\
C_0 &= diag_{(i=1\ldots n)}C_{0,\partial l_i} \\
C_{0,k} &= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{k}
\end{aligned}$$

On a alors $D(s)C_0 = \Psi(s)^T(sId - A_0^T)$. De plus,

- il existe deux matrices constantes $\underline{P}$ et $\underline{R}$ telles que
  – $UP = D\Gamma_l + \Psi^T\underline{P}$
  – $UQ = \Psi^T\underline{Q}$
- $(sId - (A_0^T - \underline{P}\Gamma_l^{-1}C_0), \underline{Q}, \Gamma_l^{-1}C_0, 0)$ est une réalisation de $(P, Q, Id, 0)$

Preuve: utiliser le système dual.
Remarque: on trouvera en exercice des preuves plus "différentielles" de cas deux résultats.
On peut maintenant déduire le résultat dans le cas général. On reprendra les notations précédentes.

Théorème 7.5 *Soit (P, Q, R, W) une forme opérateur.*

- **(réalisation *via* une forme observateur)**
  Soit U une unimodulaire telle que UP soit ligne propre; on suppose cette matrice d'inverse strictement propre. Soit $\underline{P}$ telle que $UP = D\Gamma_l + \Psi^T\underline{P}$. On pose

$$\begin{aligned}
A &= A_0^T - \underline{P}\Gamma_l^{-1}C_0 && (7.55) \\
C_{obs} &= \Gamma_l^{-1}C_0 && (7.56)
\end{aligned}$$

On pose d'autre part les deux divisions euclidiennes suivantes:

$$\begin{aligned} RC_{obs} &= W_2(sId - A) + C & (7.57) \\ Q &= PW_1 + Q_1 & (7.58) \end{aligned}$$

avec

$$UQ_1 = \Psi^T B \tag{7.59}$$

Alors $(sId - A, B, C, RW_1 + W_2B + W)$ est une réalisation de (P, Q, R, W).

- **(réalisation *via* une forme contrôleur)**
  Soit U une unimodulaire telle que PU soit colonne propre; on suppose cette matrice d'inverse strictement propre. Soit $\bar{P}$ telle que $PU = \Gamma_c D + \bar{P}\Psi$. On pose

$$\begin{aligned} A &= A_0 - B_0\Gamma_c^{-1}\bar{P} & (7.60) \\ B_{comm} &= B_0\Gamma_c^{-1} & (7.61) \end{aligned}$$

  On pose d'autre part les deux divisions euclidiennes suivantes:

$$\begin{aligned} B_{comm}Q &= (sId - A)W_2 + B & (7.62) \\ R &= W_1P + R_1 & (7.63) \end{aligned}$$

  avec

$$R_1U = C\Psi \tag{7.64}$$

  Alors $(sId - A, B, C, W_1Q + CW_2 + W)$ est une réalisation de (P, Q, R, W).

Preuve: il suffit de réunir les théorèmes 7.3, 7.4 et le corollaire 7.3.

Remarque: nous ne savons pour l'instant réaliser que les formes opérateurs où l'on peut ramener P par des opérations de colonnes à une dynamique colonne propre *où les degrés de colonne sont positifs stricts*, ou lorsqu'on peut se ramener au cas analogue en ce qui concerne les lignes. Heureusement, c'est en général, mais pas nécessairement *toujours*, le cas. L'objet du théorème suivant est de montrer qu'il existe toujours une forme opérateur équivalente vérifiant l'une de ces hypothèses; en fait, elle vérifie les deux à la fois.

Théorème 7.6 *Soit (P, Q, R, W) une forme opérateur; on se donne deux matrices unimodulaires U et V telles que UPV soit une la forme de Smith de P*[8]*. On pose la division euclidienne à droite de RV par S:*

$$RV = YS - \tilde{R} \tag{7.65}$$

On pose la division euclidienne à gauche de UQ par S:

$$UQ = SX + \tilde{Q} \tag{7.66}$$

Alors, si p est la taille de P, il existe un entier n positif strict inférieur à p tel que

- *S est de la forme*

$$S = \begin{bmatrix} Id_{p-n} & 0 \\ 0 & \tilde{S} \end{bmatrix} \tag{7.67}$$

  $\tilde{S}$ étant de taille n, ligne propre, colonne propre, de degrés colonne et degrés ligne positifs stricts

[8]par "la forme de Smith" on entend la forme de Smith où tous les polynômes non nuls ont leur terme de plus haut degré égal à 1

- *$\tilde{R}$ est de la forme*
$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \end{bmatrix} \tag{7.68}$$
- *$\tilde{Q}$ est de la forme*
$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 \end{bmatrix} \tag{7.69}$$
- *$R_1\tilde{S}^{-1}$ et $\tilde{S}^{-1}Q_1$ sont strictement propres*
- *(P, Q, R, W) est équivalente à $(\tilde{S}, Q_1, R_1, YUQ - RVX + YSX + W)$, qui admet une réalisation*

Preuve:

- la forme de $\tilde{S}$ tient à la définition générale des formes de Smith, et au fait que le déterminant de P, et donc celui de S, est non constant.
- les formes de $\tilde{R}$ et $\tilde{Q}$ proviennent du fait que $\tilde{R}S^{-1}$ et $S^{-1}\tilde{Q}$ sont strictement propres, et de la forme de S.
- $R_1\tilde{S}^{-1}$ et $\tilde{S}^{-1}Q_1$ sont strictement propres parce que $\tilde{R}S^{-1}$ et $S^{-1}\tilde{Q}$ le sont.
- commençons par montrer que (P, Q, R, W) est équivalente à $(S, \tilde{Q}, \tilde{R}, YUQ - RVX + YSX + W)$. En effet, on a
  -
$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} U & 0 \\ YU & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q \\ -R & W \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S & \tilde{Q} \\ -\tilde{R} & YUQ - RVX + YSX + W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{-1} & X \\ 0 & Id \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.70}$$
  - U et S sont premières entre elles à gauche
  - P et V^{-1} sont premières entre elles à droite

  La forme de S, $\tilde{R}$ et $\tilde{Q}$ nous suggère de décomposer l'état partiel z en z_1 et z_2, suivant les $p - n$ premières composantes et les n suivantes.
  Les équations du système s'écrivent alors:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 & = & 0 \\ \tilde{S}(\frac{d}{dt})z_2 & = & Q_1(\frac{d}{dt})u \\ y & = & R_1(\frac{d}{dt})z_2 + [YUQ - RVX + YSX + W](\frac{d}{dt})u \end{array} \right. \tag{7.71}$$
  Il est alors à peu près évident que l'on peut obtenir une forme opérateur équivalente en "oubliant" de mentionner z_1, et que cette forme opérateur est réalisable d'après le théorème précédent, ce qui prouve le résultat.

Corollaire 7.4 Toute forme opérateur admet une réalisation.
Remarque importante: ce corollaire nous permet d'utiliser les algorithmes standards de résolution d'équations différentielles du premier ordre pour simuler le comportement d'un système.

7.4 Exercices

Exercice 7.1 Nous allons refaire la preuve de la partie nécessaire du théorème (7.2) en utilisant la définition algébrique de l'équivalence.

1. On pose la division euclidienne à gauche de X par $sId - A$, soit

$$X(s) \equiv (sId - A)Q(s) + P(s) \tag{7.72}$$

   Montrer que P est carrée et constante.

2. Monter que $[\tilde{M}(s) - Q(s)(sId - \tilde{A})](sId - \tilde{A})^{-1}$ est strictement propre; en déduire que $\tilde{M}(s) - Q(s)(sId - \tilde{A})$ est un matrice constante, qu'on notera $\tilde{P}$.

3. Montrer que $(sId - A)\tilde{P} \equiv P(sId - \tilde{A})$. En déduire que

$$\begin{aligned} P &= \tilde{P} \\ AP &= P\tilde{A} \end{aligned}$$

4. Montrer que $Q(s)\tilde{B} + \tilde{V}(s) \equiv (sId - A)^{-1}(B - P\tilde{B})$; en déduire que $B = P\tilde{B}$.

5. Montrer que $Y(s) + CQ(s) \equiv (\tilde{C} - CP)(sId - \tilde{A})^{-1}$; en déduire que $\tilde{C} = CP$.

6. Montrer que $(sId - A)$ et P sont premières entre elles à gauche. En substituant à s une valeur propre de A, en déduire que P est de rang plein.

Exercice 7.2 Montrer directement le corollaire (7.1) en substituant à u dans la forme contrôleur l'entrée $Q(\frac{d}{dt})u$[9].

Exercice 7.3 Montrer directement le corollaire (7.2) en effectuant un changement de sortie.

Exercice 7.4 (Preuve "différentielle" du théorème (7.4)) On reprend les notations utilisées dans l'énoncé et la preuve de ce théorème. On notera C_1 la matrice définie par

$$\begin{aligned} C_1 &= diag_{(i=1\ldots n)} C_{1,\partial c_i} \\ C_{1,k} &= \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{k} \end{aligned}$$

1. montrer que le système différentiel

$$\left\{ \begin{aligned} P(\tfrac{d}{dt})z &= u \\ y &= R(\tfrac{d}{dt})z \\ x &= \Psi U^{-1}(\tfrac{d}{dt})z \end{aligned} \right\} \tag{7.73}$$

   implique le suivant:

$$\left\{ \begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} - Ax &= Bu \\ y &= Cx \\ z &= U(\tfrac{d}{dt})C_1 x \end{aligned} \right\} \tag{7.74}$$

2. soit x solution de $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$. Montrer[10] qu'alors $\Psi(\frac{d}{dt})C_1 x = x$.

3. en déduire l'implication réciproque sur les systèmes différentiels précédents.

[9]on aurait pu commencer par traiter le cas de la forme contrôleur, puis en déduire celui de la forme observateur par dualité; nous avons préférer offrir les deux approches, l'étude directe de la forme observateur n'étant pas sans intérêt

[10]ceci est en fait indépendant de P

Exercice 7.5 (Preuve "différentielle" du corollaire (7.3)) La démonstration est un peu plus ardue que dans l'exercice précédent; en effet, il va nous falloir construire un observateur "à la main".

1. à k on associe T_k la matrice de Tœplitz suivante:

$$T_k(s) = \left.\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ s & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s^{k-1} & & \ddots & \ddots & 0 \\ s^k & s^{k-1} & \cdots & s & 1 \end{bmatrix}}^{k+1}\right\} k+1 \tag{7.75}$$

   Montrer par récurrence sur k que

$$T_k \begin{bmatrix} C_{0,k} \\ A_{0,k}^T - sId \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.76}$$

2. à k on associe X_k et Y_k de la manière suivante:

$$\begin{aligned} -X_k(s) &= \left.\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & & \vdots \\ s & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ s^{k-3} & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s^{k-2} & s^{k-3} & \cdots & s & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{k}\right\} k \\ Y_k(s) &= \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{k-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

   Déduire de la question précédente que $X_k(sId - A_{0,k}) + Y_k C_{0,k} = Id$.
   En posant

$$\begin{aligned} X &= diag_{(i=1\ldots n)} X_{\partial l_i} \\ Y &= diag_{(i=1\ldots n)} Y_{\partial l_i} \end{aligned}$$

   montrer que $X(sId - A_0) + YC_0 = Id$.

3. montrer que le système différentiel

$$\left\{ \begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} - Ax &= Bu \\ z &= Cx \\ y &= Cx \end{aligned} \right\} \tag{7.77}$$

   implique le suivant:

$$\left\{ \begin{aligned} P(\tfrac{d}{dt})z &= Q(\tfrac{d}{dt})u \\ x &= X(\tfrac{d}{dt})Bu + [Y\Gamma_l - X\underline{P}](\tfrac{d}{dt})z \\ y &= z \end{aligned} \right\} \tag{7.78}$$

4. on définit C_1 comme dans l'exercice précédent, à ceci près qu'on remplace les degrés-colonne par des degrés-ligne. Montrer les identités suivantes

$$\begin{aligned} C_1[Id - (sId - A_0)X] &= \Psi^T \\ C_1(sId - A_0)Y &= D \end{aligned}$$

5. en déduire l'implication réciproque sur les systèmes différentiels précédents.

Exercice 7.6 Réaliser une forme observateur ou contrôleur de transfert strictement propre dans le cas monovariable (une entrée, une sortie).

Chapitre 8

Commandabilité, observabilité et stabilité des formes opérateurs

Le but de ce chapitre est d'étendre aux formes opérateurs un certain nombre de définitions et de résultats concernant les formes d'état.

Nous commencerons par quelques rappels sur la commandabilité, l'observabilité et la stabilité Entrée Bornée-Sortie Bornée (EBSB) des formes d'état.

Nous venons de voir dans le chapitre précedent que toute forme opérateur admet une unique réalisation généralisée. L'extension des notions précédentes aux formes opérateurs quelconques ne posera donc aucune difficulté: il suffira de se ramener au cas de la forme d'état.

On verra ensuite que les invariants mis en évidence dans le chapitre 6 permettent, dans le cas de la forme d'état, de mener à bien l'étude de la commandabilité, de l'observabilité et de la stabilité. Les mêmes quantités, dans le cas d'une forme opérateur générale, permettront donc d'obtenir les mêmes résultats.

On terminera en étudiant les réalisations d'un *transfert*, c'est-à-dire l'ensemble de formes d'état de transfert donné. On montrera qu'une réalisation d'un transfert est de dimension minimale si et seulement si elle est complètement commandable et complètement observable, et on montrera que les pôles du transfert sont les valeurs propres des réalisations minimales, ce qui permettra de caractériser la stabilité d'une forme opérateur à l'aide de ses polynômes non commandable, non observable, et des pôles de son transfert.

8.1 Rappels sur la forme d'état

8.1.1 Définitions

Définition 8.1 (Commandabilité) *Une forme d'état* $(sId - F, G, H, K)$ *de dimension* p *est dite complètement commandable*[1] *à l'instant* t_1*, depuis l'état* X_0 *à l'instant* t_0*, si l'application*

$$\begin{array}{rrcl} \Gamma : & L^1[t_0, t_1] & \longrightarrow & \mathbf{R}^p \\ & U & \longmapsto & X(t_1) \end{array} \tag{8.1}$$

est surjective, X *étant la solution sur* $[t_0, t_1]$ *de*

$$\frac{dX}{dt} = FX + GU, \qquad X(t_0) = X_0 \tag{8.2}$$

On appelle espace accessible *l'image de* Γ*.*

Définition 8.2 (Observabilité) *Une forme d'état* $(sId - F, G, H, K)$ *de dimension* p *est dite complètement observable à l'instant* t_1*, pour l'entrée* U *depuis l'instant* t_0*, si l'application*

$$\begin{array}{rrcl} \Omega : & \mathbf{R}^p & \longrightarrow & L^1[t_0, t_1] \\ & X_0 & \longmapsto & Y \end{array} \tag{8.3}$$

est injective, X *étant la solution sur* $[t_0, t_1]$ *de*

$$\frac{dX}{dt} = FX + GU, \qquad X(t_0) = X_0 \tag{8.4}$$

et Y *étant la sortie déterminée par*

$$Y = HX + KU \tag{8.5}$$

On appelle espace non obervable le noyau de Ω*.*

Remarque: si l'on s'abstrait de la mention de X_0 dans la définition de la commandabilité, on voit que les notions de commandabilité et d'observabilité sont invariantes par changement de base sur l'état; nous allons d'ailleurs voir à l'occasion du prochain théorème que X_0 n'intervient pas dans la question de la commandabilité.

8.1.2 Critères d'observabilité, de commandabilité

Théorème 8.1 (Critère de Kalman) *Une forme d'état* $(sId - F, G, H, K)$ *de dimension* p *est complètement commandable si et seulement si la matrice suivante, dite matrice de commandabilité, est de rang plein:*

$$\mathcal{C}_{F,G} = \left[\begin{array}{cccc} G & FG & \cdots & F^{p-1}G \end{array} \right] \tag{8.6}$$

plus précisément, on $(\mathrm{Im}\Gamma)^{\perp} = (\mathrm{Im}\mathcal{C}_{F,G})^{\perp}$*. En particulier la commandabilité de la forme d'état est indépendante de* t_0*,* t_1*,* U*,* H*,* K*, et ne dépend que de la paire* (F, G)*. On dira que la paire* (F, G) *est complètement commandable.*

[1] en fait il s'agit d'accessibilité, la différence n'étant perceptible que sur les systèmes instationnaires, ou en temps discret lorsque la dynamique est dégénérée

Elle est complètement observable si et seulement si la matrice suivante, dite matrice d'observabilité, est de rang plein:

$$\mathcal{O}_{H,F} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{p-1} \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

plus précisément, on a $\ker \Omega = \ker \mathcal{O}_{H,F}$*. En particulier l'observabilité de la forme d'état est indépendante de* t_0*,* t_1*,* X_0*,* G*,* K*, et ne dépend que de la paire* (H, F)*. On dira que la paire* (H, F) *est complètement observable.*

Preuve: la stationnarité du système montre à l'évidence que les deux conditions ne dépendent (en temps) que de $t_1 - t_0$; par changement d'échelle de temps on évacue la dépendance en cette dernière quantité. D'autre part, le couple (X, Y) est fonction linéaire du couple (X_0, U). Pour la commandabilité, on peut donc se ramener à $X_0 = 0$; pour l'observabilité, à $U = 0$. Passons maintenant au détail de la preuve:

- commandabilité: notons Γ l'application qui à U défini sur $[0, 1]$ associe $X(1)$ avec $X(0) = 0$. Alors

$$Z \in (\mathrm{Im}\Gamma)^{\perp} \iff \int_0^1 Z^T e^{-Fs} G U(s)\, ds = 0 \quad \forall\, U \in L^1 \tag{8.8}$$

$$\iff Z^T e^{-Fs} G \equiv 0 \tag{8.9}$$

car la dernière fonction est continue. En dérivant successivement cette dernière en $s = 1$, on montre que nécessairement $Z^T \mathcal{C}_{F,G} = 0$. Réciproquement, si $Z^T \mathcal{C}_{F,G} = 0$, le théorème de Cayley-Hamilton nous permet d'affirmer que

$$Z^T F^k G = 0 \quad \forall k \geq 0 \tag{8.10}$$

d'où

$$Z^T \sum_{i=0}^{i=k} \frac{F^i (-s)^i}{i!} G = 0 \quad \forall k\ \forall s \geq 0 \tag{8.11}$$

et le résultat en passant à la limite.

- observabilité: notons Ω l'application qui à X_0 associe la fonction de sortie sur [0,1] lorsque $U = 0$. Alors

$$Z \in \ker \Omega \iff H e^{Ft} Z \qquad \forall t \in [0, 1] \tag{8.12}$$

Un raisonnement similaire au précédent nous permet de conclure.

Corollaire 8.1 La paire (F, G) est complètement commandable si et seulement si la paire (G^T, F^T) est complètement observable.

Théorème 8.2 (deuxième critère d'observabilité, de commandabilité)

- *la paire* (H, F) *est complètement observable si et seulement si la matrice* $\begin{bmatrix} sId - F \\ H \end{bmatrix}$ *est de rang plein pour tout complexe* s
- *la paire* (F, G) *est complètement commandable si et seulement si la matrice* $\begin{bmatrix} sId - F & G \end{bmatrix}$ *est de rang plein pour tout complexe* s

Preuve: on s'intéressera à l'observabilité, la commandabilité s'en déduisant par transposition.

- condition nécessaire: si s fait chuter le rang de $\begin{bmatrix} sId - F \\ H \end{bmatrix}$, s est valeur propre de F et il existe alors un vecteur propre Z associé qui soit dans le noyau de H; on en déduit immédiatement que $\mathcal{O}Z = 0$
- condition suffisante: il suffit de remarque que $\ker \mathcal{O}$ est contenu dans $\ker H$, d'une part, et que d'autre part $\ker \mathcal{O}$ est stable par A; s'il n'est pas reduit à 0, il contient alors un vecteur propre de F, qui est alors dans le noyau de H.

Corollaire 8.2

- la paire (H, F) est complètement observable si et seulement si $sId - F$ et H sont premières entre elles à droite
- la paire (F, G) est complètement commandable si et seulement si $sId - F$ et G sont premières entre elles à gauche

Preuve: cela résulte immédiatement du théorème précédent et du corollaire 3.3.

8.1.3 Décomposition de l'espace d'état

Théorème 8.3 *On décompose l'espace d'état de la manière suivante:*

$$\mathbf{R}^p = \mathrm{Im}\mathcal{C} \cap (\ker \mathcal{O})^\perp \oplus (\mathrm{Im}\mathcal{C})^\perp \cap (\ker \mathcal{O})^\perp \oplus \mathrm{Im}\mathcal{C} \cap \ker \mathcal{O} \oplus (\mathrm{Im}\mathcal{C})^\perp \cap \ker \mathcal{O} \tag{8.13}$$

Ces sous-espaces sont appelés respectivement espace commandable et observable, espace observable non commandable, espace commandable non observable et espace non commandable non observable. Alors, dans une base[2] *adaptée à cette décomposition, les matrices (F, G, H) ont la forme suivante:*

$$F = \begin{bmatrix} F_{\mathcal{CO}} & F_{\mathcal{O}_1} & 0 & 0 \\ 0 & F_{\mathcal{O}_2} & 0 & 0 \\ F_{\mathcal{C}_1} & \tilde{F}_1 & F_{\mathcal{C}_2} & \tilde{F}_2 \\ 0 & \tilde{F}_3 & 0 & \tilde{F}_4 \end{bmatrix} \tag{8.14}$$

$$G = \begin{bmatrix} G_{\mathcal{CO}} \\ 0 \\ G_{\mathcal{C}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{\mathcal{CO}} & H_{\mathcal{O}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.16}$$

On pose

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{O}} &= \begin{bmatrix} F_{\mathcal{CO}} & F_{\mathcal{O}_1} \\ 0 & F_{\mathcal{O}_2} \end{bmatrix}, & H_{\mathcal{O}} &= \begin{bmatrix} H_{\mathcal{CO}} & H_{\mathcal{O}} \end{bmatrix} \\ F_{\mathcal{C}} &= \begin{bmatrix} F_{\mathcal{CO}} & 0 \\ F_{\mathcal{C}_1} & F_{\mathcal{C}_2} \end{bmatrix}, & G_{\mathcal{C}} &= \begin{bmatrix} G_{\mathcal{CO}} \\ G_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8.17}$$

alors

- *la paire $(H_{\mathcal{O}}, F_{\mathcal{O}})$ est complètement observable*
- *la paire $(F_{\mathcal{C}}, G_{\mathcal{C}})$ est complètement commandable*

[2] cf la note en bas du théorème 7.2 pour préciser la notion de changement de base

- *la paire $(H_{\mathcal{CO}}, F_{\mathcal{CO}})$ est complètement observable et la paire $(F_{\mathcal{CO}}, G_{\mathcal{CO}})$ est complètement commandable*

En notant $I_{\mathcal{C}}$ le plongement canonique de $\mathrm{Im}\mathcal{C}$ *dans* $\mathbb{R}^p$ *et* $\Pi_{\mathcal{O}}$ *la projection orthogonale de* $\mathbb{R}^p$ *sur* $(\ker \mathcal{O})^\perp$*, l'état et la sortie s'expriment de la manière suivante:*

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{Ft}X_0 + I_{\mathcal{C}}\int_0^t e^{F_{\mathcal{C}}(t-s)}G_{\mathcal{C}}U(s)\,ds & (8.18)\\ Y(t) &= H_{\mathcal{O}}e^{F_{\mathcal{O}}t}\Pi_{\mathcal{O}}X_0 + H_{\mathcal{CO}}\int_0^t e^{F_{\mathcal{CO}}(t-s)}G_{\mathcal{CO}}U(s)\,ds & (8.19)\end{aligned}$$

Preuve:

- la forme de F résulte de l'invariance de $\ker\mathcal{O}$ et de $\mathrm{Im}\mathcal{C}$ par la dynamique
- la forme de G résulte de $\mathrm{Im}G \subset \mathrm{Im}\mathcal{C}$
- la forme de H résulte de $\ker H \subset \ker\mathcal{O}$
- on a

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{H,F} &= \left[\begin{array}{cc} \mathcal{O}_{H_{\mathcal{O}},F_{\mathcal{O}}} & 0 \end{array}\right] & (8.20)\\ \mathcal{O}_{H_{\mathcal{O}},F_{\mathcal{O}}} &= \left[\begin{array}{cc} \mathcal{O}_{H_{\mathcal{CO}},F_{\mathcal{CO}}} & \text{autres colonnes} \end{array}\right] & (8.21)\end{aligned}$$

  d'où les résultats d'observabilité
- pour rendre lisible les résultats de commandabilité, on utilisera la matrice suivante:

$$\Pi = \begin{bmatrix} Id & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Id & 0\\ 0 & Id & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Id \end{bmatrix} \tag{8.22}$$

  qui permute deuxième et troisième blocs ligne dans F, G et $\mathcal{C}$. On a alors

$$\begin{aligned} \Pi\mathcal{C}_{F,G} &= \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{F_{\mathcal{C}},G_{\mathcal{C}}}\\ 0 \end{bmatrix} & (8.23)\\ \mathcal{C}_{F_{\mathcal{C}},G_{\mathcal{C}}} &= \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{F_{\mathcal{CO}},G_{\mathcal{CO}}}\\ \text{autres lignes} \end{bmatrix} & (8.24)\end{aligned}$$

  d'où les résultats de commandabilité
- la preuve des deux dernières expressions est laissée au lecteur.

Remarque: une fois les matrices F, G et H données, la décomposition ci-dessus est unique. Nous verrons un peu plus loin (théorème 8.6 et suite) que les polynômes caractéristiques des matrices $F_{\mathcal{CO}}$, $F_{\mathcal{O}_2}$, $F_{\mathcal{C}_2}$ et $\tilde{F}_4$ sont non seulement invariants par changement de base d'état, mais ne dépendent en fait que du système réprésenté par cette forme d'état.

Corollaire 8.3 on a

$$\det(sId - F) = \det(sId - F_{\mathcal{CO}})\det(sId - F_{\mathcal{O}_2})\det(sId - F_{\mathcal{C}_2})\det(sId - \tilde{F}_4) \tag{8.25}$$

8.1.4 Stabilité d'une forme d'état

Définition 8.3 (stabilité) *on rappelle qu'une matrice carrée F est dite exponentiellement stable si toutes ses valeurs propres sont à partie réelle négative stricte; c'est équivalent à dire que e^{Ft} tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, la convergence étant d'ailleurs exponentielle; F est dite stable si toutes ses valeurs propres sont à partie réelle négative, les valeurs propres imaginaires pures ayant un bloc de Jordan de taille 1; c'est équivalent à dire que e^{Ft} est borné quand t tend vers $+\infty$.*

Remarques:

- cette définition est invariante par changement de base[3].
- dire qu'une dynamique est exponentiellement stable, c'est dire que les erreurs sur la condition initiale se corrigent "bien" avec le temps. Cela signifie que les erreurs numériques (par exemple les erreurs d'arrondi) commises au cours d'une simulation se corrigeront "bien". Autrement dit, on est prié de bien réfléchir avant de simuler un système (différentiel ou au sens de la théorie des systèmes) instable.

Par abus de langage, on dira qu'un polynôme est exponentiellement stable si toutes ses racines sont à partie réelle négative stricte; ainsi, une matrice carrée est exponentiellement stable si et seulement si son polynôme caractéristique l'est.

Théorème 8.4 (Stabilité EBSB) *Soit $(sId-F, G, H, 0)$ une forme d'état complètement commandable et complètement observable. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) pour la condition initiale nulle, la sortie est bornée sur $[0,+\infty]$ pour toute entrée bornée[4]

(ii) pour toute condition initiale, la sortie est bornée sur $[0,+\infty]$ pour toute entrée bornée

(iii) la matrice F est exponentiellement stable

Preuve: on a visiblement (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). Il nous reste à montrer que (i) $\Rightarrow$ (iii).

- les valeurs propres de F doivent être à partie réelle négative ou nulle:
  si ce n'est pas le cas, on considère une valeur propre λ telle que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, et Z un vecteur propre associé. Le système étant complètement commandable, on peut faire atteindre Z par l'état X en temps fini par une entrée bornée[5]. Puis on prend une entrée nulle. Soit t_1 l'instant où X atteint Z; pour $t \geq t_1$ on a

$$\begin{aligned} Y(t) &= He^{F(t-t_1)}Z \quad (8.26) \\ &= e^{\lambda(t-t_1)}HZ \quad (8.27) \end{aligned}$$

  or HZ ne peut être nul, sans quoi on aurait $(\lambda Id - F)Z = 0$ et $HZ = 0$, ce qui serait contradictoire avec l'observabilité. Y n'est donc pas borné pour les instants positifs, ce qui prouve la contradiction.

- si F a des valeurs propres imaginaires pures, leur bloc de Jordan doit être de taille 1 (en d'autre termes, F doit être stable):
  raisonnons encore par l'absurde en supposant l'existence d'une valeur propre $i\omega$ imaginaire pure; on note E_ω l'espace propre associé, et par un changement de base on se se ramène au cas où F est sous forme de Jordan. De même que précédemment, on peut atteindre

[3] i.e., si on transforme F en $P^{-1}FP$, avec P constante inversible
[4] on fait appel ici à la description différentielle de la forme d'état
[5] reprendre la preuve du critère de Kalman en remplaçant L^1 par L^∞

n'importe quel vecteur Z de E_ω en temps fini; en prenant ensuite une entrée nulle on a, pour $t \geq t_1$:

$$\begin{aligned}
Y(t) &= He^{F(t-t_1)}Z && (8.28)\\
&= e^{i\omega(t-t_1)}H_\omega \begin{bmatrix} 1 & (t-t_1) & \frac{(t-t_1)^2}{2} & \cdots & \frac{(t-t_1)^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{(t-t_1)^2}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (t-t_1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} Z_\omega && (8.29)
\end{aligned}$$

où H_ω (resp. Z_ω) est la restriction de H (resp. Z) à E_ω, et où k est la taille du bloc de Jordan. Notons que la première colonne de H_ω ne peut être nulle sans quoi $\begin{bmatrix} i\omega Id - F \\ H \end{bmatrix}$ ne serait pas de rang plein. Prenons par exemple Z_ω avec sa deuxième coordonnée égale à 1 et les autres nulles. Il est alors facile de voir qu'il existe au moins une sortie dont le terme dominant pour t voisin de $+\infty$ soit de la forme (constante non nulle)$te^{i\omega t}$, ce qui prouve la contradiction.

- supposons qu'il existe une valeur propre imaginaire pure $i\omega$; nous venons de voir que son bloc de Jordan doit être de taille 1; autrement dit, dans une base adaptée, F s'écrit:

$$M = \begin{bmatrix} i\omega Id & 0 \\ 0 & F_1 \end{bmatrix} \tag{8.30}$$

aucune valeur propre de F_1 ne valant $i\omega$. Nous allons exhiber une sortie non bornée en faisant entrer le système en résonnance. En partitionnant G en $\begin{bmatrix} G_\omega \\ G_{\bar\omega} \end{bmatrix}$ et H en $\begin{bmatrix} H_\omega & H_{\bar\omega} \end{bmatrix}$, on remarque que nécessairement G_ω doit être surjective et H_ω doit être injective.
Considérons maintenant un vecteur V de $\mathbf{R}^q$ tel que $H_\omega G_\omega V$ soit non nul (il existe de tels vecteurs) et utilisons l'entrée

$$U(t) = Ve^{i\omega t} \tag{8.31}$$

Alors

$$\begin{aligned}
Y(t) &= H[\int_0^t e^{F(t-s)}e^{i\omega s}\,ds]GV && (8.32)\\
&= \begin{bmatrix} H_\omega & H_{\bar\omega} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{F_1 t}e^{(i\omega Id - F_1)s} \end{bmatrix} ds \begin{bmatrix} G_\omega \\ G_{\bar\omega} \end{bmatrix} V && (8.33)\\
&= \begin{bmatrix} H_\omega & H_{\bar\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{i\omega t} & 0 \\ 0 & (i\omega Id - F_1)^{-1}(e^{i\omega t}Id - e^{F_1 t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_\omega \\ G_{\bar\omega} \end{bmatrix} V && (8.34)\\
&= te^{i\omega t}H_\omega G_\omega V + H_{\bar\omega}(i\omega Id - F_1)^{-1}(e^{i\omega t}Id - e^{F_1 t})G_{\bar\omega}V && (8.35)\\
&= te^{i\omega t}H_\omega G_\omega V + \text{termes bornés} && (8.36)
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la sortie n'est pas bornée, puique $H_\omega G_\omega V$ est non nul.

Théorème 8.5 (stabilité EBSB générale) *On se donne une décomposition de l'espace d'état comme dans le théorème 8.3. Alors*

- *l'état est borné*[6] *pour toute entrée bornée et toute condition initiale si et seulement F est exponentiellement stable*
- *toute variation bornée des entrées induit une variation bornée de l'état si et seulement si $F_{\mathcal{C}}$ est exponentiellement stable*
- *la sortie est bornée pour toute entrée bornée et toute condition initiale si et seulement $F_{\mathcal{O}}$ est stable et $F_{\mathcal{CO}}$ est exponentiellement stable*
- *toute variation bornée des entrées induit une variation bornée de la sortie si et seulement si $F_{\mathcal{CO}}$ est exponentiellement stable*

Preuve: les conditions suffisantes sont triviales. Les conditions sur les écarts d'entrée résultent du théorème précédent[7]. Les critères à condition initiale variable résultent de l'étude du cas où $U \equiv 0$ et des critères précédents.

Remarque: ce qui nous préoccupe apparemment, c'est la bornitude des sorties relativement aux conditions initiales et aux entrées bornées. En fait, il est indispensable que la dynamique F dans son entier soit exponentiellement stable; en effet, c'est une condition nécessaire et suffisante pour que les résultats de bornitude précédents se conservent si on fait de "petites" erreurs sur le modèle (ces erreurs peuvent être linéaires ou non linéaires)[8]. Or, nous verrons que seules les valeurs propres de $F_{\mathcal{CO}}$ sont susceptibles d'être modifiées par bouclage; il est donc souhaitable que les valeurs propres non commandables et/ou non observables soient exponentiellement stables (on dit que la forme d'état est stabilisable et/ou détectable[9]).

8.1.5 Calcul des valeurs propres non commandables, non observables

Définition 8.4 *On se donne une décomposition de l'espace d'état comme dans le théorème 8.3. Cette décomposition étant donnée, on appelle*

- polynôme non commandable *le polynôme caractéristique de la restriction de la dynamique à $(\mathrm{Im}\mathcal{C})^\perp$, soit* $\det(sId - F_{\mathcal{O}_2})\det(sId - \tilde{F}_4)$*; on appelle* valeurs propres non commandables *l'ensemble des zéros (avec leur ordre de multiplicité) de ce polynôme caractéristique*
- polynôme non observable *le polynôme caractéristique de la restriction de la dynamique à $\ker \mathcal{O}$, soit* $\det(sId - F_{\mathcal{C}_2})\det(sId - \tilde{F}_4)$*; on appelle* valeurs propres non observables *l'ensemble des zéros (avec leur ordre de multiplicité) de ce polynôme caractéristique*

Théorème 8.6 (calcul des valeurs propres non commandables et non observables)

- *les valeurs propres non commandables de F sont les valeurs de s qui font chuter le rang de $\begin{bmatrix} sId - F & G \end{bmatrix}$; plus précisément, si R est un PGCD carré à gauche de $sId - F$ et G, le polynôme non commandable et* $\det R$ *sont égaux à une constante près*
- *les valeurs propres non observables de F sont les valeurs de s qui font chuter le rang de $\begin{bmatrix} sId - F \\ H \end{bmatrix}$; plus précisément, si R est un PGCD carré à droite de $sId - F$ et H, le polynôme non observable et* $\det R$ *sont égaux à une constante près*

[6] i.e., $X(t)$ est borné lorsque t tend vers $+\infty$; remarquons que cette notion est invariante par changement de base d'état

[7] la paire $(Id, F_{\mathcal{C}})$ est complètement observable!

[8] pour s'en convaincre, on peut remarquer que tout voisinage du triplet (F, G, H) contient des formes d'état commandables et observables; or, pour ces formes d'état, la stabilité EBSB fait intervenir *toutes* les valeurs propres.

[9] on dira également que le système est stabilisable lorsqu'il est *a fortiori* commandable; de même, on dira également qu'il est détectable lorsqu'il est observable

Preuve: on s'intéressera à l'observabilité, le reste en découlant par transposition.
Plaçons nous dans la base définie dans le théorème 8.3[10]. En posant

$$F_{\bar{\mathcal{O}}} = \begin{bmatrix} F_{\mathcal{C}_2} & \tilde{F}_2 \\ 0 & \tilde{F}_4 \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} F_{\mathcal{C}_1} & \tilde{F}_1 \\ 0 & \tilde{F}_3 \end{bmatrix} \tag{8.37}$$

on a, dans cette base,

$$F = \begin{bmatrix} F_{\mathcal{O}} & 0 \\ \bar{F} & F_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix} \quad , \quad H = \begin{bmatrix} H_{\mathcal{O}} & 0 \end{bmatrix} \tag{8.38}$$

D'après le théorème 8.3 et le corollaire 8.2, $\begin{bmatrix} sId - F_{\mathcal{O}} \\ H_{\mathcal{O}} \end{bmatrix}$ est ligne équivalente à $\begin{bmatrix} Id \\ 0 \end{bmatrix}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} sId - F \\ H \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} sId - F_{\mathcal{O}} & 0 \\ -\bar{F} & sId - F_{\bar{\mathcal{O}}} \\ H_{\mathcal{O}} & 0 \end{bmatrix} && (8.39) \\ &\underset{\text{ligne}}{\sim} \begin{bmatrix} Id & 0 \\ -\bar{F} & sId - F_{\bar{\mathcal{O}}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} && (8.40) \\ &\underset{\text{ligne}}{\sim} \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & sId - F_{\bar{\mathcal{O}}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} && (8.41) \end{aligned}$$

On en conclut que $\begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & sId - F_{\bar{\mathcal{O}}} \end{bmatrix}$ est un PGCD carré de la première; son déterminant étant égal au polynôme non observable, cela prouve le résultat.

Corollaire 8.4 Les polynômes non commandables, non observables, sont invariants par changement de base; en particulier ils sont indépendants de la base choisie dans la décomposition du thérème 8.3.

8.2 Généralisation aux formes opérateurs

8.2.1 Définitions

Au cours des chapitres précédents, nous avons vu que toute forme observateur admet une réalisation, unique à un changement de base statique près.

Nous avons vu d'autre part que les notions de commandabilité, observabilité, valeurs propres et polynômes non commandables, non observables sont indépendantes de la base d'état.

Nous pouvons donc donner les définitions suivantes:

Définition 8.5

- *une forme opérateur est commandable si ses réalisations le sont*
- *une forme opérateur est observable si ses réalisations le sont*
- *on appelle polynômes non commandable, non observable, d'une forme opérateur les polynômes correspondants de leurs réalisations (à une constante près)*

que l'on complète par la définition suivante:

[10] les changements de base statiques sont unimodulaires, et ne changent donc pas les calculs de PGCD

Définition 8.6 (polynôme caractéristique d'une forme opérateur) *on appelle polynôme caractéristique d'une forme opérateur le polynome caractéristique (à une constante près) de la dynamique propre[11] de leurs réalisations; on appelle valeurs propres d'une forme opérateur les zéros de ce polynôme.*

Remarque: compte tenu de ce qui précède , on peut définir sans ambiguïté

- la commandabilité d'un système
- l'observabilité d'un système
- le polynôme caractéristique d'un système
- les polynômes non commandable, non observable d'un système

8.2.2 Résultats

Des théorèmes 6.3 et 8.6 on déduit immédiatement les résultats suivants:

Théorème 8.7

- *le polynôme caractéristique d'une forme opérateur* (P, Q, R, W) *est égal à* $\det P$ *(à une constante près); les valeurs propres de la dynamique sont les zéros de* $\det P$*, avec leur ordre de multiplicité. En particulier la dimension d'état est égal au degré de* $\det P$
- *elle est commandable si et seulement si* P *et* Q *sont premiers entre eux à gauche*
- *elle est observable si et seulement si* P *et* R *sont premiers entre eux à droite*
- *si* M *est un PGCD carré à gauche de* P *et* Q*, le polynôme non commandable de la forme opérateur est égal à* $\det M(s)$ *(à une constante près)*
- *si* M *est un PGCD carré à droite de* P *et* R*, le polynôme non observable de la forme opérateur est égal à* $\det M(s)$ *(à une constante près)*

On peut également donner les définitions suivantes:

Définition 8.7 (Stabilité, stabilisabilité, détectabilité) *On dira qu'un système est stable[12] (resp. stabilisable, resp. détectable) si son polynôme caractéristique (resp. son polynôme non commandable, resp. son polynôme non observable) est exponentiellement stable ou constant.*

8.3 Réalisation d'un transfert

En étudiant l'ensemble des formes d'état de transfert donné, nous allons par là-même étudier la part d'information contenue dans le transfert d'une forme opérateur. Nous allons voir qu'elle est équivalente à la donnée de la partie commandable et observable, à un changement de base d'état près. Le comportement des parties non observables et/ou non commandables est donc "oublié" dans le transfert.

Définition 8.8 (Réalisation d'un transfert) *Une réalisation d'une matrice rationnelle* T *est une forme d'état de transfert* T*. On dit qu'on réalise le transfert* T*.*

Définition 8.9 (Réalisation minimale) *Une réalisation minimale d'un transfert* T *est une réalisation de* T *de dimension minimale dans l'ensemble de ses réalisations.*

[11] c'est-à-dire F, avec nos notations

[12] exponentiellement

Théorème 8.8 (Existence) *Tout transfert admet une réalisation.*

Preuve: compte-tenu du corollaire 4.1 traitant de la bifactorisation, toute matrice rationnelle peut s'interpréter comme le transfert d'une forme opérateur; toute forme opérateur admettant une réalisation, cela prouve le résultat.

Théorème 8.9 (Réalisation de transferts propres) *Une réalisation d'un transfert est une forme d'état au sens propre si et seulement si ce transfert est propre; la partie D de la forme d'état*[13] *est nulle si et seulement si le transfert est strictement propre.*

Preuve: cela revient à prouver que $C(sId-A)^{-1}B+D(s)$ propre (resp. strictement propre) si et seulement si D est constante (resp. nulle).

Il est facile de voir que $(sId-A)$ est ligne et colonne propre; on en déduit facilement que $(sId-A)^{-1}$ (et donc $C(sId-A)^{-1}B$) est strictement propre (théorème 4.12). Alors le transfert est propre (resp. strictement propre) si et seulement si D est propre (resp. strictement propre), c'est-à-dire constante (resp. nulle).

Lemme 8.1 on reprend les notations du théorème 8.3. Alors

$$H(sId-F)^{-1}G = H_{\mathcal{CO}}(sId-F_{\mathcal{CO}})^{-1}G_{\mathcal{CO}} \tag{8.42}$$

Preuve: il suffit de constater que

$$HF^kG = H_{\mathcal{CO}}F^k_{\mathcal{CO}}G_{\mathcal{CO}} \quad \forall k \geq 0 \tag{8.43}$$

Théorème 8.10 (Réalisation minimale) *Une réalisation d'un transfert est minimale si et seulement si elle est complètement observable et complètement commandable.*

Preuve: la condition nécessaire résulte du lemme précédent.

Condition suffisante: soit $(sId-A, B, C, D(s))$ une réalisation complètement commandable et observable d'un transfert T, et $(sI-\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}(s))$ une réalisation minimale de T. De l'égalité des transferts on déduit l'egalité des parties strictement propres et polynômiales, c'est-à-dire:

$$C(sId-A)^{-1}B = \tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B} \quad , \quad D = \tilde{D} \tag{8.44}$$

Comme il s'agit de fonctions holomorphes en s pour s complexe, on en déduit que

$$CA^kB = \tilde{C}\tilde{A}^k\tilde{B} \quad \forall k \geq 0 \tag{8.45}$$

d'où

$$\mathcal{O}_{C,A}\mathcal{C}_{A,B} = \mathcal{O}_{\tilde{C},\tilde{A}}\mathcal{C}_{\tilde{A},\tilde{B}} \tag{8.46}$$

Les deux systèmes étant complètement observables et commandables, on montre que le rang de ces deux matrices est égale à la dimension d'état correspondante, et celles-ci sont donc égales.

Corollaire 8.5 Si $(sId-F, G, H, K(s))$ est une forme d'état généralisée, $(sId-F_{\mathcal{CO}}, G_{\mathcal{CO}}, H_{\mathcal{CO}}, K(s))$ est une réalisation minimale de son transfert.

Preuve: les transferts des deux formes d'état sont égaux, et la deuxième forme est commandable et observable.

Théorème 8.11 (unicité de la réalisation minimale) *La réalisation minimale est unique à un changement de base d'état près.*

[13] c'est-à-dire la partie reliant directement l'entrée à la sortie

Preuve: considérons $(sId - A, B, C, D(s))$ et $(sId - \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}(s))$ deux réalisations minimales d'un transfert; on note respectivement $\mathcal{O}, \mathcal{C}$ et $\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{C}}$ les matrices d'observabilité et de commandabilité des deux systèmes. Alors $\tilde{\mathcal{O}}$ est injective, et donc $\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}$ est inversible; posons

$$P = \left[\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\right]^{-1}\tilde{\mathcal{O}}^T\mathcal{O} \tag{8.47}$$

On sait que $\mathcal{O}\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{C}}$, d'où

-
$$\begin{aligned} P\mathcal{C} &= \left[\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\right]^{-1}\tilde{\mathcal{O}}^T\mathcal{O}\mathcal{C} && (8.48)\\ &= \left[\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\right]^{-1}\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{C}} && (8.49)\\ &= \tilde{\mathcal{C}} && (8.50) \end{aligned}$$

  en particulier on a $\tilde{B} = PB$.
- on a d'autre part

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}P\mathcal{C}\mathcal{C}^T &= \tilde{\mathcal{O}}\left[\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\right]^{-1}\tilde{\mathcal{O}}^T\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{C}^T && (8.51)\\ &= \tilde{\mathcal{O}}\left[\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\right]^{-1}\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{C}}\mathcal{C}^T && (8.52)\\ &= \tilde{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{C}}\mathcal{C}^T && (8.53)\\ &= \mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{C}^T && (8.54) \end{aligned}$$

  La paire (A, B) étant complètement commandable, $\mathcal{C}\mathcal{C}^T$ est inversible, d'où $\tilde{\mathcal{O}}P = \mathcal{O}$; en particulier on a $C = \tilde{C}P$.
- on vérifie sans peine qu'on a également

$$\tilde{\mathcal{O}}\tilde{A}\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{O}A\mathcal{C} \tag{8.55}$$

  d'où

$$\begin{aligned} PA\mathcal{C} &= \left[\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\right]^{-1}\tilde{\mathcal{O}}^T\mathcal{O}A\mathcal{C} && (8.56)\\ &= \left[\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\right]^{-1}\tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}}\tilde{A}\tilde{\mathcal{C}} && (8.57)\\ &= \tilde{A}\tilde{\mathcal{C}} && (8.58) \end{aligned}$$

  d'où

$$\begin{aligned} PA &= \tilde{A}\tilde{\mathcal{C}}\mathcal{C}\left[\mathcal{C}\mathcal{C}^T\right]^{-1} && (8.59)\\ &= \tilde{A}Q && (8.60) \end{aligned}$$

- il reste à prouver que P est carrée inversible: elle est carrée parce que les dimensions d'état sont égales, et injective, puisque $\tilde{\mathcal{O}}P = \mathcal{O}$.

Remarque: en un sens nous venons de mettre en évidence une forme canonique de *bifactorisation irréductible* pour les matrices rationnelles dans le cas polynomial.

De l'existence et de l'unicité de la réalisation minimale on déduit le résultat suivant:

Théorème 8.12 (Pôles d'un transfert) *Un complexe s_0 est un pôle d'un transfert T si et seulement si s_0 est valeur propre de ses réalisations minimales.*

Preuve: il suffit d'exhiber une forme observateur commandable[14] (ou vice-versa) équivalente à la réalisation minimale. Les matrices P et R constitue une factorisation à droite irréductible du transfert: il suffit d'appliquer alors le théorème 4.6.

[14] il en existe!

8.3.1 Retour sur la stabilité

Les résultats précédents nous permettent de donner les définitions suivantes:

Définition 8.10 (Partie et polynôme commandable et observable d'un système)

- *La partie commandable et observable (ou encore canonique) d'un système est la classe d'équivalence*[15] *des réalisations minimales de son transfert.*
- *Le polynôme commandable et observable d'un système est égal au polynôme caractéristique de sa partie commandable et observable.*

Remarque: le lecteur vérifiera que le polynôme commandable et observable est égal au polynôme caractéristique de $F_{\mathcal{CO}}$.

On peut alors en déduire la définition suivante:

Définition 8.11 (Polynôme non commandable et non observable d'un système)
Le polynôme non commandable et non observable d'un système est égal au produit du polynôme commandable et observable, du polynôme non commandable et du polynôme non observable, divisé par le polynôme caractéristique.

Remarque: le lecteur vérifiera que le polynôme non commandable et non observable est égal au polynôme caractéristique de $\tilde{F}_4$.

Ce qui nous permet de conclure ce chapitre par un retour sur la stabilité:

Théorème 8.13 (CNS de stabilité d'un système) *Un système est exponentiellement stable si et seulement si les trois conditions suivantes sont réunies:*

- *il est stabilisable*
- *il est détectable*
- *sa partie commandable et observable est exponentiellement stable*

la dernière condition étant équivalente à la suivante:

- *les pôles du transfert du système sont à partie réelle négative stricte*[16]

Preuve: regarder sur la forme d'état après décomposition suivant observabilité et commandabilité.

[15] pour l'équivalence des formes opérateurs
[16] en temps discret: remplacer par "de module strictement inférieur à 1"

8.4 Exercices

Exercice 8.1 (Mise sous forme observateur d'une forme opérateur observable)
On considère une forme opérateur (P, Q, R, W) qu'on suppose observable.

1. Montrer qu'il existe six matrices polynômiales X, Y, X_1, Y_1, P_o, Q_o, de tailles adéquates, telles que:

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ -Q_o & P_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & X_1 \\ R & Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & X_1 \\ R & Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ -Q_o & P_o \end{bmatrix} \tag{8.61}$$

2. Montrer que les deux systèmes différentiels suivants sont équivalents:

$$\begin{cases} Pz = Qu \\ y = Rz + Wu \\ z_o = Rz + Wu \end{cases} \tag{8.62}$$

$$\begin{cases} P_o z = (Q_o Q + P_o W)u \\ y = z_o \\ z = Y z_o + (XQ - YW)u \end{cases} \tag{8.63}$$

3. En déduire que toute forme opérateur observable est équivalente à une forme observateur, et l'analogue pour la commandabilité.

Exercice 8.2 (Indices de contrôlabilité)
On considére une forme d'état du type de celle étudiée dans le théorème 7.7.4, obtenue, par exemple, par réalisation d'une forme contrôleur. Pour simplifier, on note k_i les degrés-colonne ∂c_i. A chaque k_i est associé une composante de l'entrée u: on dit que k_i est l'*indice de contrôlabilité* de la i^{eme} entrée. Quitte à renuméroter les entrées, on supposera la suite des k_i décroissante. On notera K la valeur maximale des k_i, p le nombre de valeurs prises par les k_i, et $v_1, \ldots, v_p$ la suite décroissante des *valeurs* des k_i.[17]

1. A un entier k et à deux matrices A et B de tailles adéquates on associe la matrice de commandabilité partielle $\mathcal{C}^k_{A,B}$ définie par

$$\mathcal{C}^k_{A,B} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^k B \end{bmatrix} \tag{8.64}$$

Montrer que $\operatorname{Im} \mathcal{C}^k_{A,B} = \operatorname{Im} \mathcal{C}^k_{A_0,B} = \operatorname{Im} \mathcal{C}^k_{A_0,B_0}$

2. A deux entiers k et i on associe la matrice $B_{0,k,i}$ définie par

$$\begin{cases} B_{0,k,i} & = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \vdots \\ \\ \leftarrow \text{ ligne } i+1 \\ \\ \vdots \\ \\ \end{matrix} & \text{pour } \; 0 \leq i < k \\ & = 0 & \text{pour } \; i \geq k \end{cases} \tag{8.65}$$

Montrer que $(A_{0,k})^i B_{0,k} = B_{0,k,i}$ pour tout k, i.

[17] donc $v_1 = K$

3. Montrer que $A_0^i B_0 = 0$ pour $i \geq K$.
4. Montrer que, pour $0 \leq k < K$

$$\text{Im } \mathcal{C}_{A,B}^k = \bigoplus_{i=0}^{i=k} \text{Im } A_0^i B_0 \tag{8.66}$$

5. A tout entier i positif ou nul on associe l'entier ρ_i défini par

$$\rho_i = \text{ Card } \{j \ / \ k_j > i\} \tag{8.67}$$

Montrer que la suite des ρ_i est décroissante, nulle à partir de $i = K$, et que

$$\dim \text{Im} \left(A_0^i B_0\right) = \rho_i = \dim \text{Im } \mathcal{C}_{A,B}^i - \dim \text{Im } \mathcal{C}_{A,B}^{i-1} \tag{8.68}$$

6. De même que pour les k_i, on note n le nombre de valeurs prises par les ρ_i, et $r_1, \ldots, r_n$ la suite décroissante des *valeurs* des ρ_i. Montrer que $p = n$, et que pour s de 1 à p, on a

$$\rho_i = r_s \quad \text{pour} \quad v_{p-s+2} \leq i < v_{p-s+1} \tag{8.69}$$

en posant $v_{p+1} = 0$.

7. A un entier i on associe l'entier π_i défini par

$$\pi_i = \text{ Card } \{j \ / \ \rho_j \geq i\} \tag{8.70}$$

Montrer que π_i est nul pour $i > r_1$ et que, pour s de 1 à p, on a

$$\pi_i = v_s \quad \text{pour} \quad r_{p-s+2} < i < r_{p-s+1} \tag{8.71}$$

en posant $r_{p+1} = 0$.

8. Montrer que les suites k_i et π_i coïncident.
9. En déduire que les indices de contrôlabilité sont définis de manière unique pour tout système contrôlable.

Remarque: on définit de manière analogue les indices d'observabilité des systèmes observables.

Chapitre 9

Système bouclé

Après avoir étudié les propriétés classiques des systèmes (stabilité, commandabilité, observabilité, transfert), nous allons définir le bouclage d'un système par un contrôleur et étudier les relations existant entre les propriétés des sytèmes de départ et celles du système bouclé.

On commencera par définir le bouclage d'une *forme opérateur* par une autre, essentiellemnt en réunissant leurs sytèmes différentiels et en couplant ceux-ci pour fermer la boucle. Puis on montrera que le bouclage est compatible avec l'équivalence de formes opérateurs, ce qui permettra de définir le bouclage d'un *système* par un autre.

Puis on montrera, *grosso modo*, qu'observabilité et commandabilité sont inchangées par bouclage, encore qu'il faille être prudent dans l'interprétation du résultat. La conséquence essentielle de ce dernier réside dans les propriétés de stabilité du système bouclé. En effet, on se trouve alors devant l'alternative suivante:

- ou bien il n'existe *aucun* contrôleur donnant un bouclage stable, et ceci en raison d'une non-stabilisabilité ou d'une non-détectabilité d'un des deux systèmes
- ou bien la stabilité du sytème bouclé est entièrement déterminée par les *transferts* des deux systèmes.

L'idée du bouclage de deux systèmes est essentiellement résumée dans le schéma suivant:

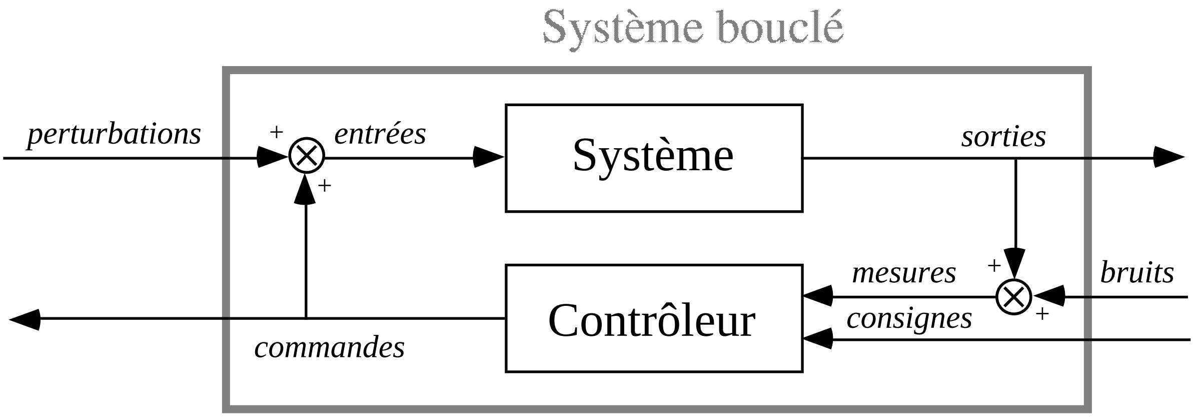

Figure 9.1: système bouclé

A un premier système on accole un second dont "les entrées sont les sorties du premier" et dont "les sorties sont les entrées du premier", ce qui est l'idée même du bouclage; en plus, on "se réserve de la place" dans les second système pour d'autres entrées, qu'on appelle consignes. Le système bouclé possède alors, en première approximation, les consignes comme entrées, et les mêmes sorties que le premier système.

Par mesure de réalisme, on insère des perturbations aux interfaces entre les deux systèmes. On considère également les sorties du contrôleur comme sorties du système bouclé.

L'automatique n'étant pas faite de jolis dessins mais d'objets mathématiques, nous allons dans ce qui va suivre definir rigoureusement le bouclage de deux systèmes.

9.1 Définitions

Définition 9.1 (bouclage bien dimensionné) *le bouclage d'une forme opérateur* (P, Q, R, W) *par une forme opérateur* $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$ *est bien dimensionné si*

- $\tilde{Q}$ *a plus de colonnes que* R
- $\tilde{W}$ *a plus de colonnes que* W
- $\tilde{R}$ *a autant de lignes que* Q

autrement dit:

- *la deuxième forme opérateur a plus d'entrées que le nombre de sorties de la premières*
- *la deuxième forme opérateur a autant de sorties que la première compte d'entrées*

Cela signifie que la figure précédente à un sens, au moins du point de vue des dimensions.

Lorsque le bouclage est bien dimensionné, on convient de partitionner les matrices $\tilde{Q}$ et $\tilde{W}$ en $\left[\begin{array}{cc} \tilde{Q}_2 & \tilde{Q}_1 \end{array} \right]$ et $\left[\begin{array}{cc} \tilde{W}_2 & \tilde{W}_1 \end{array} \right]$, les premiers blocs ayant le même nombre de colonnes que R a de lignes.

Définition 9.2 (bouclage bien posé) *le bouclage d'une forme opérateur* (P, Q, R, W) *par une forme opérateur* $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$ *est bien posé si*

- *il est bien dimensionné*
- *la matrice* P_b *suivante*

$$P_b = \left[\begin{array}{cccc} P & -Q & 0 & 0 \\ -R & -W & 0 & Id \\ 0 & 0 & \tilde{P} & -\tilde{Q}_2 \\ 0 & Id & -\tilde{R} & -\tilde{W}_2 \end{array} \right] \tag{9.1}$$

est de rang plein.

Nous allons montrer que cette condition n'est pas liée aux choix des formes opérateurs, mais uniquement à leurs transferts. En particulier les parties non commandables et/ou non observables n'interviennent pas dans cette condition.

Commençons par rappeler le résultat suivant:

Lemme 9.1 Soit $\mathcal{A}$ un anneau[1], M une matrice carrée à éléments dans $\mathcal{A}$ de la forme suivante:

$$M = \left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right] \tag{9.2}$$

avec A carrée de rang plein. Alors M est de rang plein si et seulement si $D - CA^{-1}B$ est de rang plein.

Preuve: passer dans le corps des fractions et résoudre l'équation $MX = 0$.

Théorème 9.1 (caractérisation par les transferts) *Soit* T *le transfert du premier système et* $\tilde{T}_2 = \tilde{R}\tilde{P}^{-1}\tilde{Q}_2 + \tilde{W}_2$[2]*. Alors la matrice* P_b *ci dessus est de rang plein si et seulement si* $Id - \tilde{T}_2 T$ *est de rang plein; cette condition est encore équivalente à la régularité de* $Id - T\tilde{T}_2$.

[1] commutatif unitaire intègre

[2] qui correspond au transfert de la mesure vers la commande (voir plus loin)

Preuve: la matrice

$$P_b = \left[\begin{array}{c|ccc} P & -Q & 0 & 0 \\ \hline -R & -W & 0 & Id \\ 0 & 0 & \tilde{P} & -\tilde{Q}_2 \\ 0 & Id & -\tilde{R} & -\tilde{W}_2 \end{array}\right] \tag{9.3}$$

est de rang plein, c'est-à-dire si (lemme précédent avec $A = P$)

$$\left[\begin{array}{ccc} -W & 0 & Id \\ 0 & \tilde{P} & -\tilde{Q}_2 \\ Id & -\tilde{R} & -\tilde{W}_2 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} -R \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] P^{-1} \left[\begin{array}{ccc} -Q & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} -T & 0 & Id \\ 0 & \tilde{P} & -\tilde{Q}_2 \\ Id & -\tilde{R} & -\tilde{W}_2 \end{array}\right] \tag{9.4}$$

est de rang plein; après permutations de lignes et colonnes, on se ramène à la même condition sur

$$\left[\begin{array}{c|cc} \tilde{P} & 0 & -\tilde{Q}_2 \\ \hline 0 & -T & Id \\ -\tilde{R} & Id & -\tilde{W}_2 \end{array}\right] \tag{9.5}$$

En utilisant le lemme précédent avec $A = \tilde{P}$, on voit que P_b est de rang plein si et seulement si

$$\mathcal{T} = \left[\begin{array}{cc} -T & Id \\ Id & -\tilde{T}_2 \end{array}\right] \tag{9.6}$$

est de rang plein. Il suffit d'utiliser encore une fois le lemme précédent sur l'une ou l'autre des matrices Identité pour trouver l'une ou l'autre des conditions du théorème.

Ces préliminaires effectués, définissons maintenant le bouclage de deux formes opérateurs:

Définition 9.3 (bouclage de formes opérateurs) *soient* (P, Q, R, W) *et* $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$ *deux formes opérateurs; on suppose que le bouclage de la première forme par la seconde est bien posé. Par définition, le bouclage de* (P, Q, R, W) *par* $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$ *est la forme opérateur* (P_b, Q_b, R_b, W_b) *donnée par:*

$$\begin{array}{rclcrcl} P_b & = & \left[\begin{array}{cccc} P & -Q & 0 & 0 \\ -R & -W & 0 & Id \\ 0 & 0 & \tilde{P} & -\tilde{Q}_2 \\ 0 & Id & -\tilde{R} & -\tilde{W}_2 \end{array}\right] & , & Q_b & = & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id \\ \tilde{Q}_1 & 0 & 0 \\ \tilde{W}_1 & Id & 0 \end{array}\right] \\ R_b & = & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & Id \\ 0 & Id & 0 & 0 \end{array}\right] & , & W_b & = & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -Id \\ 0 & -Id & 0 \end{array}\right] \end{array} \tag{9.7}$$

Remarque: le contrôleur est linéaire stationnaire comme le système de départ. Cela est loin de rassembler l'ensemble des contrôleurs imaginables: non linéaires, instationnaires, faiblement réguliers, etc... Néanmoins, la prise en compte de tels contrôleurs conduirait directement à l'étude algébrique de systèmes non linéaires, instationnaires, etc..., ce qui n'est certainement pas le but de cet ouvrage. Retenons tout de même que le choix de se limiter à un contrôleur linéaire stationnaire est un choix de cohérence algébrique, et ne permet pas de générer par bouclage l'ensemble des comportements que l'on pourrait obtenir avec des contrôleurs plus généraux: la preuve en est que le bouclage est *encore* représentable par un système différentiel linéaire, puisque c'est *encore* une forme opérateur linéaire stationnaire.

Interprétation:

- pour que le bouclage constitue une forme opérateur, il est nécessaire que P_b soit de rang plein; d'où la notion de bouclage bien posé

- on note z et $\tilde{z}$ les états partiels des deux formes opérateurs, u l'entrée de la première, y la sortie, m la mesure, v la consigne, p la perturbation, b le bruit de mesure, c la commande. Les équations du premier système peuvent s'écrire:

$$\begin{bmatrix} P(\frac{d}{dt}) & Q(\frac{d}{dt}) \\ -R(\frac{d}{dt}) & W(\frac{d}{dt}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix} \tag{9.8}$$

Les équations du second peuvent s'écrire:

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}(\frac{d}{dt}) & \tilde{Q}_2(\frac{d}{dt}) & \tilde{Q}_1(\frac{d}{dt}) \\ -\tilde{R}(\frac{d}{dt}) & \tilde{W}_2(\frac{d}{dt}) & \tilde{W}_1(\frac{d}{dt}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ -m \\ -v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \end{bmatrix} \tag{9.9}$$

En ajoutant les équations suivantes, qui reviennent à fermer la boucle:

$$m = y + b \quad , \quad u = c + p \tag{9.10}$$

on obtient au total

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} P(\frac{d}{dt}) & -Q(\frac{d}{dt}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R(\frac{d}{dt}) & -W(\frac{d}{dt}) & 0 & Id & 0 & 0 & Id \\ 0 & 0 & \tilde{P}(\frac{d}{dt}) & -\tilde{Q}_2(\frac{d}{dt}) & \tilde{Q}_1(\frac{d}{dt}) & 0 & 0 \\ 0 & Id & -\tilde{R}(\frac{d}{dt}) & -\tilde{W}_2(\frac{d}{dt}) & \tilde{W}_1(\frac{d}{dt}) & Id & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -Id & 0 & 0 & -Id \\ 0 & -Id & 0 & 0 & 0 & -Id & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} z \\ u \\ \tilde{z} \\ m \\ \hline -v \\ -p \\ -b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -y \\ -c \end{array}\right] \tag{9.11}$$

ce qui justifie la définition du bouclage.

Attention! une fois de plus, la réunion de deux parties est plus que la somme des deux parties prises séparément. En particulier, il ne faut pas se laisser abuser par la notation z, $\tilde{z}$. Bien que les états partiels du système bouclé aient un certain rapport avec ceux des systèmes de départ, ils ne constituent pas une simple concaténation de ceux-ci. En effet, les états partiels sont des vecteurs d'espaces fonctionnels, en l'occurence des solution d'équations différentielles. Or les solutions du système bouclé sont différentes de la simple superposition des solutions des systèmes de départ[3], comme nous le verrons en étudiant les valeurs propres du système bouclé.

9.2 Système bouclé

Théorème 9.2
Soient (P, Q, R, W) et (P_1, Q_1, R_1, W_1) deux formes opérateurs équivalentes, $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$ et $(\tilde{P}_1, \tilde{Q}_1, \tilde{R}_1, \tilde{W}_1)$ deux autres formes opérateurs équivalentes. Alors

- *si le bouclage de (P, Q, R, W) par $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$ est bien posé, le bouclage de (P_1, Q_1, R_1, W_1) par $(\tilde{P}_1, \tilde{Q}_1, \tilde{R}_1, \tilde{W}_1)$ l'est également*
- *dans l'affirmative, le bouclage de (P, Q, R, W) par $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$ est équivalent au bouclage de (P_1, Q_1, R_1, W_1) par $(\tilde{P}_1, \tilde{Q}_1, \tilde{R}_1, \tilde{W}_1)$*

On peut donc parler de bouclage de systèmes*.*

[3]heureusement! sinon, à quoi bon faire des bouclages?

Preuve:

- la notion de bouclage bien posé ne dépend que des transferts des systèmes; *a fortiori,* elle est invariante par équivalence de formes opérateurs.
- le second résultat se prouve en utilisant la définition différentielle de l'équivalence de systèmes et l'équation (9.11).

9.3 Réduction du système bouclé

Il semblerait que le bouclage de deux systèmes d'états partiels respectifs z et $\tilde{z}$ conduise naturellement à un système d'état partiel $\begin{bmatrix} z \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$. Nous allons donner ici une condition suffisante pour que cela soit vrai.

Lemme 9.2 (réduction d'une forme opérateur) Soit (P, Q, R, W) une forme opérateur de la forme

$$\begin{array}{rclcrcl} P & = & \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} & , & Q & = & \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \\ R & = & \begin{bmatrix} G & H \end{bmatrix} & , & W & = & K \end{array} \tag{9.12}$$

avec D *unimodulaire.* Alors (P, Q, R, W) est équivalente à $(A - BD^{-1}C, E - BD^{-1}F, G - HD^{-1}C, K + HD^{-1}F)$.

Preuve: les deux systèmes différentiels suivants sont équivalents:

$$\left.\begin{array}{rcl} Az_1 + Bz_2 & = & Eu \\ Cz_1 + Dz_2 & = & Fu \\ y & = & Gz_1 + Hz_2 + Ku \end{array}\right\} \tag{9.13}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} (A - BD^{-1}C)z_1 & = & (E - BD^{-1}F)u \\ y & = & (G - HD^{-1}C)z_1 + (K + HD^{-1}F)u \\ z_2 & = & -D^{-1}Cz_1 + D^{-1}Fu \end{array}\right\} \tag{9.14}$$

Théorème 9.3 (Forme réduite d'un bouclage) *On considère le bouclage d'une forme opérateur* (P, Q, R, W) *par une forme opérateur* $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}, \tilde{W})$*. On suppose que* $\Delta = Id - \tilde{W}_2 W$ *ou, de manière équivalente,* $\delta = Id - W\tilde{W}_2$*, est unimodulaire. Alors la forme opérateur bouclée est équivalente à la forme* $(\tilde{P}_b, \tilde{Q}_b, \tilde{R}_b, \tilde{W}_b)$*, d'état partiel* $\begin{bmatrix} z \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$*, avec:*

$$\tilde{P}_b = \begin{bmatrix} P - Q\Delta^{-1}\tilde{W}_2 R & -Q\Delta^{-1}\tilde{R} \\ -\tilde{Q}_2\delta^{-1}R & \tilde{P} - \tilde{Q}_2 W\delta^{-1}\tilde{R} \end{bmatrix} \tag{9.15}$$

$$\tilde{Q}_b = \begin{bmatrix} Q\Delta^{-1}\tilde{W}_1 & Q\Delta^{-1} & Q\Delta^{-1}\tilde{W}_2 \\ \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2\delta^{-1}W\tilde{W}_1 & \tilde{Q}_2\delta^{-1}W & \tilde{Q}_2\delta^{-1} \end{bmatrix} \tag{9.16}$$

$$\tilde{R}_b = \begin{bmatrix} \delta^{-1}R & \delta^{-1}W\tilde{R} \\ \Delta^{-1}\tilde{W}_2 R & \Delta^{-1}\tilde{R} \end{bmatrix} \tag{9.17}$$

$$\tilde{W}_b = \begin{bmatrix} \delta^{-1}W\tilde{W}_1 & \delta^{-1}W & \delta^{-1} - Id \\ \Delta^{-1}\tilde{W}_1 & \Delta^{-1} - Id & \Delta^{-1}\tilde{W}_2 \end{bmatrix} \tag{9.18}$$

Preuve: après avoir échangé la place de u et $\tilde{z}$ (ce qui revient à passer à une forme opérateur équivalente), on utilise le lemme précédent avec

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} A & = & \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix} & , & B & = & \begin{bmatrix} -Q & 0 \\ 0 & -\tilde{Q}_2 \end{bmatrix} & , & C & = & \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & -\tilde{R} \end{bmatrix} \\ D & = & \begin{bmatrix} -W & Id \\ Id & -\tilde{W}_2 \end{bmatrix} & , & E & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tilde{Q}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & , & F & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & Id \\ \tilde{W}_1 & Id & 0 \end{bmatrix} \\ G & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & , & H & = & \begin{bmatrix} 0 & Id \\ Id & 0 \end{bmatrix} & , & K & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -Id \\ 0 & -Id & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{9.19}$$

D est unimodulaire si et seulement si Δ ou, de manière équivalente, δ, est unimodulaire. On a alors

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta^{-1}\tilde{W}_2 & \Delta^{-1} \\ \delta^{-1} & \delta^{-1}W \end{bmatrix} \tag{9.20}$$

Remarques:

- lorsque les conditions de ce théorème sont vérifiées, on peut associer aux deux formes opérateurs de départ un forme réduite du bouclage, de même que, par définition, on leur associait un forme opérateur “canonique” du bouclage.
- la condition énoncée dans le théorème est en particulier vraie si W ou $\tilde{W}_2$ est nul, ou si W et $\tilde{W}_2$ sont constantes, avec $Id - \tilde{W}_2 W$ de rang plein; on en déduit le corollaire suivant:

Corollaire 9.1 (forme d'état réduite d'un bouclage) Soit $(sId - A, B, C, D)$ et $(sId - \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ deux formes d'état[4]; on suppose que $\Delta = Id - \tilde{D}_2 D$ ou, de manière équivalente, $\delta = Id - D\tilde{D}_2$ est de rang plein. Alors

- la dimension d'état du système bouclé est égale à la somme des dimensions d'état du système et du contrôleur
- une réalisation du système bouclé est donnée par $(sId - A_b, B_b, C_b, D_b)$ avec:

$$\tilde{A}_b = \begin{bmatrix} A + B\Delta^{-1}\tilde{D}_2 C & B\Delta^{-1}\tilde{C} \\ \tilde{B}_2\delta^{-1}C & \tilde{A} + \tilde{B}_2 D\delta^{-1}\tilde{C} \end{bmatrix} \tag{9.21}$$

$$\tilde{B}_b = \begin{bmatrix} B\Delta^{-1}\tilde{D}_1 & B\Delta^{-1} & B\Delta^{-1}\tilde{D}_2 \\ \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2\delta^{-1}D\tilde{D}_1 & \tilde{B}_2\delta^{-1}D & \tilde{B}_2\delta^{-1} \end{bmatrix} \tag{9.22}$$

$$\tilde{C}_b = \begin{bmatrix} \delta^{-1}C & \delta^{-1}D\tilde{C} \\ \Delta^{-1}\tilde{D}_2 C & \Delta^{-1}\tilde{C} \end{bmatrix} \tag{9.23}$$

$$\tilde{D}_b = \begin{bmatrix} \delta^{-1}D\tilde{D}_1 & \delta^{-1}D & \delta^{-1} - Id \\ \Delta^{-1}\tilde{D}_1 & \Delta^{-1} - Id & \Delta^{-1}\tilde{D}_2 \end{bmatrix} \tag{9.24}$$

En particulier le système bouclé est propre[5].

Remarque: la condition est en particulier vérifiée si l'un des deux systèmes est strictement propre. Si les deux sont strictement propres, alors le système bouclé l'est également.

[4]au sens strict du terme: D et $\tilde{D}$ sont des matrices constantes

[5]nous montrerons plus loin que le système bouclé est propre si et seulement si $Id - \tilde{T}_2 T$ est propre et d'inverse propre

9.4 Observabilité et commandabilité du système bouclé

Avertissement: les résultats de cette section ne sont valables qu'à condition de respecter scrupuleusement la définition donnée ici du bouclage, en particulier de l'ensemble des entrées et des sorties du système bouclé.

Théorème 9.4 (Observabilité et commandabilité du système bouclé) *Si G est un PGCD carré à gauche (resp. à droite) de P et Q (resp. de P et R), si $\tilde{G}$ est un PGCD carré à gauche (resp. à droite) de $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ (resp. de $\tilde{P}$ et $\tilde{R}$), alors* $\begin{bmatrix} G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id \end{bmatrix}$ *est un PGCD à gauche (resp. à droite) de P_b et Q_b (resp. P_b et Q_b). En particulier:*

- *le polynôme non commandable du système bouclé est égal au produit des polynômes non commandables des deux systèmes*
- *le polynôme non observable du système bouclé est égal au produit des polynômes non observables des deux systèmes*
- *le système bouclé est commandable (resp. observable, resp. commandable et observable) si et seulement si les deux systèmes de départ le sont*[6]

Preuve: les matrices Q_b et R_b contiennent des matrices identité stratégiquement placées qui, par des opérations de colonnes (resp. de lignes), permettent de se ramener aux PGCD de départ.

Dans le cas d'une forme d'état réduite, on a un résultat plus précis donnant les espaces commandables et non observables du système bouclé à partir de ceux des systèmes de départ.

Théorème 9.5 (Espaces accessible, espace non observable du système bouclé) *On considère*
le bouclage de deux systèmes pour lequel on peut obtenir une forme d'état réduite (D et $\tilde{D}_2$ constantes, $Id - \tilde{D}_2 D$ de rang plein). Alors l'espace accessible (resp. non observable) du système bouclé réduit est égal au produit des espaces accessibles (resp. non observables) des systèmes de départ.

Preuve:

- commandabilité: étudions donc l'image de la matrice de commandabilité de la forme d'état réduite:
$$\mathcal{C}_{\tilde{A}_b,\tilde{B}_b} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_b & \tilde{A}_b\tilde{B}_b & \cdots & \tilde{A}_b^{n+\tilde{n}-1}\tilde{B}_b \end{bmatrix} \tag{9.25}$$
Les opérations élémentaires de colonnes[7] ne changent pas l'image. On voit que $\tilde{B}_b$ est colonne équivalent à
$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{bmatrix} \tag{9.26}$$
et l'image de $\mathcal{C}_{\tilde{A}_b,\tilde{B}_b}$ est donc identique à celle de $\mathcal{C}_{\tilde{A}_b,\bar{B}}$. Posons
$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix} \tag{9.27}$$
Alors il existe une matrice constante M telle que $A_b = \bar{A} + \bar{B}M$. On en conclut facilement que $\mathcal{C}_{\tilde{A}_b,\bar{B}}$ est colonne équivalente à $\mathcal{C}_{\bar{A},\bar{B}}$, d'où le résultat pour la commandabilité.

[6]encore une fois, ceci n'est valable que pour les entrées/sorties données ici!

[7]dans les corps des réels: on n'utilise que des constantes

- observabilité: on procède de manière analogue, en remarquant que $\delta^{-1}D = D\Delta^{-1}$ et que $\delta^{-1}\tilde{D}_2 = \tilde{D}_2\Delta^{-1}$.

9.5 Transfert du système bouclé

Lemme 9.3 Soit $\mathcal{A}$ un anneau[8], et P une matrice à éléments dans $\mathcal{A}$ de la forme

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{9.28}$$

avec A et $\Delta = D - CA^{-1}C$ de rang plein. Alors P est inversible dans le corps des fractions, avec:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1}(Id + B\Delta^{-1}CA^{-1}) & -A^{-1}B\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}CA^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \tag{9.29}$$

Preuve: P est inversible d'après le lemme (9.1). Il suffit de vérifier que l'inverse proposé convient.

Lemme 9.4 On reprend les hypothèses et notations du lemme précédent, et on se donne Q et R de tailles adéquates, de la forme:

$$Q = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \quad , \quad R = \begin{bmatrix} G & H \end{bmatrix} \tag{9.30}$$

alors

$$RP^{-1}Q = \begin{bmatrix} GA^{-1} & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id & B \\ 0 & -Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ \Delta^{-1}(CA^{-1}E - F) \end{bmatrix} \tag{9.31}$$

Preuve: faire le produit et vérifier que ça marche.

Remarque: pour $G = 0$, on a $RP^{-1}Q = H\Delta^{-1}(F - CA^{-1}E)$.

Théorème 9.6 (Transfert du système bouclé) *Soit T le transfert du système à contrôler, $\tilde{T}_1$ le transfert du contrôleur reliant la consigne à la commande, $\tilde{T}_2$ le transfert du contrôleur reliant la mesure à la commande. On pose $\Delta = Id - \tilde{T}_2T$. Alors le transfert T_b du système bouclé est donné par*

$$T_b = \begin{bmatrix} T\Delta^{-1}\tilde{T}_1 & T\Delta^{-1} & T\Delta^{-1}\tilde{T}_2 \\ \Delta^{-1}\tilde{T}_1 & \Delta^{-1} - Id & \Delta^{-1}\tilde{T}_2 \end{bmatrix} \tag{9.32}$$

Preuve: reprenons le découpage utilisé dans la preuve du théorème (9.3) et posons $\Delta_1 = D - CA^{-1}B$. Après calcul, on voit que

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} -T & Id \\ Id & -\tilde{T}_2 \end{bmatrix} \tag{9.33}$$

En posont $\Delta = Id - \tilde{T}_2T$, on a (lemme(9.3))

$$\Delta_1^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta^{-1}\tilde{T}_2 & \Delta^{-1} \\ Id + T\Delta^{-1}\tilde{T}_2 & T\Delta^{-1} \end{bmatrix} \tag{9.34}$$

D'après le lemme (9.4), le transfert vaut $H\Delta_1^{-1}(F - CA^{-1}E) + K$. Or

$$F - CA^{-1}E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Id \\ \tilde{T}_1 & Id & 0 \end{bmatrix} \tag{9.35}$$

[8] commutatif, unitaire, intègre

ce qui permet de conclure en effectuant le calcul de $H\Delta_1^{-1}(F - CA^{-1}E) + K$.

Remarque: le transfert du système bouclé ne dépend que des transferts des systèmes de départ. On en déduit le théorème suivant:

Théorème 9.7 (Partie commandable et observable du système bouclé) *Le bouclage de la partie commandable et observable de deux systèmes est égal à la partie commandable et observable du bouclage des deux systèmes de départ.*

Preuve: le transfert du bouclage des parties commandable/observables est égal au transfert du bouclage sur les systèmes complets. Or ce bouclage est commandable et observable (théorème (9.4)); c'est donc la partie commandable et observable du système bouclé.

9.6 Stabilité

Théorème 9.8 (Stabilité du système bouclé) *Le système bouclé est exponentiellement stable*[9] *si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*

- *les deux systèmes de départ sont stabilisables et détectables*
- *le bouclage des parties à la fois commandable et observable des deux systèmes est exponentiellement stable, ou, de manière équivalente, les pôles du transfert du système bouclé sont à partie réelle négative stricte*

Preuve: cela découle des théorèmes (9.4) et (8.13).

Interprétation: il est donc nécessaire que le système à contrôler soit stabilisable et détectable. Si ce n'est pas le cas, revoir sa copie. D'autre part, on ne gagne rien à prendre un contrôleur non commandable ou non observable, puisque

- cela ne change pas la partie commandable et observable du systéme bouclé, et donc pas le transfert de celui-ci
- cela n'améliore en rien la stabilité du système bouclé

On supposera donc dorénavant que le système à contrôler est stabilisable et détectable, et que le contrôleur est commandable et observable. Dès lors, l'étude du sytème bouclé, que ce soit du point de vue stabilité ou du point de vue réponse fréquentielle (transfert), ne dépend que des parties à la fois commandable et observable des systèmes[10], c'est-à-dire, de manière équivalente, de leur matrice de transfert (voir la section consacrée à la réalisation minimale).

Outre la stabilité, on exigera du système bouclé qu'il ait un transfert propre. En effet, cela est nécessaire pour que la réponse (c'est-à-dire les sorties) du système ne soit pas uniquement définie pour de entrées de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais, disons, pour toutes les entrées continues par morceaux. En effet, l'étude d'une réalisation minimale montre que la présence de termes polynômiaux stricts dans le transfert est équivalente à l'apparition de Diracs (ou dérivées de Diracs, etc. . .) dans la sortie lorsque les entrées sont continues par morceaux.

Ces considérations étant faites, on voit que le problème suivant (qui constitue le problème fondamental de la théorie du contrôle):

> "Etant donné un système à contrôler, trouver un contôleur tel que le système bouclé soit exponentiellement stable et ait un transfert T_b donné, propre"

[9] ou, de manière équivalente, l'état est borné pour toute entrée et toute condition initiale

[10] le bouclage des parties commandable/observables étant la partie commandable/observable du bouclage

est équivalent, sous réserve de stabilisablité et de détectabilité à la fois du système à contrôler (ce qui est nécessaire) et du contrôleur (ce qui ne coûte rien), au problême suivant:

> "Etant donné une matrice rationnelle T et une matrice rationnelle propre exponentiellement stable[11] T_b, trouver une matrice rationnelle $\tilde{T}$ solution de l'équation suivante:
> $$T_b = \begin{bmatrix} T\Delta^{-1}\tilde{T}_1 & T\Delta^{-1} & T\Delta^{-1}\tilde{T}_2 \\ \Delta^{-1}\tilde{T}_1 & \Delta^{-1} - Id & \Delta^{-1}\tilde{T}_2 \end{bmatrix} \tag{9.36}$$

le calcul du contrôleur se faisant par une réalisation minimale de $\tilde{T}$.

Pour résoudre ce problème, nous allons introduire dans le chapître suivant l'anneau des *fractions rationnelles propres stables.*

[11] c'est-à-dire dont les pôles sont à partie réelle négative stricte

Exercice 9.1 (Condition de réduction du bouclage) on reprend les notations du chapitre. Montrer qu'une condition nécessaire pour obtenir une forme réduite du bouclage est que les éléments de la matrice $W\tilde{W}_2$ soient premiers dans leur ensemble (en tant que polynômes); montrer que cette condition est inchangée si on permute W et $\tilde{W}_2$.

Chapitre 10

Anneau des fractions rationnelles propres stables

Ayant ramené, lors du chapitre précédent, l'étude de la stabilité du système bouclé à l'étude des pôles du transfert bouclé, il convient de procéder ici à une pause afin de préciser quelques propriétés des fractions rationnelles propres *stables*.

On montrera dans ce chapitre que les fractions rationnelles propres stables forment un *anneau euclidien*, et que le corps des fractions qui lui est associé est le corps des fractions rationnelles tout entier. Nous pourrons donc appliquer les résultats des chapitres 2 à 3 à l'étude de la stabilité des transferts.

10.1 Définition

Définition 10.1 (Anneau des fractions rationnelles propres $\mathcal{D}$-stables) *Soit $\mathcal{D}$ une partie du plan complexe symétrique par rapport à l'axe réel, et contenant un point de celui-ci. Une fractions rationnelle à coefficients réels est dite propre $\mathcal{D}$-stable si elle est propre et si tous ses pôles sont dans $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ l'ensemble de telles fractions rationnelles.*

Interprétation:

- les coefficients de la fraction rationnelle étant réels, on ne perd rien à prendre $\mathcal{D}$ symétrique par rapport à l'axe réel, puisque ses pôles le sont nécessairement.
- le point réel de $\mathcal{D}$ nous sera utile pour montrer que le corps engendré par l'anneau est le corps des fractions rationnelles, ainsi que pour exhiber une division euclidienne.
- si $\mathcal{D}$ est l'ensemble des complexes à partie réelle négative stricte, on retrouve la notion habituelle de stabilité. Si on s'intéresse au temps discret, on peut prendre $\mathcal{D}$ égal au disque unité ouvert. Enfin, il arrive couramment que, pour des raisons pratiques, on exige que les pôles soit dans un domaine du type de la figure 10.1, qui spécifie que le rapport des fréquences propres aux taux d'amortissement réél doit être inférieur à une certaine constante.

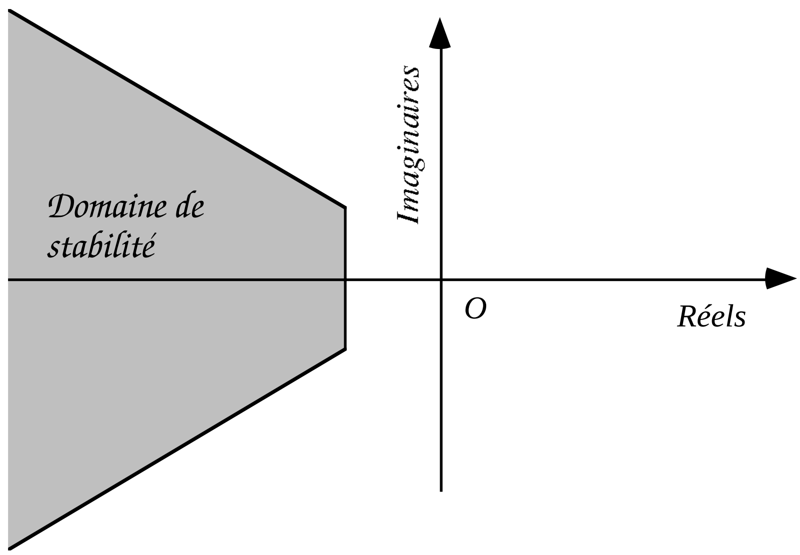

Figure 10.1: Domaine de stabilité.

10.2 Propriétés élémentaires

Théorème 10.1 *$\mathcal{S}_\mathcal{D}$ est une anneau commutatif, unitaire, intègre.*

Preuve: on vérifie que $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ est un sous-anneau du corps des fractions rationnelles.

Théorème 10.2 (Corps engendré) *Le corps des fractions engendré par $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ est le corps des fractions rationnelles.*

Preuve: il suffit de montrer que toute fraction rationnelle peut s'écrire comme le rapport de deux fractions rationnelles propres stables. Considérons donc une fraction rationnelle $r(s)$ se décomposant sous la forme suivante:

$$r = \frac{p_i p_s}{q_i q_s} \tag{10.1}$$

où les zéros de p_s et q_s sont dans $\mathcal{D}$ (on dira que p_s et q_s sont stables), et où les zéros de p_i et q_i sont hors de $\mathcal{D}$ (on dira que p_s et q_s sont instables).

Soit $n = \mathrm{Max}(\deg p_i - \deg q_s, \deg q_i - \deg p_s)$, τ un élément réel de $\mathcal{D}$, et posons

$$n(s) = \frac{p_i(s)}{q_s(s)(s-\tau)^n} \quad , \quad d(s) = \frac{q_i(s)}{p_s(s)(s-\tau)^n} \tag{10.2}$$

Alors n et d sont propres stables, avec $\frac{n}{d} = r$.

10.3 Division euclidienne

Nous allons montrer dans cette section que $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ est un anneau euclidien. Commençons par définir une fonction degré:

Définition 10.2 (Degré d'une fraction rationnelle propre stable) *irréductible*[1] *d'une fraction rationnelle propre stable, avec p_i instable, p_s et q_s stables. On définit la fonction degré $\delta_\mathcal{D}$ par*

$$\delta_\mathcal{D}(r) = \deg q_s - \deg p_s \tag{10.3}$$

Remarque: le lecteur vérifiera que cette définition est indépendante du choix du représentant.

Théorème 10.3 (Propriétés élémentaires)

- *le degré d'une fraction rationnelle propre stable est égal à la somme*
  - *du nombre de zéros instables de la fraction et*
  - *du degré de la fraction en tant que fraction rationnelle propre, c'est-à- dire la différence entre le degré du dénominateur et le degré du numérateur*
- *le degré du produit est égal à la somme des degrés.*
- *le degré d'une fractions rationnelle propre stable est nul si et seulement si cette fraction est inversible dans l'anneau $\mathcal{S}_\mathcal{D}$.*

Preuve: la première propriété est triviale; la seconde s'en déduit; enfin la troisième se déduit de la seconde.

Pour prouver que $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ est un anneau euclidien, il nous suffit maintenant de prouver l'existence d'une division euclidienne asociée à $\delta_\mathcal{D}$.

Lemme 10.1 Soit $\mathcal{A}$ un anneau euclidien, a, b, c trois éléments de $\mathcal{A}$, a et b étant premiers entre eux, b non nul. Alors il existe deux éléments x et y de $\mathcal{A}$ tels que

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ x = 0 \quad ou \quad \deg x < \deg b \end{array}\right\} \tag{10.4}$$

Preuve: a et b étant premiers entre eux, il existe donc x_1 et y_1 tels que

$$ax_1 + by_1 = 1 \tag{10.5}$$

[1] dans le corps des fractions rationnelles considéré comme corps des fractions de l'anneau des polynômes

d'où

$$acx_1 + bcy_1 = c \tag{10.6}$$

Effectuons maintenant la division euclidienne de x_1c par b

$$\left.\begin{array}{r} x_1c = bq + x \\ x = 0 \quad ou \quad \deg x < \deg b \end{array}\right\} \tag{10.7}$$

on a alors

$$ax + b(y_1c + aq) = c \tag{10.8}$$

d'où le résultat.

Construisons maintenant une division euclidienne sur $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$.

Soit a et b deux fractions rationnelles propres stables; on cherche à diviser a par b. Remarquons que dans la cas où le degré de b est strictement supérieur à celui de a, le problème de la division se résoud comme d'habitude trivialement en prenant le quotient nul. En notant n le degré de b et m le degré de a, on supposera donc désormais $m \geq n$. Par ailleurs, on notera α_i et β_i les parties instables des numérateurs de a et b, respectivement. Enfin, à une fraction rationnelle propre stable r de degré δ et se décomposant de la manière suivante:

$$r = \frac{n_i n_s}{d_s} \tag{10.9}$$

où la fraction précédente est irréductible avec n_i instable et n_s et d_s stables, on associe la fraction suivante

$$e(r) = \frac{n_s(s-\tau)^\delta}{d_s} \tag{10.10}$$

Remarquons que $e(r)$ est inversible dans $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$.

Lemme 10.2 on reprend les notations précédentes, et on considère deux fractions rationnelles propres stables x et y; on note les parties instables de leurs numérateurs respectivement x_i et y_i. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes:

- $xe(x)^{-1}e(a)e(b)^{-1}$ et $ye(y)^{-1}e(a)$ sont respectivement le quotient et le reste d'une division euclidienne de a par b
- il existe un entier k strictement supérieur à $m - n$ tel que

  $$\alpha_i = \beta_i x_i + y_i(s-\tau)^k \tag{10.11}$$

  avec $k = m - \delta_{\mathcal{D}}(y)$

Preuve: la première condition s'écrit:

$$\left.\begin{array}{r} a = xe(x)^{-1}e(a)e(b)^{-1}b + ye(y)^{-1}e(a) \\ y = 0 \quad ou \quad \delta_{\mathcal{D}}(ye^{-1}(y)e(a)) < \delta_{\mathcal{D}}(b) \end{array}\right\} \tag{10.12}$$

c'est-à-dire:

$$\left.\begin{array}{r} ae(a)^{-1} = xe(x)^{-1}e(b)^{-1}b + ye(y)^{-1} \\ y = 0 \quad ou \quad \delta_{\mathcal{D}}(y) < \delta_{\mathcal{D}}(b) \end{array}\right\} \tag{10.13}$$

soit

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\alpha_i}{(s-\tau)^m} = \frac{x_i}{(s-\tau)^{m-n}}\frac{\beta_i}{(s-\tau)^n} + \frac{y_i}{(s-\tau)^{\delta_{\mathcal{D}}(y)}} \\ y = 0 \quad ou \quad \delta_{\mathcal{D}}(y) < \delta_{\mathcal{D}}(b) \end{array}\right\} \tag{10.14}$$

en remarquant que nécessairement (dans la première condition du lemme), le degré de bx doit être égal à celui de a.

Cette dernière condition est encore équivalente à l'existence de $k > m-n$ avec $k = m-\delta_{\mathcal{D}}(y)$ tel que

$$\alpha_i = \beta_i x_i + y_i(s-\tau)^k \tag{10.15}$$

Interprétation: il est à peu près évident que le problème de l'existence d'une division euclidienne est inchangé si on multiplie chacun de ses éléments par un élément inversible. C'est pourquoi on remplace a, b, x et y par leur version "normalisée", c'est-à-dire le rapport de leur partie instable à la partie stable "standard" $(s-\tau)^l$, où l vaut le degré de la fraction dans $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$.

Remarquons que β_i et $(s-\tau)^k$ sont premiers entre eux, et que (10.15) ressemble fort à une identité de Bezout entre ces deux polynômes. Malheureusement, l'identité de Bezout sur les polynômes ne nous garantit pas des coefficients x et y instables. Nous allons, par un choix astucieux de k, nous débarasser de cette dernière condition. Pour ce faire, utilisons le lemme (10.1); étant donné k, α_i et β_i, il existe donc x_1 et y_1, avec $x_1 = 0$ ou $\deg x_1 < \deg \beta_i$, tels que:

$$\alpha_i = x_1\beta_i + y_1(s-\tau)^k \tag{10.16}$$

soit encore

$$\frac{\alpha_i}{(s-\tau)^m} = \frac{\beta_i}{(s-\tau)^n}\frac{x_1}{(s-\tau)^{m-n}} + \frac{y_1}{(s-\tau)^{m-k}} \tag{10.17}$$

Pour résoudre le problème de la division euclidienne, il nous suffit de prendre k tel que $\frac{x_1}{(s-\tau)^{m-n}}$ soit propre ($\frac{y_1}{(s-\tau)^{m-k}}$ est alors propre, puisque les fractions rationnelles propres forment un anneau) et tel que $\delta_{\mathcal{D}}(\frac{y_1}{(s-\tau)^{m-k}}) < n$.

- première condition: elle est vérifiée si x_1 est nul. Sinon on sait que $\deg x_1 \leq k-1$; il suffit donc de prendre $k \leq m-n+1$.
- deuxième condition: le degré $\delta_{\mathcal{D}}$ d'une fraction rationnelle propre stable est inférieur ou égal à celui de son dénominateur[2]; il suffit donc d'avoir $m-k<n$.

En regroupant les deux conditions, on voit que $k = m-n+1$ convient.

Cela nous permet d'énoncer le théorème suivant:

Théorème 10.4 (Division euclidienne) *Soit a et b deux fractions rationnelles propres stables. On suppose que le degré m de a est supérieur où égal au degré n de b. Soit x_1 et y_1 deux polynômes tels que*

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_i = x_1\beta_i + y_1(s-\tau)^{m-n+1} \\ x_1 = 0 \quad ou \quad \deg x_1 < m-n+1 \end{array}\right\} \tag{10.18}$$

où α_i (resp. β_i) représente la partie instable du numérateur de a (resp. du numérateur de b). Alors les fractions rationnelles x et y définies par

$$x = \frac{x_1}{(s-\tau)^{m-n}}e(a)e(b)^{-1} \quad , \quad y = \frac{y_1}{(s-\tau)^{n-1}}e(a) \tag{10.19}$$

sont propres stables, et telles que:

$$\left.\begin{array}{r} a = bx+y \\ y = 0 \quad ou \quad \delta_{\mathcal{D}}(y) < \delta_{\mathcal{D}}(b) \end{array}\right\} \tag{10.20}$$

[2]en tant que polynôme

Preuve: bien que ce théorème de déduise de ce qui précède, nous allons le vérifier en faisant le calcul directement.

On a

$$\alpha_i = x_1\beta_i + y_1(s-\tau)^{m-n+1} \tag{10.21}$$

d'où

$$\frac{\alpha_i}{(s-\tau)^m} = \frac{\beta_i}{(s-\tau)^n}\frac{x_1}{(s-\tau)^{m-n}} + \frac{y_1}{(s-\tau)^{n-1}} \tag{10.22}$$

c'est-à-dire

$$ae(a)^{-1} = be(b)^{-1}\frac{x_1}{(s-\tau)^{m-n}} + \frac{y_1}{(s-\tau)^{n-1}} \tag{10.23}$$

Comme $e(x_1)$ et $e(y_1)$ valent 1, on en déduit que

$$a = bx + y \tag{10.24}$$

Si x_1 n'est pas nul, on a $\deg x_1 < m+n+1$, c'est-à-dire $\deg x_1 \leq m-n$. On en déduit que x est propre; x est visiblement stable; on en déduit que y est propre stable.

Enfin, si y est non nul, on a $\delta_{\mathcal{D}}(y) \leq n-1 < n$.

Ceci nous permet de conclure par le théorème suivant:

Théorème 10.5 *$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ est un anneau euclidien.*

10.4 Exercices

Exercice 10.1 Soit T une matrice rationnelle *strictement* propre, stable, et ND^{-1} (resp. $D^{-1}N$) une factorisation à droite (resp. à gauche) irréductible de T dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$. Montrer que D est bipropre, i.e. propre d'inverse propre.

Exercice 10.2 Soient a et b deux fractions rationnelles propres stables. Montrer qu'elles sont premières entre elles si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées:

- l'une d'entre elles est bipropre, i.e. propre d'inverse propre.
- elles n'ont aucun zéro instable en commun

On évitera d'avoir recours à la condition de Bezout pour établir la condition suffisante, le calcul de cette identité étant non trivial! (c.f. exercice suivant)

Exercice 10.3 (Identité de Bezout scalaire) Soient a et b deux fractions rationnelles propres stables premières entre elles, avec b bipropre (c.f. exercice précédent). On se donne une représentation irréductible $\frac{p}{q}$ (resp. $\frac{n}{d}$) de a (resp. b) dans le corps de fractions rationnelles sur l'anneau des polynômes, et on décompose p suivant une partie instable p_i et une partie stable p_s. Enfin, on se donne un réel τ dans le domaine de stabilité et un entier k.

1. Montrer qu'il existe deux polynômes λ et μ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda p_i + \mu n = (s-\tau)^k \\ \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad (\deg n > 0 \quad \text{et} \quad \deg \lambda < \deg n) \end{array} \right. \tag{10.25}$$

2. On suppose maintenant $k \geq \deg n + \deg q - \deg p_s$, et on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{\lambda q}{p_s (s-\tau)^k} \\ \mu_1 = \frac{\mu d}{(q-\tau)^k} \end{array} \right. \tag{10.26}$$

Montrer que λ_1 et μ_1 sont propres stables, avec

$$\lambda_1 a + \mu_1 b = 1 \tag{10.27}$$

Chapitre 11

Assignation de modèle

Nous avons défini, au chapitre 9, un opérateur de *bouclage* $\mathcal{B}$, qui, à un système Σ et un contrôleur $\tilde{\Sigma}$, associe un système bouclé $\mathcal{B}(\Sigma, \tilde{\Sigma})$. Diverses considérations nous ont alors conduit à substituer à l'étude de l'opérateur $\mathcal{B}$ celle de l'opérateur induit $\mathcal{B}_T$ qui, aux transferts de Σ et $\tilde{\Sigma}$, associe le transfert du système bouclé $\mathcal{B}(\Sigma, \tilde{\Sigma})$.[1]

Ce chapitre sera consacré à l'étude de l'équation $\mathcal{B}_T(T, \tilde{T}) = T_b$, l'inconnue étant la matrice rationnelle $\tilde{T}$, les données étant la matrice rationnelle T et la matrice rationnelle propre stable T_b. La résolution de cette équation constitue l'*assignation* du modèle propre stable T_b au transfert T.

La première section sera consacrée à l'étude de l'existence d'une solution; la seconde au calcul de la solution lorsqu'elle existe; enfin une troisième section sera consacrée à l'étude de questions annexes.

[1]cet opérateur est obtenu est quotientant l'ensemble des systèmes par l'égalité des transferts, le bouclage étant compatible avec une telle relation

11.1 Paramétrisation des contrôleurs stabilisants

Nous allons étudier sous quelles conditions, étant donné un transfert T du système à contrôler, un contrôleur de transfert $\tilde{T}$ engendre un système bouclé de transfert propre $\mathcal{D}$ stable. Dans tout ce qui suit on supposera implicitement que *le bouclage est bien posé*, c'est-à-dire, aux problèmes triviaux de dimensions près, que $Id - \tilde{T}_2 T$ est de rang plein.

11.1.1 Factorisation du transfert du système bouclé

Lemme 11.1 On reprend les notations de l'équation (9.36), et on se donne une factorisation[2] à droite[3] ND^{-1} de T, et $\tilde{D}^{-1}\begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & \tilde{N}_2 \end{bmatrix}$ une factorisation à gauche de $\tilde{T}$. Alors T_b se met sous la forme $\mathcal{R}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}$ avec

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} -\tilde{N}_2 N & \tilde{D} \\ D & -Id \end{bmatrix} \tag{11.2}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & 0 & \tilde{N}_2 \\ 0 & Id & 0 \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Preuve: on a

$$T_b = \begin{bmatrix} T\Delta^{-1}\tilde{T}_1 & T\Delta^{-1} & T\Delta^{-1}\tilde{T}_2 \\ \Delta^{-1}\tilde{T}_1 & \Delta^{-1} - Id & \Delta^{-1}\tilde{T}_2 \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

$$= \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^{-1} & \Delta^{-1} \\ \Delta^{-1} & \Delta^{-1} - Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_1 & 0 & \tilde{T}_2 \\ 0 & Id & 0 \end{bmatrix} \tag{11.5}$$

$$= \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta^{-1} & \Delta^{-1} \\ \Delta^{-1} & \Delta^{-1} - Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}^{-1} & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & 0 & \tilde{N}_2 \\ 0 & Id & 0 \end{bmatrix} \tag{11.6}$$

(11.7)

L'inverse de la matrice du centre s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \Delta - Id & Id \\ Id & -Id \end{bmatrix} \tag{11.8}$$

d'où

$$T_b = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta - Id & Id \\ Id & -Id \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{D}^{-1} & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & 0 & \tilde{N}_2 \\ 0 & Id & 0 \end{bmatrix} \tag{11.9}$$

$$= \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{D}\Delta D - \tilde{D}D & \tilde{D} \\ D & -Id \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & 0 & \tilde{N}_2 \\ 0 & Id & 0 \end{bmatrix} \tag{11.10}$$

$$= \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tilde{N}_2 N & \tilde{D} \\ D & -Id \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & 0 & \tilde{N}_2 \\ 0 & Id & 0 \end{bmatrix} \tag{11.11}$$

d'où le résultat.

[2]dans un anneau dont le corps engendré contient celui des fractions rationnelles; a priori, $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$.
[3]non nécessairement irréductible

Théorème 11.1 (Factorisation du transfert bouclé) *On se donne une factorisation à droite irréductible ND^{-1} de T dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ et $\tilde{D}^{-1}\left[\begin{array}{cc}\tilde{N}_1 & \tilde{N}_2\end{array}\right]$ une factorisation à gauche irréductible de $\tilde{T}$ dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$. On pose*

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix} \tag{11.12}$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} -\tilde{N}_2 N & \tilde{D} \\ D & -Id \end{bmatrix} \tag{11.13}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & 0 & \tilde{N}_2 \\ 0 & Id & 0 \end{bmatrix} \tag{11.14}$$

Alors $\mathcal{R}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}$ est une factorisation bi-irréductible de T_b dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$.

Preuve: la factorisation résulte du lemme précédent; le fait qu'elle soit irréductible se déduit facilement de l'irréductibilité des factorisations de départ.

Du théorème précédent, du théorème 4.5 et du lemme 9.3 on déduit facilement le théorème suivant:

Théorème 11.2 (Caractérisation des contrôleurs stabilisants) *On se donne une factorisation à droite irréductible ND^{-1} de T dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ et $\tilde{D}^{-1}\left[\begin{array}{cc}\tilde{N}_1 & \tilde{N}_2\end{array}\right]$ une factorisation à gauche irréductible de $\tilde{T}$ dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$. Alors le transfert T_b du bouclage de T par $\tilde{T}$ est propre stable si et seulement si $\tilde{N}_2 N - \tilde{D}D$ est unimodulaire dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$.*

Preuve: on sait qu'une factorisation bi-irréductible est entière si et seulement si le dénominateur est unimodulaire; le calcul de son inverse dans le cas présent montre que ce dernier est entier si et seulement si $(\tilde{N}_2 N - \tilde{D}D)^{-1}$ l'est.

Remarque: si $\tilde{N}_2 N - \tilde{D}D$ est unimodulaire, alors $Id - \tilde{T}_2 T$ est de rang plein, et le bouclage est bien posé.

11.1.2 Paramétrisation des contrôleurs stabilisants

La condition d'unimodularité sur $\tilde{N}_2 N - \tilde{D}D$ revient à dire que $\tilde{D}$ et $\tilde{N}_2$ sont des coefficients de Bezout pour la paire (N, D) de matrices premières entre elles à droite. Or nous savons décrire l'ensemble de tels coefficients (théorème 3.9). On en déduit le théorème suivant:

Théorème 11.3 (Paramétrisation des contrôleurs stabilisants) *On se donne une factorisation à droite irreductible ND^{-1} de T dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$, X et Y à élements dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ tels que $XD + YN = Id$, et $\bar{D}^{-1}\bar{N}$ une factorisation à gauche irreductible de T. Alors le transfert T_b du bouclage de T par $\tilde{T}$ est propre stable si et seulement si il existe deux matrices Π et $\tilde{N}_1$ à éléments dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ telles que*

- *$X + \Pi\bar{N}$ soit de rang plein*
- *$\tilde{T} = \left[\begin{array}{ccc}\tilde{T}_1 & , & \tilde{T}_2\end{array}\right] = (X + \Pi\bar{N})^{-1}\left[\begin{array}{ccc}\tilde{N}_1 & , & -Y + \Pi\bar{D}\end{array}\right]$*

Preuve:

- condition suffisante: il suffit de constater que $(X + \Pi\bar{N})D + (Y - \Pi\bar{D})N = Id$; on en déduit qu'en posant

$$\tilde{D} = X + \Pi\bar{N} \tag{11.15}$$

$$\tilde{N}_2 = -Y + \Pi\bar{D} \tag{11.16}$$

$\tilde{D}^{-1}\left[\begin{array}{cc}\tilde{N}_1 & \tilde{N}_2\end{array}\right]$ est une factorisation à gauche irréductible de $\tilde{T}$ telle que $\tilde{N}_2N - \tilde{D}D$ soit unimodulaire, et d'appliquer le théorème précédent. On remarque au passage que $Id - \tilde{T}_2T$ est alors de rang plein, et le bouclage est bien posé.

- condition nécessaire: on se donne donc une factorisation à gauche irréductible $\tilde{D}^{-1}\left[\begin{array}{cc}\tilde{N}_1 & \tilde{N}_2\end{array}\right]$ de $\tilde{T}$; d'après le théorème précédent, il existe une unimodulaire U telle que

$$U\tilde{N}_2N - U\tilde{D}D = Id \tag{11.17}$$

On en déduit (théorème 3.9) qu'il existe une matrice entière Π telle que

$$\begin{aligned} U\tilde{D} &= X + \Pi\bar{N} &(11.18)\\ -U\tilde{N}_2 &= Y - \Pi\bar{D} &(11.19)\end{aligned}$$

En particulier $X + \Pi\bar{N}$ est de rang plein, puisque $\tilde{D}$ l'est; enfin, on a

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2 &= (X + \Pi\bar{N})^{-1}(-Y + \Pi\bar{D}) &(11.20)\\ \tilde{T}_1 &= (X + \Pi\bar{N})^{-1}(U\tilde{N}_1) &(11.21)\end{aligned}$$

d'où le résultat en renommant $U\tilde{N}_1$, $\tilde{N}_1$.

Corollaire 11.1 (Stabilisation d'un système) Pour tout système stabilisable et détectable il existe un contrôleur[4] tel que le bouclage du système par ce contrôleur soit exponentiellement stable.[5]

Preuve: il suffit de se donner Π et $\tilde{N}_1$, et de réaliser le transfert du contrôleur par une réalisation minimale, donc commandable et observable.

Corollaire 11.2 (Expression du transfert bouclé dans le cas stable) On reprend les notations du théorème précédent. Soit $\tilde{T}$ tel que le bouclage T_b de T par $\tilde{T}$ soit propre stable (on dit que $\tilde{T}$ est un contrôleur stabilisant pour T), soit Π et $\tilde{N}_1$ tels que $\tilde{T} = \left[\begin{array}{cc}\tilde{T}_1 & , & \tilde{T}_2\end{array}\right] = (X + \Pi\bar{N})^{-1}\left[\begin{array}{ccc}\tilde{N}_1 & , & -Y + \Pi\bar{D}\end{array}\right]$. Alors le transfert bouclé vaut

$$T_b = \left[\begin{array}{ccc} N\tilde{N}_1 & N(X + \Pi\bar{N}) & N(-Y + \Pi\bar{D}) \\ D\tilde{N}_1 & D(X + \Pi\bar{N}) - Id & D(-Y + \Pi\bar{D}) \end{array}\right] \tag{11.22}$$

Preuve: On vérifie qu'alors $\Delta^{-1} = D\tilde{D}$. Or T_b s'exprime sous la forme suivante (équation (11.6)):

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & Id \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} D^{-1} & 0 \\ 0 & Id \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \Delta^{-1} & \Delta^{-1} \\ \Delta^{-1} & \Delta^{-1} - Id \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} \tilde{D}^{-1} & 0 \\ 0 & Id \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} \tilde{N}_1 & 0 & \tilde{N}_2 \\ 0 & Id & 0 \end{array}\right] &(11.23)\\ = & \left[\begin{array}{cc} N & 0 \\ 0 & Id \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} Id & \tilde{D} \\ D & D\tilde{D} - Id \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} \tilde{N}_1 & 0 & \tilde{N}_2 \\ 0 & Id & 0 \end{array}\right] &(11.24)\\ = & \left[\begin{array}{ccc} N\tilde{N}_1 & N\tilde{D} & N\tilde{N}_2 \\ D\tilde{N}_1 & D\tilde{D} - Id & D\tilde{N}_2 \end{array}\right] &(11.25)\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à substituer les valeurs de $\tilde{D}$ et de $\tilde{N}_2$.

[4]en fait, une infinité

[5]on peut remplacer la stabilité exponentielle par la $\mathcal{D}$-stabilité, à condition de modifier en conséquence la définition de la stabilisabilité et de la détectabilité.

11.2 Assignation de modèle

11.2.1 Transferts assignable et calcul du contrôleur

Nous allons passer maintenant à la résolution de l'équation (9.36). Commençons par une définition:

Définition 11.1 (Assignabilité) *Une matrice rationnelle propre stable T_b est assignable à une matrice rationnelle T s'il existe une matrice rationnelle $\tilde{T}$ de taille adéquate telle que T_b soit égal au transfert bouclé de T par $\tilde{T}$, soit*

$$T_b = \begin{bmatrix} T\Delta^{-1}\tilde{T}_1 & T\Delta^{-1} & T\Delta^{-1}\tilde{T}_2 \\ \Delta^{-1}\tilde{T}_1 & \Delta^{-1} - Id & \Delta^{-1}\tilde{T}_2 \end{bmatrix} \tag{11.26}$$

avec $\Delta = Id - \tilde{T}_2 T$[6]

Lemme 11.2 Soit Q et P premières entre elles à droite, avec P carrée de rang plein. On note G la matrice $\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix}$. On se donne deux autres matrices de tailles convenables M et D, et on suppose que

- G divise M à gauche
- D divise M à droite

Alors il existe une matrice M_1 telle que $M = GM_1D$.

Preuve: on sait qu'il existe une unimodulaire U telle que

$$UG = \begin{bmatrix} Id \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.27}$$

Soit d'autre part M_2 et M_3 telles que $M = GM_2 = M_3D$. Alors

$$\begin{aligned} UM_3D &= UM && (11.28)\\ &= UGM_2 && (11.29)\\ &= \begin{bmatrix} Id \\ 0 \end{bmatrix} M_2 && (11.30)\\ &= \begin{bmatrix} M_2 \\ 0 \end{bmatrix} && (11.31) \end{aligned}$$

On en déduit facilement que D divise M_2 à droite, et le résultat.

Théorème 11.4 (Assignation de modèle) *Soit T une matrice rationnelle et T_b une matrice rationnelle propre stable, de tailles adéquates*[7].

On se donne une factorisation à droite irreductible ND^{-1} de T dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$, X et Y à élements dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ tels que $XD + YN = Id$, et $\bar{D}^{-1}\bar{N}$ une factorisation à gauche irreductible de T.

On pose

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Id & 0 \end{bmatrix} \tag{11.32}$$

[6] Δ est donc implicitement inversible

[7] c'est-à-dire telles qu'on puisse envisager T_b comme le bouclage par un contrôleur

$$T_d = \begin{bmatrix} 0 \\ Id \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.33}$$

$$T_g = \begin{bmatrix} Y & X \end{bmatrix} \tag{11.34}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & X & -Y \end{bmatrix} - T_1 \tag{11.35}$$

Alors T_b est assignable à T si et seulement si

- $\begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix}$ *divise $T_b - T_2$ à gauche*
- $\begin{bmatrix} Id & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N} & \bar{D} \end{bmatrix}$ *divise $T_b - T_2$ à droite*
- *$T_g(T_b + T_1)T_d$ est de rang plein*

Preuve:

- condition nécessaire: on sait (théorème 11.3 et corollaire 11.2) qu'il existe Π et $\tilde{N}_1$ propres stables telles que
  - $X + \Pi\bar{N}$ soit de rang plein
  - $T_b = \begin{bmatrix} N\tilde{N}_1 & N(X + \Pi\bar{N}) & N(-Y + \Pi\bar{D}) \\ D\tilde{N}_1 & D(X + \Pi\bar{N}) - Id & D(-Y + \Pi\bar{D}) \end{bmatrix}$

  On a alors
  $$T_b - T_2 = \begin{bmatrix} N\tilde{N}_1 & N\Pi\bar{N} & N\Pi\bar{D} \\ D\tilde{N}_1 & D\Pi\bar{N} & D\Pi\bar{D} \end{bmatrix} \tag{11.36}$$
  On vérifie alors facilement les deux premières propriétés; d'autre part $T_g(T_b + T_1)T_d$ vaut très exactement $X + \Pi\bar{N}$, ce qui prouve la troisième propriété.

- d'après le lemme précédent, on sait qu'il existe une matrice M_1, qu'on peut mettre sous la forme $M_1 = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & \Pi \end{bmatrix}$, telle que
  $$T_b - T_2 = \begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N} & \bar{D} \end{bmatrix} \tag{11.37}$$
  On vérifie alors que $T_g(T_b + T_1)T_d$ vaut $X + \Pi\bar{N}$, qui est donc de rang plein. On sait alors que le contrôleur $\tilde{T}$ donné par
  $$\tilde{T} = (X + \Pi\bar{N})^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 & , & -Y + \Pi\bar{D} \end{bmatrix} \tag{11.38}$$
  est un contrôleur stabilisant; or, justement, le transfert bouclé obtenu à partir de T et $\tilde{T}$ vaut T_b (corollaire 11.2). T_b est donc assignable à T.

Remarques:

- l'assignabilité d'un transfert est donc équivalente à:
  - une condition de divisibilité à gauche
  - une condition de divisibilité à droite (de la même matrice)
  - une condition de rang.
- lorsque les conditions de divisibilité sont satisfaites, le lemme précédent nous permet de calculer Π et $\tilde{N}_1$, et donc le contrôleur réalisant l'assignation de modèle.

11.2.2 Zéros instables du transfert bouclé

Afin de définir les zéros instables d'un transfert, commençons par prouver le lemme suivant:

Lemme 11.3 Soit T une matrice rationnelle, $D_1^{-1}N_1$ et $D_2^{-1}N_2$ deux factorisations à gauche irréductibles de T dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ (resp. $N_1D_1^{-1}$ et $N_2D_2^{-1}$ deux factorisations à droite irréductibles de T dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$).

Soit s_0 un complexe instable. Alors

- $N_1(s_0)$ et $N_2(s_0)$ sont définis
- s_0 fait chuter le rang de N_1[8] si et seulement si s_0 fait chuter le rang de N_2.

Preuve: on s'intéressera à la factorisation à gauche.

- $N_1(s_0)$ et $N_2(s_0)$ sont définis car leurs pôles sont stables; or s_0 est instable.
- on sait qu'il existe U, unimodulaire dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$, telle que $N_1 = UN_2$ (unicité des factorisations irréductibles). Là encore, $U(s_0)$ est défini; de plus, $U(s_0)$ étant inversible, les zéros de son déterminant sont stables (ce sont les pôles de son inverse). On a donc $N_1(s_0) = U(s_0)N_2(s_0)$; $N_1(s_0)$ et $N_2(s_0)$ ont donc le même rang. Comme N_1 et N_2 ont le même rang, cela prouve le résultat.

Nous pouvons donc donner la définition suivante:

Définition 11.2 (Zéros instables) *Un complexe instable s_0 est un zéro instable à droite (resp. à gauche) d'une matrice rationnelle T si et seulement si s_0 fait chuter le rang du numérateur d'une factorisation à gauche (resp. à droite) irréductible de T dans $\mathcal{S}_\mathcal{D}$.*

Remarque: nous parlons de zéros *à droite* parce que dans une factorisation à gauche, le numérateur est à droite.

Théorème 11.5 (Zéros instables du transfert bouclé) *Soit T une matrice rationnelle et $\tilde{T}$ un transfert stabilisant T, de paramètres $\tilde{N}_1$ et Π. On suppose que dans $\tilde{T}$ le transfert de la consigne vars la commande est surjectif[9]. Alors les zéros instables à gauche de T sont des zéros instables de la partie du transfert bouclé reliant la consigne à la sortie[10].*

Preuve: soit s_0 un zéro instable de T. Alors

$$\mathrm{rang} N(s_0)\tilde{N}_1(s_0) \leq \mathrm{rang} N(s_0) < \mathrm{rang} N = \mathrm{rang} N\tilde{N}_1 \tag{11.39}$$

Or $N\tilde{N}_1$ est le numérateur d'une factorisation irreductible du transfert de la consigne vers la sortie, puisque ce dernier est propre stable; on en déduit que s_0 est un zéro instable (à gauche et à droite) de ce dernier.

Interprétation: la contrainte d'avoir un transfert bouclé stable interdit d'éliminer les zéros instables par "simplification".

[8] i.e., rappelons-le, le rang de $N_1(s_0)$ en tant que matrice complexe, est inférieur strict au rang de N_1 en tant que matrice rationnelle

[9] autrement dit, on n'a pas restreint sa marche de manœuvre par le choix des consignes

[10] à gauche et à droite

11.3 Régularité de $X + \Pi\bar{N}$ et questions connexes

Nous avons vu que l'assignabilité d'un transfert était équivalente à deux questions de divisibilité et à une de rang. Si les deux premiers problèmes sont assez faciles à appréhender, le troisième l'est plus difficilement. Nous allons donner quelques conditions suffisantes sur cette condition de rang.

Lemme 11.4 Soit A une matrice carrée à éléments dans un anneau euclidien[11], qu'on suppose non nulle, et a un PGCD des éléments de A. Alors le déterminant de $Id + A$ est de la forme $1 + ra$, autrement dit, a divise $\det(Id + A) - 1$.

Preuve: on procèdera par récurrence sur la taille n de A, le résultat étant trivialement vrai pour $n = 1$. Supposons donc le résultat vrai pour n, et considérons A de taille $n + 1$. On note B la matrice obtenue à partir de A en rayant première ligne et première colonne. Si B est non nulle, on note b un PGCD des éléments de B.

Développons le déterminant de $Id + A$ suivant la première colonne; on voit que $\det(Id + A)$ est de la forme

$$\det(Id + A) = pa + (1 + a_{1,1}) \det(Id + B) \tag{11.40}$$

Si B est nulle, le résultat est prouvé, sinon, $\det(Id + B)$ est de la forme $1 + qb$, par hypothèse de récurrence; d'où

$$\det(Id + A) = pa + (1 + a_{1,1})(1 + qb) \tag{11.41}$$

qui est de la forme

$$\det(Id + A) = 1 + ta + qb \tag{11.42}$$

Comme a divise b, cela prouve le résultat.

Continuons par un lemme un peu plus proche de nos préoccupations:

Lemme 11.5 Soit A et B deux matrices à éléments dans un anneau euclidien, A ayant plus de lignes que de colonnes, $B \neq 0$. Soit b un PGCD des éléments de B; on suppose que b n'est pas inversible. Alors $A + \Pi B$ est de rang plein pour toute matrice entière Π de taille adéquate.

Preuve: A ayant plus de lignes que de colonnes, $A + \Pi B$ est de rang plein si et seulement si elle est injective. Procédons par l'absurde, et supposons qu'il existe un vecteur non nul V tel que

$$(A + \Pi B)V = 0 \tag{11.43}$$

Soit X et Y tels que $XA + YB = Id$. On a alors:

$$(Id + (X\Pi - Y)B)V = 0 \tag{11.44}$$

d'où

$$\det(Id + (X\Pi - Y)B) = 0 \tag{11.45}$$

Notons c un PGCD des éléments de $(X\Pi - Y)B$ (qui ne peuvent être tous nuls); b divise c. Nous savons qu'il existe r tel que

$$\det(Id + (X\Pi - Y)B) = 1 + rc \tag{11.46}$$

Cette quantité étant nulle, on en déduit que c est inversible, et donc b.

Remarque: le résultat est encore vrai pour $B = 0$, puisqu'alors A est alors nécessairement unimodulaire.

Passons maintenant au résultat principal:

[11] ou plus simplement principal

Théorème 11.6 (Régularité de $X + \Pi\bar{N}$) *Soit T un transfert* strictement propre*, ND^{-1} une factorisation à droite irreductible de T dans $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$, X et Y à élements dans $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ tels que $XD + YN = Id$, et $\bar{D}^{-1}\bar{N}$ une factorisation à gauche irreductible de T.*

Alors, pour toute matrice rationnelle propre stable Π de taille adéquate, $X + \Pi\bar{N}$ est de rang plein, d'inverse propre. En particulier tous les contrôleurs stabilisants sont de transfert propre.

Preuve: nous allons délaisser provisoirement l'anneau des fraction rationnelle propres stables pour l'anneau $\mathcal{P}$ des fractions rationnelles propres. Remarquons que c'est un sur-anneau de $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$, et qu'à ce titre, tout ce qui à été fait comme hypothèses sur N, D, X, Y, etc... est encore vrai dans l'anneau des fractions rationnelles propres[12].

$\bar{N}$ est strictement propre, car $\bar{N} = T\bar{D}$, et $\bar{D}$ est propre, T strictement propre. En particulier $\Pi\bar{N}$ est strictement propre, et les PGCD de ses éléments sont strictement propres, donc non inversibles dans $\mathcal{P}$.

D'autre part, en reprenant les idées utilisées dans la preuve du théorème 3.7, il est assez facile de voir que la matrice $\begin{bmatrix} X & Y \\ -\bar{N} & \bar{D} \end{bmatrix}$ est unimodulaire dans $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$, et donc dans $\mathcal{P}$. En particulier X et $\bar{N}$ sont premières entre elles à droite, avec X carrée.

En appliquant le lemme 11.5, on voit que $X + \Pi\bar{N}$ est de rang plein pour toute matrice propre (en particulier propre stable) Π de taille adéquate.

Montrons maintenant que cette matrice est unimodulaire dans $\mathcal{P}$. Du lemme 11.4 on déduit que la somme d'une matrice bipropre (c'est-à-dire unimodulaire dans $\mathcal{P}$) et d'une matrice strictement propre est encore bibpropre. $\Pi\bar{N}$ étant strictement propre, il nous suffit de montrer que X est bipropre. Or on a $XD = Id - YN$, avec YN strictement propre; XD, d'après ce qui précède, est donc bipropre, et X également.

[12] en fait il suffit d'agrandir le domaine de stabilité

Problèmes

Mise en série de deux systèmes

On considère deux formes opérateurs (P_1, Q_1, R_1, W_1) et (P_2, Q_2, R_2, W_2). On définit la mise en série de la premiere par la seconde en assignant comme entrées de la seconde les sorties de la premiere, les entrées étant les entrées de la premiere et les sorties l'ensemble des sorties des deux systèmes. Plus rigoureusement, la mise en série des deux formes opérateurs est la forme opérateur (P_s, Q_s, R_s, W_s) définie par

$$\begin{aligned} P_s &= \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ -Q_2R_1 & -P_2 \end{bmatrix} \quad , \quad & Q_s &= \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2W_1 \end{bmatrix} \\ R_s &= \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ W_2R_1 & R_2 \end{bmatrix} \quad , \quad & W_s &= \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2W_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.47}$$

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une forme opérateur.
2. Montrer que la mise en série est compatible avec l'équivalence de formes opérateurs.
3. Montrer que le polynôme non observable de la mise en série deux systèmes est le produit de leurs polynômes non observables. Montrer que ce résultat est faux si on ne mesure pas la sortie du premier système.
4. Montrer par un exemple que la mise en série peut ne pas être commandable alors que les deux systèmes de départ le sont.
5. Montrer que le polynôme caractéristique de la mise en série est égal au produit des polynômes caractéristiques des deux systèmes. En déduire l'étude de la stabilité de la mise en série.
6. On note T_1 et T_2 les transferts des systèmes de départ. Montrer que le transfert de la mise en série s'écrit $\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2T_1 \end{bmatrix}$, ce qui justifie, en ce qui concerne la deuxième sortie, la règle suivante: "la mise en série de deux systèmes revient au produit de leurs transferts".
7. On s'intéresse à l'*inversibilité* d'un système. On considère un domaine de stabilite $\mathcal{D}$ et une forme opérateur (P_1, Q_1, R_1, W_1). On dira que (P_1, Q_1, R_1, W_1) est $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ inversible si il existe une mise en série de (P_1, Q_1, R_1, W_1), de transfert $\mathcal{D}$-stable, et dont le transfert de l'entrée vers la deuxième sortie soit l'identité.
   (a) Montrer que (P_1, Q_1, R_1, W_1) est $\mathcal{S}_\mathcal{D}$ inversible si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:
      i. (P_1, Q_1, R_1, W_1) a plus de sorties que d'entrées

ii. les lignes de son transfert T_1 sont premières entre elles à droite, ou, de manière équivalente, les formes d'Hermite supérieures de T_1 dans $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ sont de la forme

$$H = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.48}$$

D étant diagonale, d'éléments diagonaux bipropres bistables.

(b) On suppose que $\mathcal{D}$ est inclus dans la partie gauche stricte du plan complexe et que (P_1, Q_1, R_1, W_1) est stabilisable, détectable, $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ inversible. Construire une mise en série qui réalise l'inversion de (P_1, Q_1, R_1, W_1) et qui soit exponentiellement stable.

(c) On suppose que les deux formes opérateurs utilisées dans la mise en série précédente sont commandables et observables. Montrer que la mise en série n'est pas commandable. Expliquer directement ce résultat à partir du problème de l'inversion.

8. A titre d'exemple, inverser la forme observateur:

$$(s+2)y = (s+1)u \tag{11.49}$$

Application du cours à un exemple numérique

On considère une forme observateur $(P, Q, Id, 0)$ avec:

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^2+3s+2 & 0 \\ -s-2 & s-3 \end{bmatrix} \quad , \quad Q(s) = \begin{bmatrix} s+1 & s+1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{11.50}$$

1. Calculer les valeurs propres du système.
2. Calculer le polynômes non commandable et le polynôme non observable. Le système est-il stabilisable? Détectable?
3. Montrer que P est ligne propre.
4. Réaliser la forme opérateur.
5. Calculer le transfert T du système. On appelle *zéros* d'un transfert les nombres complexes faisant chuter le rang de celui-ci. Montrer que T n'a pas de zéro.
6. Montrer que T peut se mettre sous la forme $T = \Delta M$ où Δ est rationnelle diagonale et M constante, carrée, de rang plein.
7. En utilisant le résultat de l'exercice 10.2, calculer une factorisation irréductible à gauche (puis à droite) de T dans l'anneau des fractions rationnelles propres stables, en prenant comme domaine de stabilité la partie gauche stricte du plan complexe.
8. Montrer que $\frac{s-3}{s+2}$ et $\frac{1}{s+2}$ sont premières entre elles dans l'anneau des fractions rationnelles propres stables, et résoudre l'identité de Bezout associée[13].
9. en déduire la résolution de l'identité de Bezout sur les factorisations de l'avant-dernière question.
10. Paramétrer l'ensemble des contrôleurs stabilisant le système étudié.

[13] faire simple!

Index