# AVERAGING ET CONTROLE OPTIMAL DETERMINISTE

F. CHAPLAIS
Centre d'Automatique et d'Informatique
Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris
Fontainebleau - France

Résumé :

On s'intéresse ici au contrôle optimal de systèmes déterministes régis par des équations différentielles "rapidement oscillantes", et au comportement du problème d'optimisation lorsque la période tend vers zéro. On définit à partir du problème initial un nouveau problème de contrôle optimal, dit "problème moyenné".

Sous des hypothèses très générales, la fonction valeur du problème d'origine converge uniformément vers la fonction valeur du problème moyenné. Avec des hypothèses plus fortes, on montre que la commande optimale en boucle ouverte du problème moyenné engendre dans le système d'origine un coût optimal à l'ordre 2. Enfin on établit un lien entre le résultat précédent et un développement à priori de la fonction valeur.

Abstract :

The subject of this paper is the optimal control of "rapidly oscillating" deterministic systems, and the asymptotic behavior of the optimization problem as the period tends to zero. From the original problem, we define a new optimal control problem, the so-called "averaged problem".
Under weak assumptions, the value-function of the original problem tends uniformly to that of the averaged problem. Stronger assumptions ensure that the optimal open-loop control of the averaged problem induces a cost in the original system which is optimal up to the second order. Finally we relate the forementioned results to the a-priori developement of the value-function.

## INTRODUCTION :

L'approximation d'une dynamique rapidement oscillante par sa moyenne est loin d'être une idée nouvelle dans la théorie des équations différentielles ordinaires, puisqu'elle est depuis longtemps largement appliquée dans le domaine de la mécanique céleste, et qu'un long chapitre lui est consacré, par exemple, dans [1].

Néanmoins, l'utilisation théorique de cette technique dans la résolution de problèmes de contrôle optimal reste relativement récente ; on en trouve un exemple dans [5]. Notons que A. Bensoussan J.L. Lions et G. Papanicolaou ont largement traité dans [3] d'un problème voisin, puisqu'il s'agit de résoudre des équations aux dérivées partielles du second ordre, dont l'opérateur est rapidement oscillant.

A notre connaissance, la notion de problème moyenné utilisée largement ici est entièrement nouvelle. Elle permet en particulier de donner un sens à l'utilisation d'une commande en boucle ouverte extraite de ce problème, et donc d'en déduire les théorèmes d'approximation exposés ici.

Enfin précisons que les résultats énoncés dans cette étude, s'ils le sont dans un cadre relativement restreint, ouvrant la porte à de nombreuses heuristiques dans des cas plus incertains. Inversement, c'est à propos d'heuristiques développées lors d'un projet de gestion optimale de maison solaire [ 8 ], que s'est posé le problème de pourvoir une assise théorique à celles-ci, et, si possible, de leur trouver un prolongement ; c'est ainsi qu'est née cette étude.

## I - POSITION DU PROBLEME

On se donne
$$f : \mathbb{R}^n \times U^{ad} \times [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x,u,t,\theta) \longmapsto f(x,u,t,\theta)$$

et
$$L : \mathbb{R}^n \times U^{ad} \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,u,t) \longmapsto L(x,u,t)$$

où $U^{ad}$ est un domaine de $\mathbb{R}^p$, contenant 0, par exemple.

On fera sur f et L les hypothèses suivantes

($\mathcal{H}_1$) il existe $k>0$ tel que :

$$\begin{cases} |f(x,u,t,\theta)| \leqslant k(1+|x|+|u|) \text{ pour tout } x,\ \theta \text{ et tout } t \text{ de } [0,T],\ u \text{ de } U^{ad} \\ |L(x,u,t)| \leqslant k(1+|x|^2+|u|^2) \text{ pour tout } x, \text{ tout } t \text{ de } [0,T],\ u \text{ de } U^{ad} \\ f \text{ et } L \text{ sont de classe } C^1 \text{ en } x \text{ et } t. \\ |\frac{\partial L}{\partial x}(x,u,t)| \leqslant k(1+|x|+|u|) \\ \frac{\partial f}{\partial x} \text{ est borné} \end{cases}$$

($\mathcal{H}_2$) $\begin{cases} U^{ad} \text{ borné ou: } L(x,u,t) \geqslant k_1|u|^2-k_2 \text{ pour tout } x, \text{ tout } t \text{ de } [0,T], \\ \text{tout } u \text{ de } U^{ad}, \text{ avec } k_1 > 0 \text{ et } k_2 > 0 \end{cases}$

($\mathcal{H}_3$) $\begin{cases} (\forall u \in U^{ad})(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall t \in [0,T])(\exists\ \overline{f}_u(x,t) \in \mathbb{R}^n) \\ \frac{1}{T}\int_0^T f(x,u,t,\theta)d\theta \xrightarrow[T\to+\infty]{} \overline{f}_u(x,t) \end{cases}$

On définit le problème ($\mathcal{P}_\varepsilon$) pour $\varepsilon > 0$ comme suit :

Minimiser $\int_0^T L(x(t),u(t),t)dt$ où $\frac{dx}{dt} = f(x(t),u(t),t,\frac{t}{\varepsilon})$ sur $[0,T]$,

$x(o) = x_o$, ceci pour u application de $[0,T]$ dans $U^{ad}$, intégrable bornée.

On voit que, sous ces hypothèses, un contrôle u meilleur, par exemple, que le contrôle identiquement nul, doit vérifier $|u|^2_{L^2[0,T]} \leqslant C(1+|x_o|^2)$ ; dans la suite de l'étude, on se restreindra à de tels contrôles. Pour des conditions initiales bornées $x_o$, on en déduit donc que les trajectoires déterminées par de tels contrôles restent dans un domaine borné de $R^n$, d'ailleurs estimable à partir des hyptohèses ($\mathcal{H}_1$) et ($\mathcal{H}_2$) ; le problème $\mathcal{P}_\varepsilon$ est donc inchangé si on tronque f et L de manière régulière en dehors de ce domaine. Aussi, partant du principe qu'on ne s'intéressera à $\mathcal{P}_\varepsilon$ que pour un ensemble borné de conditions initiales, <u>nous supposerons désormais f et L à support compact dans $R^n$</u>. Toutes les trajectoires sont donc bornées et $\frac{\partial L}{\partial x}(x,u(t),t)$ est donc borné dans $L^2[0,T]$ indépendamment de x pour les contrôles ci-dessus. En particulier si $V_\varepsilon$ est la fonction valeur (comme infimum) du problème $V_\varepsilon$ est globalement lipschitz en x, et indépendamment d' $\varepsilon$.

## II - PROBLEME MOYENNE

1) Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des applications de R dans $R^p$, bornées, localement intégrables, vérifiant :

$$(\mathcal{H}_4) \begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall t \in [0,T])(\exists\ \overline{f}(x,v,t) \in R^n)(\exists\ \overline{L}(x,v,t) \in R) \\ \frac{1}{T}\int_0^T f(x,v(\theta),t,\theta)d\theta \xrightarrow[T\to+\infty]{} \overline{f}(x,v,t) \\ \text{et} \quad \frac{1}{T}\int_0^T L(x,v(\theta),t)d\theta \xrightarrow[T\to+\infty]{} \overline{L}(x,v,t) \end{cases}$$

et $\mathcal{V}^{ad} = \{v \in \mathcal{V}\ ,\ v(\theta) \in U^{ad}$ pour presque tout $\theta\}$

On définit $\mathfrak{U}$ l'ensemble des contrôles admissibles comme étant l'ensemble des applications u de $[0,T]$ dans $\mathcal{V}^{ad}$, intégrables bornées au sens de la norme $L^\infty$ sur $\mathcal{V}$. Notons que $\mathcal{V}^{ad}$ comprend l'ensemble $\mathcal{C}$ des applications constantes à valeur dans $U^{ad}$ d'après $\mathcal{H}_3$ , et que $\mathfrak{U}$ comprend les applications constantes à valeur dans $\mathcal{C}$. Enfin, si f est périodique en $\theta$ de même période pour tout x,u,t, alors les fonctions périodiques intégrables bornées sont dans $\mathcal{V}$.

2) Le problème moyenné consiste à minimiser :

$$\int_0^T \overline{L}(x(t),u(t),t)dt \quad \text{pour} \quad u \in \mathfrak{U}\ ,$$

où x est défini par $\frac{dx}{dt} = \overline{f}(x(t),u(t),t)$ sur $[0,T]$, $x(o) = x_o$.

3) Validité des outils généraux du contrôle optimal

a) Equation d'Hamilton Jacobi :

On montre [ 4 ], sous les mêmes hypothèses que d'ordinaire sur f, L et $U^{ad}$ que la fonction valeur $V^o(x_o,t) = \operatorname{Inf}_{u\in\mathfrak{U}} \int_t^T \overline{L}(x(s),u(s),s)ds$ vérifie :

$$\frac{\partial V^o}{\partial x} + \operatorname{Inf}_{v\in\mathcal{V}^{ad}} \left\{\frac{\partial V^o}{\partial x}\ \overline{f}(x,v,t) + \overline{L}(x,v,t)\right\} = 0 \quad \text{et} \quad V^o(x,T) \equiv 0.$$

On peut d'ailleurs reprendre les mêmes démonstrations.

Notons que, comme $V^\varepsilon, V^o$ est Lipschitz en x, globalement. En effet, pour $v \in \mathcal{V}$, on montre que $\overline{L}$ est de classe $C^1$, que $\frac{\partial \overline{L}}{\partial x}$ existe au sens de $(\mathcal{H}_4)$ et que $\frac{\partial \overline{L}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial L}{\partial x}}$ ; de même pour f. En particulier <u>$\overline{f}$ et $\overline{L}$ vérifient $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$, avec les mêmes constantes</u>, au sens de la norme $L^\infty$ pour $\mathcal{V}$. On en déduit que pour un domaine de conditions initiales identiques, on peut effectuer les mêmes troncatures que pour le problème $\mathcal{P}_\varepsilon$, et aboutir aux mêmes conclusions. De ce point de vue, on peut donc commuter troncature et moyenne. Une fois celles-ci effectuées, on peut conclure à la propriété de Lipschitz de $V^o$.

b) <u>Principe du minimum</u>

Soit u controle optimal. On définit l'état adjoint par :

$$- \frac{dp}{dt} = p.\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(x(t),u(t),t) + \frac{\partial \overline{L}}{\partial x}(x(t),u(t),t), \quad p(T) = 0$$

Par les mêmes techniques que dans les cas classiques, on montre que u minimise $p(t) . \overline{f}(x(t),v,t) + \overline{L}(x(t),v,t)$ pour v dans $\mathcal{V}^{ad}$, ceci pour presque tout t. Noter que v est une fonction sur $\mathbb{R}_+$

## III - <u>THEOREME LIMITE SUR LES FONCTIONS VALEUR</u>

Nous supposons donc désormais f et L à support compact en x, indépendant de t, u et $\theta$ et f uniformement continue en $\theta$. Nous ferons ici les hypothèses supplémentaires suivantes :

$$(\mathcal{H}_5) \begin{cases} \text{Soit } H(p,x,t,\theta) = \inf_{u \in U^{ad}} \left\{ p.f(x,u,t,\theta) + L(x,u,t) \right\} \text{ pour } p \in \mathbb{R}^n \\ \text{alors : } (\forall m>o)(\exists \lambda>o)(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall t \in [0,T])(\forall \theta \in \mathbb{R})(\forall (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \\ (|p_1| \leq m \text{ et } |p_2| \leq m) \Rightarrow (|H(p_1,x,t,\theta) - H(p_2,x,t,\theta)| \leq \lambda |p_1 - p_2|) \end{cases}$$

Notons que H existe d'après $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ et que, après troncature, $(\mathcal{H}_5)$ est vérifiée dans le cas linéaire quadratique. L'hypothèse essentielle pour ce qui nous concerne est la suivante :

$(\mathcal{H}_6)$ il existe $\overline{H}$ : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{ (\forall m>o) \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ t\in[0,T] \\ |p|\leq m \\ \hat{t}\geq o}} \left| \frac{1}{T}\int_{\hat{t}}^{\hat{t}+T} H(p,x,t,\theta)d\theta - \overline{H}(p,x,t)\right| \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \right.$$

Remarquons que $H(p,x,t,\theta)$ est borné pour $|p|\leq m$ après troncature, d'après $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$. En particulier, si f est périodique de période $\omega$, alors H l'est également et $\overline{H}$ est la moyenne de H sur une période.

Nous pouvons annoncer le théorème suivant [4]

<u>Théorème 1</u> : sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$, $(\mathcal{H}_3)$, $(\mathcal{H}_4)$, $(\mathcal{H}_5)$, $(\mathcal{H}_6)$ pour f et L à support compact en x, f uniformément continue en $\theta$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sup\limits_{\substack{x\in R^n \\ t\in[0,T]}} \left| V^{\varepsilon}(x,t) - V^{o}(x,t)\right| \xrightarrow[\varepsilon\to o]{} 0 \\ \text{et } V^o \text{ vérifie : } \dfrac{\partial V^o}{\partial t} + \overline{H}(\dfrac{\partial V^o}{\partial x},x,t) = 0,\ V^o(x,T) \equiv 0 \end{array}}$$

<u>Plan de la démonstration</u> :

1) On commence par établir le second point. On a en fait

$$\overline{H}(p,x,t) = \min_{v\in\mathcal{V}^{ad}} \left\{ p.\overline{f}(x,v,t) + \overline{L}(x,v,t)\right\} .$$

Le premier terme est inférieur au second car pour v dans $\mathcal{V}^{ad}$ on a :

$$p.f(x,v(\theta),t,\theta) + L(x,v(\theta),t) \geq H(p,x,t,\theta)$$

d'où l'inégalité en moyenne. Il suffit maintenant de montrer qu'il existe v dans $\mathcal{V}^{ad}$ tel que $p.\overline{f}(x,v,t) + \overline{L}(x,v,t) = \overline{H}(p,x,t)$. Pour cela on approxime $H(p,x,t,\theta)$ par $p.f(x,v(\theta),t,\theta) + L(x,v(\theta),t,\theta)$, où v est en escalier sur $R_+$, avec une erreur nulle en moyenne. Notons que dans le cas périodique on n'atteint pas toujours le Min si on se resteint à des v périodiques ; on a simplement égalité des Inf.

2) Pour démontrer le second point, on utilisera une méthode de viscosité.

En effet, on sait (cf [ 6 ]) que $V^{\varepsilon}$ peut être approché par $V_{\alpha}^{\varepsilon}$, où $V_{\alpha}^{\varepsilon}$ est la fonction valeur d'un problème de contrôle stochastique où f est perturbé par un petit "bruit" $\sqrt{\alpha}\, dw$ (w mouvement brownien standard). L'erreur est du type $K\sqrt{\alpha}$ et en particulier <u>K est indépendant du comportement en t de f et L</u>, et donc d'$\varepsilon$. Il en est de même pour $V^{o}$ : il suffit de définir le problème stochastique moyenné en se restreignant aux contrôles u(x,t, ) boréliens, tels qu'ils engendrent une moyenne au sens de $(\mathcal{H}_4)$. Le théorème d'approximation par viscosité reste valide en ce qui concerne le problème moyenné. D'après ce qui précéde, $V_{\alpha}^{o}$ vérifie :

(1) $\dfrac{\partial V_{\alpha}^{o}}{\partial t} + \alpha\, \Delta\, V_{\alpha}^{o} + \overline{H}(\dfrac{\partial V_{\alpha}}{\partial x},x,t) = 0 \qquad V_{\alpha}^{o}(x,T) \equiv 0$ et on a :

(2) $\dfrac{\partial V_{\alpha}^{\varepsilon}}{\partial t} + \alpha\, \Delta\, V_{\alpha}^{\varepsilon} + H(\dfrac{\partial V_{\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x},x,t,\dfrac{t}{\varepsilon}) = 0 \quad V_{\alpha}^{\varepsilon}(x,T) \equiv 0$

$V_{\alpha}^{o}$ et $V_{\alpha}^{\varepsilon}$ sont de classe $C^{1,2}$ et sont les uniques solutions de (1) et (2). Nous allons pouvoir donc raisonner directement sur ces équations.

Plus précisément, nous allons démontrer qu'il existe $\varepsilon(\alpha,\eta)$ tel que, pour $\varepsilon < \varepsilon(\eta,\alpha)$ alors $\displaystyle\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ t\in[0,T]}} \left|V_{\alpha}^{\varepsilon}(x,t) - V^{o}(x,t)\right| \leqslant \eta$ ;

le théorème sera démontré en prenant $\varepsilon < \varepsilon\ (\eta,\frac{\eta^2}{K^2})$

La démonstration du point précédent étant assez longue, nous n'en donnerons que les principales étapes. Nous utiliserons le noyau de la chaleur et les techniques de base esposées dans [7].

a) Remarquons d'abord que $\dfrac{\partial V_{\alpha}^{o}}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial V_{\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x}$ sont bornés indépendamment d'$\varepsilon$. Or si W est solution de $-\dfrac{\partial W}{\partial t} - \alpha\, \Delta\, W = g(x,t)$ avec $W(x,T) = 0$, $t\in[0,T]$, il existe $\mu\in]0,1[$ tel que $\left|\dfrac{\partial W}{\partial x}(x,t) - \dfrac{\partial W}{\partial x}(x,t')\right| \leqslant K\ |t-t'|^{\mu}$, où K ne dépend que de $\|g\|_{\infty}$ et T. On a donc une estimation höldérieme de $\dfrac{\partial V_{\alpha}^{0}}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial V_{\alpha}^{\varepsilon}}{\partial x}$ indépendante d'$\varepsilon$.

b) Si $\Gamma_{\alpha}$ désigne le noyau de la chaleur utilisé, on peut ensuite estimer $\mathbb{R}_i^{\varepsilon} = \dfrac{\partial \Gamma_{\alpha}}{\partial x_i} *_t (H(\dfrac{\partial V_{\alpha}^{0}}{\partial x},x,t,\dfrac{t}{\varepsilon}) - \overline{H}(\dfrac{\partial V_{\alpha}^{0}}{\partial x},x,t))$ pour $\varepsilon$ petit, par averaging, grâce à l'hypothèse $(\mathcal{H}_6)$ et au résultat ci-dessus ; $*_t$ désigne le produit de convolution sur $[t,T]$.

c) Posons $M(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial v_\alpha^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial v_\alpha^0}{\partial x}\right|$. Comme H est Lipschitz en p d'après ($\mathcal{H}_5$), en utilisant $\Gamma_\alpha$ pour exprimer $\frac{\partial v_\alpha^\varepsilon}{\partial x}$ et $\frac{\partial v_\alpha^0}{\partial x}$ on a donc :

$$M(t) \leqslant \int_t^T M(\tau) \int_{R^n} \left|\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial x_i}(x,\tau-t)\right| dx + \eta \text{ pour } \varepsilon \text{ petit ;}$$

d'où une estimation de $\left|\frac{\partial v_\alpha^\varepsilon}{\partial x} - \frac{\partial v_\alpha^0}{\partial x}\right|$ par un lemme de type Gronwall.

d) La deuxième partie consiste essentiellement a répéter la même démonstration en ramplaçant $\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial x}$ par le noyau $\Gamma_\alpha$ lui-même.■

## IV - UTILISATION DU CONTROLE OPTIMAL EN BOUCLE OUVERTE DU PROBLEME MOYENNE

Le théorème présenté maintenant est à rapprocher des résultats équivalents existants en pertrubations régulières. Les hypothèses et la démonstration que nous utiliserons sont d'ailleurs très inspirées de celles utilisées par A. Bensoussan dans ce domaine [ 2 ]. On prend ici $U^{ad} = R^p$

1) Théorème 2 : Soient f et L comme dans les paragraphes I et II(*) avec de plus :

($\mathcal{H}_7$) f est périodique en $\theta$ de période $\omega$

($\mathcal{H}_8$) Le problème moyenné admet un contrôle optimal $v_o$ pour la condition initiale X ; on notera y la trajectoire optimale et q l'état adjoint et on posera $u_o(t,\theta) = [v_o(t)](\theta)$ ; on suppose $u^o \in L^2([0,T]\times[0,\omega],\ R^p)$

($\mathcal{H}_9$) f et L sont de classe $C^2$ en x et u, de dérivées bornées, de dérivées secondes Lipschitz en x et u

Si $h(p,x,u,t,\theta) = p.f(x,u,t,\theta) + L(x,u,t)$, alors

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(q(t),x,v,t,\theta) \geqslant \beta \text{ Id},\ \beta > 0 \text{ pour tout } x,v,t,\ \theta$$

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial v}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 h}{\partial v \partial x}\right)(q(t),x,v,t,\theta) \geqslant 0 \text{ pour tout } x,v,t,\theta$$

($\mathcal{H}_{10}$) $f(y(t),u_o(t,\theta),t,\theta)$ et $\frac{\partial h}{\partial x}(q(t),y(t),u_o(t,\theta),t,\theta)$ sont bornés de classe $C^1$ en t, de dérivée lipschitz en t.

(*) en particulier f et L de support compact en x.

Si $g(\Theta)$ est périodique intégrable bornée, on notera $\overline{g}$ sa moyenne et $\pi(g(.))$ la primitive de moyenne nulle de $(g-\overline{g})$. ($\mathcal{H}_9$) est identique aux hypothèses faites en perturbations régulières.
On posera $x_2(t,\Theta) = \pi(f(y(t),u_o(t,.),t,.)(\Theta)$ et $J_\varepsilon^*$ le coût optimal du problème d'origine.

On a, comme en perturbations régulières, doublement de l'ordre d'approximation. En effet, il existe $k>o$, $\varepsilon_o>o$, tels que pour $\varepsilon<\varepsilon_o$:

a) $$J_\varepsilon^* \geqslant \int_o^T L(y(t),u_o(t,\tfrac{t}{\varepsilon}),t)dt + \varepsilon\int_o^T \overline{\frac{\partial H}{\partial x}(q(t),y(t),t,.)x_2(t,.)}dt - \varepsilon q(o).x_2(o,o) - k\varepsilon^2$$

b) Soit $x$ défini par $\frac{dx}{dt} = f(x,u_o(t,\frac{t}{\varepsilon}),t,\frac{t}{\varepsilon})$, $x(o) = X$

Alors $$\left|\int_o^T L(x,u_o(t,\tfrac{t}{\varepsilon}),t)dt - \int_o^T L(y(t),u_o(t,\tfrac{t}{\varepsilon}),t)dt - \varepsilon\int_o^T \overline{\frac{\partial H}{\partial x}(q(t),y(t),t,.)x_2(t,.)}dt + \varepsilon q(o).x_2(o,o)\right| \leqslant k\varepsilon^2$$

et $u_o$ est donc optimal dans $P^\varepsilon$ à l'ordre 2.

<u>Démonstration</u> : Comme nous l'avons précisé, les techniques utilisées sont très proches de celles rencontrées en perturbations régulières [2]. Aussi nous ne mentionnerons ici que les principales différences :

a) Soit $p_2(t,\Theta) = -\pi(\frac{\partial H}{\partial x}(q(t),y(t),t,.))(\Theta)$

Le problème tangent à considérer est le suivant :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(y(t),u_o(t,\tfrac{t}{\varepsilon}),t,\tfrac{t}{\varepsilon})(z+x_2(t,\tfrac{t}{\varepsilon})) + \frac{\partial f}{\partial u}(y(t),u_o(t,\tfrac{t}{\varepsilon}),t,\tfrac{t}{\varepsilon})u \quad , \quad z(o) + x_2(o,o) = o$$

Minimiser : $$\int_o^T \left\{(z',u')\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 H}{\partial x2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial v}\\ \frac{\partial^2 H}{\partial v\partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial v2}\end{pmatrix}_{(q,y,t,\frac{t}{\varepsilon})}\begin{pmatrix}z\\ u\end{pmatrix} + p_2(t,\tfrac{t}{\varepsilon})[\tfrac{\partial f}{\partial x}(y,u_o,t,\tfrac{t}{\varepsilon})z+\tfrac{\partial f}{\partial u}(y,u_o,t,\tfrac{t}{\varepsilon})u]\right\}dt$$

On note $y_1$ la trajectoire optimale et $v_1$ le contrôle optimal.

b) On pose $r = x-y-\varepsilon x_2(t,\frac{t}{\varepsilon})-\varepsilon y_1 = \tilde{x}-\varepsilon y_1$

$$v = u-u_o(t,\frac{t}{\varepsilon})-\varepsilon v_1 \quad = \tilde{u}-\varepsilon v_1$$

$$\rho(\lambda,\mu) = (q,y+\lambda\mu(\tilde{x}+\varepsilon x_2(t,\frac{t}{\varepsilon})),u_o(t,\frac{t}{\varepsilon})+\lambda\mu\tilde{u},t,\frac{t}{\varepsilon})$$

et h désigne l'hamiltonien non minimisé, non moyenné. On rapportera toutes les estimations à :

$$Z_\varepsilon(\lambda,\mu) = v + \left|\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}^{-1} \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial x}\right|_{(\rho(\lambda,\mu))} (r+\varepsilon x_2)$$

et à $\quad z_\varepsilon^2 = \int_o^1 \lambda d\lambda \int_o^1 d\mu \; |Z_\varepsilon(\lambda,\mu)|^2_{L^2(o,T)}$

A partir de là, la démonstration est assez classique, mis à part quelques simplifications d'expressions par estimations de moyennes.

Remarque : on comparera ce résultat à celui obtenu en perturbations singulières. Néanmoins, le lecteur, en raisonnant par analogie, se convaincra que minimiser la moyenne de l'hamiltonien par un contrôle en feedback sur l'état rapide est l'équivalent de la résolution à chaque instant d'un problème de couche limite, mais statique. Il n'y a donc pas à proprement parler de "contrôle lent" et, pour revenir aux perturbations singulières, on ignore donc l'ordre d'approximation intermédiaire utilisant ce "contrôle lent". Une des particularités des perturbations singulières tient à ce que, par exemple, fonctions du phénomène rapide et moyenne commutent (la moyenne étant l'état quasi-stationnaire). On peut donc considérer la moyenne du contrôle rapide, qui est le contrôle lent.

2) Conséquences numériques du théorème 2 :

On voit donc que $u_o$ est optimal à l'ordre 2. Mais que gagne-t-on à utiliser le problème moyenné plutôt que le problème d'origine ? Contrairement à ce qui se passe en perturbations singulières, on ne gagne pas en dimension d'état, bien qu'en un sens, il y ait disparition du phénomène rapide. On ne gagne pas dans la minimisation de l'Hamiltonien, puisque celle-ci se fait à l'intérieur de la moyenne ; elle nécessite donc une grille de temps fine. Le coté statique de la résolution est donc inchangé ; par contre on gagne un facteur $\frac{1}{\varepsilon}$ dans la partie dynamique. En effet la dépendance en $\frac{t}{\varepsilon}$ de f nécessite à priori une grille de temps en $\frac{\delta t}{\varepsilon}$ ; le passage à la moyenne permet de se limiter à des grilles en $\delta t$, que ce soit pour la résolution des équations d'Euler ou pour l'utilisation de la programmation dynamique. Ceci est particulièrement appréciable lorsqu'on a à raisonner sur de longues périodes de temps, ce qui est le cas lorsqu'on considère la gestion d'une maison solaire qui doit prendre en compte les variations relativement rapides des phénomènes météorologiques, alors que le problème est à horizon annuel en raison de l'importance cruciale des variations saisonnières.

Exemple :

Soit $\frac{dx}{dt} = a(t)x + u\sin\frac{t}{\varepsilon}$ , Minimiser $\int_o^T (x^2+ru^2)dt$, $r>o$, $x\in R$

Soit $P^\varepsilon x^2$ la fonction valeur. $P^\varepsilon$ vérifie :

$$\frac{dP^2}{dt} + 2aP + 1 - \frac{(P^\varepsilon)^2}{r} \sin^2(\frac{t}{\varepsilon}) = o, \quad P(T) = o,$$

d'où, à priori, l'utilisation d'une discrétisation en $\frac{\delta t}{\varepsilon}$ .

Résoudre le problème moyenne consiste à résoudre :

$$\frac{dP^o}{dt} + 2aP + 1 - \frac{(P^o)^2}{2r} = o, \quad P(T) = o,$$

d'où une grille de temps en $\delta t$. Le contrôle $u^\varepsilon(t) = -\frac{P^o(t)}{r}\sin\frac{t}{\varepsilon}\,y(t)$ (où $\frac{dy}{dt} = a(t)y - \frac{P^o(t)}{2r}y$, $y(o) = x(o))_o$ est optimal à $\varepsilon^2$ près (Dans ce cas précis, le contrôle $u^\varepsilon(x,t) = -\frac{P^o(t)}{r}\sin\frac{t}{\varepsilon}\,x$ est aussi optimal à l'ordre 2). On peut également procéder en boucle fermée et utiliser les mêmes résultats, puisqu'on connait la forme de feedback optimaux.

## V - CAS LINEAIRE QUADRATIQUE, PERIODIQUE

Dans le cas linéaire quadratique, tous les résultats peuvent être retrouvés par des techniques différentes, puisque l'étude se ramène à celle d'équations différentielles ordinaires (Riccati par exemple). On peut exhiber un developpement asymptotique de la fonction valeur ; il doit, à partir de l'ordre 2, dépendre nécessairement de la variable $\Theta+\frac{T-t}{\varepsilon}$ (phase finale) (cf. perturbations singulières). On généralise le doublement d'ordre d'approximation à un ordre quelconque en utilisant des feedbacks déduits du développement précédent. Notons que ceci se ramène, dans le cas linéaire quadratique, à utiliser (après transformation) des contrôles en boucle ouverte, grâce à la forme particulière des feedbacks.

## VI - DEVELOPPEMENTS A PRIORI DE LA FONCTION VALEUR

### 1) Forme du développement :

On songerait d'abord à développer la fonction valeur sous la forme :

$$V^{\varepsilon}(x,t) = V^{o}(x,t) + \Sigma\, \varepsilon^{k}\, V_k(x,t,\theta)\Big|_{\theta=\frac{t}{\varepsilon}}$$

Or ceci se révèle impraticable sur des cas simples à partir du troisième terme $V_2$. En effet, la partie de moyenne nulle de $V_k$ s'obtient indépendamment des conditions aux limites, et ne les vérifie en général pas(*).

Une forme plus appropriée consiste à prendre :

$$V^{\varepsilon}(x,t) = V^{o}(x,t) + \varepsilon V_1(x,t,\tfrac{t}{\varepsilon}) + \Sigma\, \varepsilon^{k}\, V_k(x,t,\tfrac{t}{\varepsilon},\tfrac{T}{\varepsilon}) \;;$$

elle est d'ailleurs exacte dans le cas linéaire quadratique. Il nous semble que l'apparition de $\frac{T}{\varepsilon}$ puisse être reliée à la présence d'un terme analogue à $x_2$ dans le développement de l'état adjoint. Nous allons maintenant nous limiter aux deux premiers termes du développement, et montrer la cohérence de celui-ci avec les résultats précédents.

### 2) Cohérence des développements :

#### a) Identification de $V_1$

Nous allons élargir le problème en introduisant un état supplémentaire: $\frac{dx}{dt}=f(x,u,t,\theta)$ et $\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{\varepsilon}$ ; $P_\varepsilon$ correspond aux trajectoires particulières: $\theta(t)=\frac{t}{\varepsilon}$. La fonction valeur $V^{\varepsilon}(x,t,\theta)$ est périodique en $\theta$ et vérifie :

$$\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial \theta}+ \operatorname*{Min}_{u} \left[\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial x}\cdot f(x,u,t,\theta) + L(x,u,t)\right] = 0, \quad V^{\varepsilon}(x,t,\theta) \equiv 0$$

En supposant $\left|V^{\varepsilon} - V^{o} - \varepsilon V_1(x,t,\theta) - \varepsilon^2 V_2(x,t,\theta,\theta+\frac{T-t}{\varepsilon})\right| \leqslant k\, \varepsilon^2$

(*) Si L dépend explicitement de $\theta$, on peut rencontrer ce problème dès le second terme $V_1$. C'est pourquoi nous avons supposé L indépendant de $\theta$.

et l'unicité de l'argument de minimisation, on a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial V^o}{\partial t} + \dfrac{\partial V_1}{\partial \theta} + \underset{u}{\mathrm{Min}} \left[\dfrac{\partial V^o}{\partial x} f(x,u,t,\theta) + L(x,u,t)\right] = 0 \\ \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial t} + \dfrac{\partial V_2}{\partial \theta} + \dfrac{\partial V_1}{\partial x} f(x,v(x,t,\theta),t,\theta) = 0 \ , \end{array}\right.$$

où $v(x,t,\theta)$ minimise l'hamiltonien $\dfrac{\partial V^o}{\partial x} f + L$.

Soit $Q_1$ la moyenne de $V_1$ et $S_1 = V_1 - Q_1$. Alors :

$$(2) \quad S_1 = -\pi\Big(H\Big(\frac{\partial V_o}{\partial x},x,t,.\Big)\Big) = - \frac{\partial V_o}{\partial x} \pi(f(x,v(x,t,.),t,.)$$

$$-\pi(L(x,v(x,t,.),t)) \ , \quad \text{et } Q_1 \text{ vérifie :}$$

$$(3) \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial Q_1}{\partial t} + \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} \overline{f(x,v(x,t,.),t,.)} + \overline{\dfrac{\partial S_1}{\partial x} f(x,v(x,t,.),t,.)} = 0 \\ \\ Q_1(x,T) = 0 \end{array}\right.$$

b) Nous allons maintenant énoncer le

<u>Théorème 3</u> : Soient $S_1$ et $Q_1$ vérifiant (2) et (3), et $u_o,y,q$ et $x_2$ définis comme dans le théorème 2. Alors :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{a)} & Q_1(X,0) = \displaystyle\int_o^T \overline{\frac{\partial H}{\partial x}(q,y,t,.)x_2(t,.)}dt \\ \\ \text{b)} & \left| V^o(X,0)+\varepsilon S_1(X,0,0)+\varepsilon q'(o)x_2(o,o)-\displaystyle\int_o^T L\Big(y,u_o\Big(t,\frac{t}{\varepsilon}\Big),t\Big)dt\right| \leqslant k\varepsilon^2 \end{array}}$$

ce qui établit la cohérence cherchée.

<u>Démonstration</u> : Démontrons le point a). Remarquons d'abord que :

$$- \overline{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\pi\Big(H\Big(\frac{\partial V_o}{\partial x},x,t,.\Big)\Big)f(x,v(x,t,.),t,.\Big)} =$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial X}\Big(H\Big(\frac{\partial V_o}{\partial x},x,t,.\Big)\Big)\pi(f(x,v(x,t,.),t,.)} \quad \text{par intégration par parties.}$$

D'autre part, la dynamique intervenant dans (3) est celle de y. Intégrant (3) entre 0 et T le long de y, nous obtenons donc :

$$Q_1(X,0) = \int_o^T \overline{\frac{\partial H}{\partial x}(q,y,t,.)x_2(t,.)}dt$$

Passons au point b). On sait que,

à k $\varepsilon^2$, $\int_o^T L(y,u_o(t,\frac{t}{\varepsilon}),t)dt$ est égal à :

$$\int_o^T \overline{L(y,u_o(t,.),t)}dt + \varepsilon\left[\pi(L(y,u_o(t,.),t)\Big|_{\Theta=\frac{t}{\varepsilon}}\right]_{t=0}^{t=T}$$

Le premier terme vaut précisément $V^o(X,0)$. Quant au second, remarquons que $S_1(x,T,\Theta) = -\pi(H(0,x,T,.)) = 0$ car L ne dépend pas de $\Theta$.

Donc $\pi(L(y(T),v(y(T),T,.),T)$ est nul et $\int_o^T L(y,u_o(t,\frac{t}{\varepsilon}),t)dt$ est égal, à k $\varepsilon^2$ près, à : $V^o(X,0) - \varepsilon\pi(L(X,v(X,0,.),0)\Big|_{\Theta=0}$, qui vaut précisément $V^o(X,0) + \varepsilon S_1(X,0,0) + \varepsilon q'(0)x_2(o,o)$ ∎

3) <u>Conséquences envisageables</u> :

On a montré, dans le cas linéaire quadratique, le doublement d'ordre d'approximation lorsqu'on utilise dans le système d'origine les feedbacks :

$$u = v_o + \sum_{k=1}^{i} \varepsilon^k v_k ;$$

où $v_j$ minimise $H(\frac{\partial V_j}{\partial x},x,t,\Theta)$. Or, si on a calculé les trajectoires optimales y lors de la programmation dynamique du problème moyenné, $V_1$ est alors calculable très simplement, et permet d'espérer accéder à l'ordre 4 sur le coût optimal, ceci sans avoir recours à une grille de temps fine.

# BIBLIOGRAPHIE

[1] V. ARNOLD, "Théorie des équations différentielles ordinaires", Editions de Moscou.

[2] A. BENSOUSSAN, "Singular Perturbations in Systems and Control", Mark Ardema, ed., Springer-Verlag, 1983, pp 169-185.

[3] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU,"Asymptotic Analysis for Periodic Structures", North-Holland, 1978.

[4] F. CHAPLAIS, Thèse de Docteur-Ingénieur, à paraître.

[5] F. DELEBECQUE, J.P. QUADRAT, "Utilisation d'un théorème de mélange pour le découplage gestion court terme, long terme et contrôle stochastique et application à la gestion de réservoirs", Annales des Sciences Mathématiques du Québec, 1977, Vol.2, pp. 195-205.

[6] W.H. FLEMING, R.W. RISHEL, "Deterministic and Stochastic Optimal Control", Springer-Verlag, 1975.

[7] A. FRIEDMAN, "Partial Differential Equations of Parabolic Type", Prentice-Hall, 1964.

[8] Y. LENOIR, LU RONG GUO, "Commande optimale des chauffages solaires avec appoint indépendant", Rapport à DETN - GAZ DE FRANCE - CAI ENSMP, 1982.